数理解析研究所講究録
第 388 巻 1980 年 170-182

球函数付きの,二次形式のテータ級数とモジュラー形式

北大 理学部 織田孝幸

§0 Hecke − Schoenberg の球函数つきのテータ級数.

(0.1) 今, $\mathcal{O}$ を判別式 D (<0) の虚二次体の全整数環とする. 複素上半平面の点 τ (i.e. $\tau\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Im}\,\tau>0$) に対し, τ の正則函数 $\vartheta_k(\tau;\mathcal{O};\rho)$ を次の形の無限和で定義する.

$$\vartheta_k(\tau;\mathcal{O};\rho)=\sum_{\substack{\lambda\in\mathcal{O}\\ \lambda\equiv\rho \bmod \sqrt{D}}}\lambda^k e^{2\pi i N(\lambda)\tau},$$

但し, ここで k は非負整数, $\rho\in\mathcal{O}$, $N(\lambda)$ は λ のノルムである。こういう函数が weight $k+1$ の elliptic modular form になることは, 特別の場合に A. Hurwitz によって知られ, Hecke によって系統的に研究された。

(0.2) おそらくはこういうものから出発して, Hecke の学生であった Schoenberg は次のような一般化を与えた ([4], [5] を見よ).

いま, $Q:\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}$ を m 変数の正定値実二次形式とせよ さらに Q は lattice $L=\mathbb{Z}^m$ 上で偶整数値をとるとせよ. こ

のとき Q に関する次数 k の調和多項式を次のように定義する.

定義. $h(x)$ を $\mathbb{R}^m$ 上の多項式とする. h が次の2つの条件を満たすとき, h を次数 k の調和多項式という.

(i) かってな数 $\lambda \in \mathbb{R}^\times = \mathbb{R} - \{0\}$ に対して

$$h(\lambda \cdot x) = \lambda^k \cdot h(x)$$

が成立する.

(ii) Q^{-1} を Q の逆形式とするとき,

$$Q^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) h(x) = 0.$$

但し, ここで $\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_m}\right)$. ▲

さて $h(x)$ が上のように与えられたとき, 上半空間 H の点 τ に対して, 球函数つきの二次形式のテータ級数 $\vartheta(\tau; Q; h)$ を次のように定める.

定義.

$$\vartheta(\tau; Q; h) = \sum_{l \in L} h(l) \exp[\pi i Q(l) \tau].$$ ▲

$\vartheta(\tau; Q; h)$ は, Q が正定値であることより収束して H 上の正則函数を定める. さてこれについて Schoenberg が得た結果は次のようなものである. 今話しを簡単にするため m が偶数の場合に限るとする.

定理. N を Q の level とする。つまり N は NQ^{-1} が L 上偶整数値をとるような最小の正整数とする. $SL_2(\mathbb{Z})$ の部分群 $\Gamma_0(N)$ を $\Gamma_0(N)=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in SL_2(\mathbb{Z}) \mid c\equiv 0 \bmod N\right\}$ で定める. このとき $\vartheta(\tau;Q;h)$ は次の変換則をもつ、

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\Gamma_0(N)$ に対して,

$$\vartheta\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d};Q;h\right)=\chi_Q\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)(c\tau+d)^{\frac{m}{2}+k}\vartheta(\tau;Q;h).$$

但し, ここで χ_Q は ±1 に値をとる Q によって一意に定まる, $\Gamma_0(N)$ のある指標である. ◢

(0.3) 以下では, この結果二通りの方向に一般化することを考える.

(第一の場合) Q が正定値という条件はそのままで, elliptic modular form でなく, 一般の次数の Siegel modular forms をテータ級数で構成することを考える.

(第二の場合) elliptic modular forms を二次形式のテータ級数でつくることを考えるが, Q は不定値とする. 特に Q の符号が $(2+, q-)$ のときに重点をおいて考える.

まず第一の場合を問題にする.

まず，主定理を述べるため，調和多項式の一般化を考える．

§(1.1) 調和多項式と主定理．

Q を n 次の実対称正定値行列とする。$M_{n\times m}(\mathbb{R})$ を $n\times m$ 次の実行列全体の空間とする。いま n 次の一般線型群 $GL(n;\mathbb{R})$ の既約多項式表現 (ρ, V) が与えられているとする。但し V は表現空間．

(1.1.1) <u>定義</u>． $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ から V または V の複素化 $V_{\mathbb{C}}$ への多項式写像 $h: M_{n\times m}(\mathbb{R}) \longrightarrow V$ or $V_{\mathbb{C}}$ は次の2つの条件を満すとき次数 ρ の調和多項式と呼ぶ。

(i) (共変性) 任意 $g\in GL(n;\mathbb{R})$ に対して

$$h(g\cdot X) = \rho(g)\cdot h(X)$$

が成立する。

(ii) $X=(x_{ij})$ $(1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq m)$ に対し $\frac{\partial}{\partial X} = \left(\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right)$ と置 $n\times n$ の行列 $\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)Q^{-1}\,{}^t\!\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)$ の成分は2階の微分作用素になる。これを (Δ_{ij}) と置く．明らかに $\Delta_{ij}=\Delta_{ji}$。

このときかってな $V_{\mathbb{C}}^{*} = \mathrm{Hom}(V_{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$ の元 v^* に対して

$$\Delta_{ij} < h(X), v^* > = 0 \qquad \forall_{ij}\ (1\leq i,j\leq n)$$

が成立する． ◢

Qをさらに整数行列で，その対角成分が偶数となるものとする。このとき，$L=M_{n\times m}(\mathbb{Z})$，$L^*=M_{n\times m}(\mathbb{Z})\cdot Q^{-1}$と置く。明らかに$L^*\supset L$.

(1.1.2) <u>定義</u>. 表現ρと，それに属する調和多項式$h(X)$と，L^*の元Hとが与えられているとする。このとき

$$\vartheta_\rho(Z;Q,h;H)=\sum_{P\in M_{n\times m}(\mathbb{Z})}\exp[\pi i\,\mathrm{tr}\{(P+H)Q\,{}^t(P+H)Z\}]\cdot h(P+H)$$

で$\vartheta_\rho(Z;Q,h;H)$を定義する。但しZはn次Siegel上半空間の点。

$\vartheta_\rho(Z;Q,h;H)$はQが正定値ということより収束して，n次Siegel上半空間H_n上の正則な$V_{\mathbb{C}}$に値をとる函数を定める。▲

以下mは偶数とする．

(1.1.3) <u>定理</u>. $\Gamma(N)=\left\{\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\in Sp(n;\mathbb{Z})\;\middle|\;\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1_n&0\\0&1_n\end{pmatrix}\bmod N\right\}$と，$Sp(n;\mathbb{Z})$の部分群$\Gamma(N)$を定める。但しここでNは$NQ^{-1}$も整数行列で対角成分が偶数となるような最小の正整数。

$\gamma=\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\in\Gamma(N)$に対して，$\vartheta_\rho(Z;Q;h;H)$は次の変換則をもつ．

$$\vartheta_\rho(\gamma\cdot Z;Q;h;H)=\det(CZ+D)^{\frac{m}{2}}\rho(CZ+D)\,\vartheta_\rho(Z;Q,h;H).$$

但し$\gamma\cdot Z=(AZ+B)\cdot(CZ+D)^{-1}$! ▲

証明は次の2つの命題(Poissonの和公式，とintertwining property)を使う。

§ (1.2) Weil表現

Qを次数がmの正定値実対称行列とする。群 $Sp(n;\mathbb{R})$ の生成元 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & {}^tA^{-1} \end{pmatrix}$ $(A\in GL(n;\mathbb{R}))$, $\begin{pmatrix} 1_n & B \\ 0 & 1_n \end{pmatrix}$ $(B={}^tB\in M_n(\mathbb{R}))$, $\begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}$ に対して $L^2(M_{n\times m}(\mathbb{R}))$ 上の unitary operator $w_Q(*)$ を次のように定義する。

(1.2.1) <u>定義</u>　Schwartz-Bruhat functions $\mathcal{S}(M_{n\times m}(\mathbb{R}))$ の元 $f(X)$ に対して

$$\begin{cases} [w_Q(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & {}^tA^{-1} \end{pmatrix})f](X) = (\det A)^{\frac{m}{2}}\cdot f({}^tA\cdot X) \\ [w_Q(\begin{pmatrix} 1_n & B \\ 0 & 1_n \end{pmatrix})f](X) = \exp[\pi i\,\mathrm{tr}(XQ{}^tX\cdot B)]\cdot f(X) \\ [w_Q(\begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix})f](X) = i^{\frac{mn}{2}}\cdot(\det Q)^{\frac{n}{2}}\displaystyle\int_{M_{n\times m}(\mathbb{R})} \exp[2\pi i\,\mathrm{tr}(XQ{}^tY)]\cdot f(Y)\,dY. \end{cases}$$

と置く。但し $Y=(y_{ij})$ $(1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq m)$ とするとき $dY=\prod_{i,j} dy_{ij}$ とおいた。▲

Saito [1] の結果によって，w_Q は $Sp(n,\mathbb{R})$ に表現になることがmが偶数の場合に証明されている。これをQのWeil表現と呼ぶことにする。

Qをさらに偶整数行列とする。つまりQの対角成分は偶整数で，他は整数となる行列とする。$L=M_{n\times m}(\mathbb{Z})$, と $L^*=M_{n\times m}(\mathbb{Z})\cdot Q^{-1}$ とは $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ の lattice で $L^*\supset L$ となる。

(1.2.2) 定義. $f \in \mathcal{S}(M_{n\times m}(\mathbb{R}))$ に対して

$$\theta(f;H) = \sum_{\ell \in L} f(L+H)$$

と置く。但し H は L^* の元。 ▲

Shintani [2] の結果によって次の命題を得る。

(1.2.3). 命題 $\gamma \in \Gamma(N)$ とするとき，かってな f に対して

$$\theta(w_Q(\gamma)f;H) = \theta(f;H)$$

が成立する。 ▲

これを Poisson の和公式とよぶ。

$V_{\mathbb{C}}$ に値をとる Schwartz-Bruhat function 全体を $\mathcal{S}(M_{n\times m}(\mathbb{R}); V_{\mathbb{C}})$ と書く。明らかに $\mathcal{S}(M_{n\times m}(\mathbb{R});V_{\mathbb{C}}) = \mathcal{S}(M_{n\times m}(\mathbb{R}))\otimes V_{\mathbb{C}}$. Tensor 積によって Weil 表現 w_Q を $\mathcal{S}(M_{n\times m}(\mathbb{R}); V_{\mathbb{C}})$ 上の表現と考える。簡単な考察により次の命題を得る。

(1.2.4) 命題 (Intertwining property)

$h(X)$ を次数 ρ の調和多項とする。$Z \in H_n$ に対して

$$f(X;Z) = \exp[\pi i\, \mathrm{tr}(XQ\,{}^tXZ)]\, h(X)$$

と置く。$f \in \mathcal{S}(M_{n\times m}(\mathbb{R}); V_{\mathbb{C}})$ で f は次の性質をもつ。

任意の元 $g \in Sp(n;\mathbb{R})$ (但し $g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$) に対して,

$$[w_Q(g)f](X;Z) = \det(CX+D)^{-\frac{m}{2}}\rho(CZ+D)^{-1} f(X;(AZ+B)(CZ+D)^{-1})$$

が成立する。 ▲

命題 (1.2.3) と命題 (1.2.4) により定理 (1.1.3) が従う。

§2 第二の場合を考えよう。

(2.1) Q を $\mathbb{R}^m$ 上定義された付号 $(p+, q-)$ $(p+q=m)$ の二次形式とする。$\mathbb{Z}^m$ 上で Q は偶整数値をとると仮定する。m は簡単のため偶数とする。さらに幾何的な側面に話しを限って，$p=2$, $q=n-2$ の場合を考える。

(2.2) $SL_2(\mathbb{R})$ の Weil 表現 w_Q を次のように生成元ごとに定義する。 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) = \{\mathbb{R}^m$ 上の Schwartz Bruhat function$\}$ に対して

$$
\begin{cases}
[w_Q(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix})f](x) = a^{\frac{m}{2}} \cdot f(ax), & (a \in \mathbb{R}^\times, x \in \mathbb{R}^m), \\
[w_Q(\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix})f](x) = \exp[\pi i\, Q(x) b] \cdot f(x) & (b \in \mathbb{R}), \\
[w_Q(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix})f](x) = i^{\frac{1}{2}(2-q)} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^m} \exp[2\pi i (x,y)_Q] \cdot f(y)\, dy
\end{cases}
$$

但し $(x,y)_Q$ は Q に付随する双一次形式，i.e.

$$(x,y)_Q \underset{\mathrm{defn.}}{=} \frac{1}{2} Q(x+y) - \frac{1}{2} Q(x) - \frac{1}{2} Q(y).$$

[1] の結果によって，m が偶数であるから w_Q は $SL_2(\mathbb{R})$ の表現となる。

(2.3) $\mathbb{C}^m$ の部分集合 $\tilde{\mathcal{D}}$ を次のように定める。

$$\tilde{\mathcal{D}} = \{\xi = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{m-1}) \in \mathbb{C}^m \mid Q(\xi) = 0 \quad (\xi, \bar{\xi})_Q > 0\}.$$

明らかに、$\tilde{\mathcal{D}} \neq \emptyset$。また $\xi \in \tilde{\mathcal{D}}$ ならば $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ とするとき、$\lambda\xi \in \tilde{\mathcal{D}}$。

$\pi : \mathbb{C}^m - \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{m-1}$ を射影空間 $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{m-1}$ への自然な写像とする。π の $\tilde{\mathcal{D}}$ への制限は $\tilde{\mathcal{D}} \longrightarrow \pi(\tilde{\mathcal{D}})$ なる $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{1}$-bundle を与える。$\pi(\tilde{\mathcal{D}})$ を $\mathcal{D}$ と書く。$\mathcal{D}$ は BD-type の対称空間になる。

(2.4) $\mathcal{D}$ の点は Q の Hermite の minimal majorant R と次のように対応する。まず $\mathcal{D}$ は2つの連結成分からなる。それを、$\mathcal{D}_+, \mathcal{D}_-$ と書く。$\mathcal{D} = \mathcal{D}_+ \cup \mathcal{D}_-$ で $\overline{\mathcal{D}_+} = \mathcal{D}_-$ である。

いま R に対応する双一次形式を $(\ ,\ )_R$ と書く。$\mathbb{C}^m$ の元 ξ ですべての $\eta \in \mathbb{C}^m$ に対して $(\xi, \eta)_Q = (\xi, \eta)_R$ となる ξ は $\mathbb{C}^m$ の2次元の部分空間を定める。したがって、これは $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{m-1}$ の直線を定る。Bezout の定理によってこの直線と $Q(\xi) = 0$ で定まる $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{m-1}$ の2次超曲面とは2点で交わる。簡単な計算によってこの2点は各々1点ずつ $\mathcal{D}_+$ と $\mathcal{D}_-$ とに属することがわかる。

この点を $\xi_+(R), \xi_-(R)$ と書く。逆の対応もできて、ξ_+ or ξ_- から定まる R を $R(\xi_+)$ または $R(\xi_-)$ と書く。

(2.5) Q とその minimal majorant R を固定する。$z = u + iv$ を上半平面の点とする ($v > 0$)。$\tilde{\xi} \in \tilde{\mathcal{D}}$ を $R = R(\pi(\tilde{\xi}))$ となるように

をってくる。　このとき

$$f_k(x;z;Q,R) = v^{\frac{q}{2}}(\tilde{\xi}, x)_Q^k \exp[\pi i\{Q(x)u + iR(x)v\}]$$

とおく。　すると $f_k(x;z;Q;R)$ は次の intertwining property をもつ。

(2.5.1)　$g \in SL_2(\mathbb{R})$　$\left(g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)$ に対して

$$[w_Q(g) f_k](x;z;Q;k) = \det(cz+d)^{\left(\frac{2-q}{2}+k\right)} f_k\left(x; \frac{az+b}{cz+d}; Q; R\right).$$

(2.6)　R も $\tilde{\xi}$ によって決まるから $R = R_{\tilde{\xi}}$ と書く。このとき

(2.6.1) 定義　　$z = u+iv$ $(v>0)$ とする。

$$\theta_k(z;\tilde{\xi};Q) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^m} v^{\frac{q}{2}} (\tilde{\xi}, l)_Q^k \exp[\pi i\{Q(l)u + iR_{\xi}(l)v\}].$$

で $\theta_k(z;\tilde{\xi};Q)$ を定義する。

(2.6.2) 定理　　$\theta_k(z;\tilde{\xi};Q)$ は次の変換則をもつ。

$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$, $c \equiv 0 \bmod N$ に対して

$$\theta_k\left(\frac{az+b}{cz+d};\tilde{\xi};Q\right) = (\mathrm{sgn}\, a)^{\frac{2-q}{2}} \cdot \left(\frac{(-1)^{\frac{2-q}{2}} \operatorname{dis} Q}{|a|}\right)(cz+d)^{\left(k+\frac{2-q}{2}\right)} \cdot \theta_k(z;\tilde{\xi};Q)$$

但し $\operatorname{dis} Q$ は Q の discriminant.

(2.6.3) 注意　　$\theta_k(z;\tilde{\xi};Q)$ は z については weight $k + \frac{2-q}{2}$ の、$\Gamma_0(N)$ に属し character χ_Q (χ_Q は上でうえた character) の保型形式のようにふるまうが、z について正則でない。

(2.7) 主定理を述べる。 [3] の結果を改良する。

(2.7.1) いま $\Delta_Q = (-1)^{\frac{2-g}{2}} \det Q$ とおく（仮定より，g は even だから $\det Q > 0$）。群 $\Gamma_0(N)$ の character χ_Q を

$$\chi_Q\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (\operatorname{sgn} a)^{\frac{2-g}{2}} \left(\frac{\Delta_Q}{|a|}\right)$$

と定める。但しここで $\left(\frac{*}{*}\right)$ は平方剰余記号。

(2.7.2)（第1主定理） $f(z)$ を $\Gamma_0(N)$ に属する，weight $k+\frac{2-g}{2}$，multiplicator χ_Q の正則な elliptic modular cusp form とする。このとき $k \geqq g$ のとき積分

$$\Phi_f(\xi) = \int_{\Gamma_0(N)\backslash H} \overline{\theta_k(z;\xi;Q)} \cdot f(z) \cdot y^{k+\frac{2-g}{2}} \cdot \frac{dx\,dy}{y^2}$$

は条件収束して，$\Phi_f(\xi)$ は $\mathfrak{X}$ 上の正則函数で次の条件をみたす。

(i) $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ に対して $\Phi_f(\lambda\cdot\xi) = \lambda^{-k}\Phi_f(\xi)$.

(ii) γ を $\mathbb{R}^m$ の一次変換で $\mathbb{Z}^m$ を $\mathbb{Z}^m$ に1対1にうつし，さらに2次形式 Q を不変に保つとする（i.e. γ は Q の単数）。このとき

$$\Phi_f(\gamma\cdot\xi) = \Phi_f(\xi).$$

(2.7.3) 定義　一般に $\mathfrak{D}$ 上の正則函数で上の (i), (ii) の条件をみたすものを G の単数群 Γ_Q に属する, weight k の正則保型形式という.

(2.8)　定理 (2.7.2) の解釈

$k=q$ とせよ。すると weight $\frac{q}{2}+1$ の elliptic cusp form f に, weight q の $\mathfrak{D}$ 上の holomorphic modular form Φ_f が対応する.

Deligne によって f には weight $\frac{q}{2}$ の l-adic representation と type $\{(\frac{q}{2},0),(0,\frac{q}{2})\}$ の Hodge structure が付随する. f は Hecke operators の eigen form で New form とすると, これらは rank 2 になる.

さて今 f は Hecke operators の eigen form のとき Φ_f もそうであると仮定する. Φ_f にも l-adic representation と Hodge structure を attach できる. f に attach した l-adic representation を $V_l(f)$, Hodge structure を $H(f)$ と書き, Φ_f の対応するものも同様に書く

(2.8.1)　予想（定理(2.7.2)の解釈）

$$V_l(f)\otimes V_l(f) \hookrightarrow V_l(\Phi_f),$$
$$H(f)\otimes H(f) \hookrightarrow H(\Phi_f).$$

(2.8.2) 注意　$q=2$ のときは evidence がある. $q=$ odd の場合も同様の予想を定式化するのはむずかしくない.

Reference.

1. Saito, M.: Représentations unitaires des groupes symplectiques. J. Math. Soc. of Japan 24, 232–251 (1972)

2. Shintani, T.: On construction of holomorphic cusp forms of half integral weight. Nagoya. Math. J. Vol.58, 83–126, (1975)

3. Oda, T.: On modular forms associated with indefinite quadratic forms of signature (2, n−2). Math. Ann. 231, 97–144 (1977)

4. Hecke, E.: Analytische Arithmetik der Positiven Quadratischen Formen. Hecke 全集, 最後から二番目の論文.

5. Schoeneberg, B.: Das Verhalten von mehrfachen Thetareihen bei Modulsubstitutionen. Math. Ann. 116, 511–523 (1939)