数理解析研究所講究録
第 388 巻 1980 年 38-47

二次曲面と積分可能系

阪大 理　　田中俊一

a) Jacobi による楕円面上の測地流の積分（[2]）, b) Klein による二次の線綱の研究（[4]）, c) Darboux によるサイクライドの研究（[1]）は多くの類似点をもっているが，それはいずれもが共焦二次曲面の系により導入された座標（楕円座標）により記述されることに由来している．ここでは a) と b) の類似を述べよう．

1. 測地流の積分可能性

n 次元ユークリッド空間における楕円面

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i} = 1 \qquad (a_i > 0)$$

が与えられたとする．空間の点 $x = (x_i)$ に対し

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i - \lambda} = 1$$

の根として定まる $\lambda = (\lambda_i)$ を楕円座標という． 式

(2) $$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i - \lambda} - 1 = -\frac{P(\lambda)}{A(\lambda)},$$

$$A(\lambda) = (\lambda - a_1) \cdots (\lambda - a_n), \quad P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n)$$

が成立する． $a_i - \lambda$ をかけて $\lambda = a_i$ とおくと $x = (x_i)$ は

$$x_i^2 = \frac{P(a_i)}{A'(a_i)} = \frac{(a_i - \lambda_1) \cdots (a_i - \lambda_n)}{\prod_{l(\neq i)} (a_i - a_l)}$$

とあらわされる． 対数微分して得られる

$$2\frac{dx_i}{x_i} = -\sum_{j=1}^{n} \frac{d\lambda_j}{a_i - \lambda_j}$$

を代入して， 線素は

$$ds^2 = \frac{1}{4} \sum_i x_i^2 \left(\sum_j \frac{d\lambda_j}{a_i - \lambda_j} \right)^2$$

$$= \frac{1}{4} \sum_j \left(\sum_i \frac{x_i^2}{a_i - \lambda_j} \right) d\lambda_j^2 + \frac{1}{4} \sum_{j \neq k} \left(\sum_i \frac{x_i^2}{(a_i - \lambda_j)(a_i - \lambda_k)} \right) d\lambda_j d\lambda_k$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Lambda_i \, d\lambda_i^2,$$

$$\Lambda_i = -\frac{1}{4} \frac{P'(\lambda_i)}{A(\lambda_i)} = -\frac{1}{4} \frac{\prod_{l(\neq i)} (\lambda_i - \lambda_l)}{(\lambda_i - a_1) \cdots (\lambda_i - a_n)}$$

とあらわされる． したがって楕円面 (1) 上の線素は $\lambda_n = 0$ とおいて

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \Lambda_i \, d\lambda_i^2$$

で与えられる．その上の測地流の運動エネルギーは

$$E=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\Lambda_i\dot{\lambda}_i^2,$$

座標 λ_i に共役な変数 p_i は

$$p_i=\partial E/\partial\dot{\lambda}_i=\Lambda_i\dot{\lambda}_i$$

であるから，測地流のハミルトニアンは

$$H=E=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\Lambda_i^{-1}p_i^2$$

となる．対応するハミルトン－ヤコビの偏微分方程式は

$$(3)\qquad \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\Lambda_i}\left(\frac{\partial S}{\partial\lambda_i}\right)^2=\text{定数}\ (\eta_1\text{とおく})$$

である．

(3)の任意定数 $\eta_1,\cdots,\eta_{n-1}$ を含む解（完全解）

$$S=S(\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1};\eta_1,\cdots,\eta_{n-1})$$

が得られたとする．そのとき

$$p_i=\partial S/\partial\lambda_i,\quad \xi_i=\partial S/\partial\eta_i$$

により定まる正準変換 $(\lambda,p)\longrightarrow(\xi,\eta)$ を行なうとハミルトニアンは

$$H=\eta_1$$

になり，運動方程式は

$$\dot{\xi}_i=\delta_{i1},\quad \dot{\eta}_i=0$$

になる．

方程式(3)，すなわち

$$(3') \qquad \sum_{i=1}^{n-1} \frac{-2A(\lambda_i)}{P'(\lambda_i)} \left(\frac{\partial S}{\partial \lambda_i} \right)^2 = \eta_1$$

の完全解は以下のように変数分離法で求められる.

$\lambda_n = 0$ であったから

$$P(\lambda) = \lambda P_1(\lambda) \quad , \quad P_1(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_{n-1})$$

であるが

$$Q(\lambda) = \eta_1 \lambda^{n-2} + \eta_2 \lambda^{n-3} + \cdots + \eta_{n-1}$$

とおくと Lagrange の補間公式より

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{Q(\lambda_i)}{P_1'(\lambda_i)} = \eta_1 \quad .$$

したがって $(3')$ は

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{P_1'(\lambda_i)} \left\{ -\frac{2A(\lambda_i)}{\lambda_i} \left(\frac{\partial S}{\partial \lambda_i} \right)^2 - Q(\lambda_i) \right\} = 0$$

と書くことができ, とくに

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \lambda_i} \right)^2 = -\frac{\lambda_i Q(\lambda_i)}{2A(\lambda_i)}$$

とすれば各項は 0 となる. したがって

$$S = \sum_{i=1}^{n-1} \int^{\lambda_i} \sqrt{\frac{\lambda Q(\lambda)}{-2A(\lambda)}} \, d\lambda$$

が求める完全解である.

2. 二次線網

楕円座標は空間の各点をあらわしていたが次に複素空間で

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$$

をみたす点をあらわす方法を考えよう. ( )と同様に

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i-\lambda} = \frac{x_1^2(a_2-\lambda)\cdots(a_n-\lambda)+\cdots}{A(\lambda)}$$

とあらわしたとき(4)より分子の λ^{n-1} の係数は 0 となる. また λ^{n-2} の係数は $-r^2$, $r^2=a_1x_1^2+\cdots+a_nx_n^2$ であるから

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i-\lambda} = -r^2\frac{P(\lambda)}{A(\lambda)},$$

$$P(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_{n-2}).$$

$a_i-\lambda$ をかけて $\lambda=a_i$ とおくと

$$x_i^2 = r^2\frac{P(a_i)}{A'(a_i)} = r^2\frac{(a_i-\lambda_1)\cdots(a_i-\lambda_{n-2})}{\prod_{l(\neq i)}(a_i-a_l)}.$$

したがって同次座標 $x=(x_i)$ と楕円座標 $\lambda=(\lambda_i)$ は互いに他を定める.

まず x を同次座標と考えずに曲面(4)と

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 = 1$$

の交わりを考える. そこでは

$$x_i^2 = \frac{P(a_i)}{A'(a_i)}.$$

したがって

$$2\frac{dx_i}{x_i} = -\sum_{j=1}^{n-2}\frac{d\lambda_j}{a_i-\lambda_j}$$

を

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} dx_i{}^2$$

に代入して

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n-2}\Lambda_i\, d\lambda_i^2,$$

$$\Lambda_i = \frac{1}{4}\frac{P'(\lambda_i)}{A(\lambda_i)}$$

がえられる．対応するハミルトン－ヤコビの方程式は

(5) $$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-2}\frac{1}{\Lambda_i}\left(\frac{\partial S}{\partial\lambda_i}\right)^2 = \text{定数}\ (\eta_1\text{とおく}),$$

これは

(5′) $$\sum_{i=1}^{n-2}\frac{1}{P'(\lambda_i)}\left\{-2A(\lambda_i)\left(\frac{\partial S}{\partial\lambda_i}\right)^2 - Q(\lambda_i)\right\} = 0,$$

$$Q(\lambda) = \eta_1\lambda^{n-3} + \cdots\cdots$$

と変形され，§1と同様に解かれる．

次に $\mathbb{P}^3$ の直線幾何の概略を述べよう（[3，第6章]）．$\mathbb{P}^3$ の直線 l の二点 $x=(x_1,\cdots,x_4)$，$y=(y_1,\cdots,y_4)$ に対して

$$p_{ij} = x_i y_j - x_j y_i$$

とおく．$p_{ij} = -p_{ji}$ であるから p は6個定まるが，それのあらわす $\mathbb{P}^5$ の点は l に対応し，それをPlücker座標という．

Pは二次の関係式

$$p_{12}p_{34}+p_{13}p_{42}+p_{14}p_{23}=0$$

をみたしている。この二次曲面をGとする。以下座標変換によりGは

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_6^2=0$$

で与えられているものとする。$\mathbb{P}^5$の他の曲面 $F=\{\varphi=0\}$ が与えられ $X=G\cap F$ が三次元になるとき，Xに対応する($\mathbb{P}^3$の)直線の集まりを線綱(line complex)という。φが二次式のときXを二次の線綱という。二次元の直線の集まりを線叢(line congruence)という。

$p\in\mathbb{P}^3$に対し$\sigma(p)$でpを通る直線全体をあらわす。対応する$\mathbb{P}^5$の集合も同じ記号であらわすが，それは二次元平面になる。線綱が与えられたとき $p\in\mathbb{P}^3$ が特異であるとは，$\sigma(p)$がFに接する場合として定義する。特異点全体をSと記す。$x\in X$または対応する直線l_xが特異であるとは次の同値な条件が成立することとして定義する：

$\exists p\in l_x$，$\sigma(p)$はxでFに接する。

$\Leftrightarrow$ $T_x(F)$ (xにおけるFの接平面)はGに接する。

$$\Leftrightarrow\quad \sum_{i=1}^{6}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2=0 .$$

例えばφが二次式

$$\varphi=a_1x_1^2+\cdots+a_6x_6^2$$

のとき，最後の条件から，$x \in X$ が特異 $\Longleftrightarrow$

$$a_1^2 x_1^2 + \cdots + a_6^2 x_6^2 = 0$$

となる．

特異な $x \in X$ の全体を Σ と記す．$x \in \Sigma$ なら第一の条件の p は唯一つで l_x と $\left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)\right)$ に対応する直線の交点として求まることがわかる．かくて $\Sigma \ni x \longrightarrow p \in S$ なる写像が得られるが，上への写像でほとんど一対一である．とくに二次の線綢の場合には 16 個の p をのぞいて一対一で，例外的な p の逆像は $\mathbb{P}^1$ である．この場合 S は 16 個の二重点をもつ 4 次曲面で Kummer 曲面とよばれている．Σ は S の特異点を解消したものになっている．

Klein は [4] において次の問題を研究した．

1．すべての点が特異になる線綢を見出すこと．

2．与えられた線綢の部分線叢で，ある曲面の主接線方向（の一系）からなるものを見出すこと．

これらの問題の背景には当時彼が Lie と共に Kummer 曲面上の主接線曲線を研究していたという事実がある．さて 1 であるが，かかる線綢は $\mathbb{P}^3$ のある曲面の接線全体から成るものとして特徴づけられる．一方第三の条件より，G 上

$$\sum_{i=1}^{6} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)^2 = 0$$

が常に成立する φ を見出してもよい．$n=6$ の場合の楕円

座標$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$であらわした式が(5)(ただし$c_1=0$, $n=6$)に他ならない. この場合 Q はλの二次式であるので, a, b を定数として

$$\varphi = \sum_{i=1}^{4} \int^{\lambda_i} \sqrt{\frac{(\lambda-a)(\lambda-b)}{A(\lambda)}}\, d\lambda$$

が求めるφである. φの定める線綱はある曲面Sの接線から成るが, KleinはSの主接線方向の一系は二次線綱

(6) $$\sum_{i=1}^{6} \frac{x_i^2}{a_i - a} = 0$$

に部分線叢として(他系は(6)のaをbとした線綱に)含まれることを証明し問題2との関連をも示した.

さらにこの立場からもKummer曲面のテータ関数による parametrization などを与えることができる. 詳しくは[4]および一連の line geometry の論文(全集 Vol. 1)を参照されたい.

文献

[1] G. Darboux, Leçon sur la théorie générale des surfaces, Vol. II, Chelsea
[2] G.G.J. Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, Chelsea = 全集 Vol. VIII

[3] P. Griffiths and J. Harris, Principles of algebraic geometry, Wiley-Interscience, 1978
[4] F. Klein, Über gewisse in der Liniengeometrie auftretende Differentialgleichungen, 全集 Vol.I, 127-152.