数理解析研究所講究録
第 392 巻 1980 年 32-37

アーベル多様体の部分及び被覆多様体の構造

東大 理　　倉本義之

以下すべて複素数体$\mathbb{C}$上で考える。

ここでは次の定理を証明する。

<u>定理</u>　Xを完備正規代数多様体，Aをアーベル多様体，$f: X \to A$ を有限正則写像とすると，$\kappa(X) \geq 0$であり，Aの部分アーベル多様体B，不分岐被覆 $\tilde{B} \to B$，$\tilde{X} \to X$，完備正規代数多様体$\tilde{Y}$で次をみたすものが存在する。

1) $\tilde{Y}$は A/B の上に有限である。

2) $\tilde{X} \cong \tilde{B} \times \tilde{Y}$

3) $\kappa(X) = \dim \tilde{Y} = \kappa(\tilde{Y})$

<u>証明</u>　fは有限正則写像だから，$\kappa(X) \geq \kappa(f(X))$ であり，一方$f(X)$はアーベル多様体の部分多様体だから$\kappa(f(X)) \geq 0$。よって$\kappa(X) \geq 0$ である。

$\Phi: X^* \to Y^*$ をXの飯高 fibering とする。即ち，Φは全射正則写像でその一般ファイバーは既約非特異であり，固有

双有理正則写像 $\pi: X^* \to X$ が存在し，$\dim Y^* = \kappa(X)$ であり，Y^*の部分集合Uで次をみたすものが存在する。

1) Uは空集合でなく，Y^*の可算個の Zariski 閉部分集合 V_k $(k=1,2,\cdots\cdots)$ があって，$U = Y^* \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k$ となっている。

2) $y \in U$ ならば，$\kappa(\Phi^{-1}(y)) = 0$ が成り立つ。

以下 $\Phi^{-1}(y) = X_y^*$ とかく。$B_y = f(\pi(X_y^*))$ とおくと，$B_y \subset A$ であるから，$\kappa(B_y) \geqq 0$ である。一方 $y \in U$ に対して X_y^*とB_yは次元が等しいから $\kappa(X_y^*) \geqq \kappa(B_y)$ となり，$\kappa(B_y) = 0$ である。即ちB_yはAの部分アーベル多様体の translationである。ここで次の定理B_nを仮定する。（証明は次の章にある。）

<u>定理B_n</u>　Xを完備正規代数多様体，Aをアーベル多様体，$f: X \to A$ を有限全射正則写像，$\kappa(X) = 0$ とすると，fは不分岐である。

さて，$\kappa(X) = 0$とすれば証明すべきことは定理B_nから直ちに得られる。よって $\kappa(X) > 0$ とする。

<u>主張</u>　Aの部分アーベル多様体BとY^*の Zariski dense な部分集合U'で，$y \in U'$に対しB_yはBに平行となるものが存在する。

∵　$\{A$の部分アーベル多様体$\} = \{B_k \mid k = 1,2,\cdots\}$ と

おく。$U_k=\{y\in U \mid B_y$ は B_k に平行$\}$ とおく。$\bigcup_{k=1}^{\infty} U_k=U$ となる。すべての k に対して，$U_k\subset V_k'$ なる Y^* の Zariski 開部分集合 V_k' $(\subsetneqq Y^*)$ が存在するとすると，
$Y^*=U\cup(\bigcup_{k=1}^{\infty} V_k)=(\bigcup_{k=1}^{\infty} V_k')\cup(\bigcup_{k=1}^{\infty} V_k)$ となり，Y^* が可算個の Zariski 開真部分集合の和となって矛盾する。よって，ある U_{k_0} は Zariski dense である。

補題　X，Y，Z を正規代数多様体とし，$f: X\to Y$，$g: X\to Z$ を正則写像とする。Y のある Zariski dense な部分集合 U があって，$y\in U$ に対し $g(f^{-1}(y))$ は 1 点であるとする。すると有理写像 $h: Y \dashrightarrow Z$ で，$h\circ f$ と g が有理写像として等しいものが存在する。

証明　$\Delta_X: X\to X\times X$ を対角写像とし，$(f\times g)\circ\Delta_X(X)=G\ (\subset Y\times Z)$ とおく。$Y\times Z$ から Y，Z への射影の G への制限をそれぞれ P_Y，P_Z とかく。仮定により，$y\in U$ ならば $P_Y^{-1}(y)$ は 1 点である。Y のある Zariski 開集合 U' 上で $\dim P_Y^{-1}(y)$ は一定であるが，$U\cap U'\neq\phi$ であるから $y\in U'$ に対して $P_Y^{-1}(y)$ は有限集合である。$U\cap U'\ni y_0$ をとると，$\#\{P_Y^{-1}(y_0)\}=1$ であり，U' 上で $\#\{P_Y^{-1}(y)\}$ は上半連続であるから y_0 を含むある Zariski 開集合の上で $\#\{P_Y^{-1}(y)\}=1$ となる。よって P_Y は双有理となり，$h=P_Z\circ P_Y^{-1}$ とおけばよい。（補題の証明終り。）

さて，写像 $\Phi: X^* \to Y$ と $X^* \to A \to A/B$ に補題を用いて，有理写像 $g^*: Y^* \dashrightarrow A/B$ で次の図式を可換にするものの存在がわかる。

$$\begin{tikzcd}
X^* \arrow[r] \arrow[d, "\Phi"'] & A \arrow[r] & A/B \\
Y^* \arrow[urr, dashed, "g^*"'] & &
\end{tikzcd}$$

A/B はアーベル多様体だから，g^* は正則写像になる。

$X_0 = f(X) \subset A$，$Y_0 = g^*(Y^*) \subset A/B$ とおく。$\dim Y^* = \dim Y_0$ となっている。Y_0 の $\mathbb{C}(Y^*)$ 内での正規化を Y，$g: Y \to Y_0$ を projection とする。$\Phi: X^* \to Y^*$ は有理写像 $\psi: X \dashrightarrow Y$ を定める。

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[r] \arrow[dr, dashed, "\psi"] & A \arrow[r] & A/B \arrow[d, phantom, "\cup"] \\
X^* \arrow[ur, "\pi"] \arrow[dr, "\Phi"'] & & & Y_0 \\
 & Y^* \arrow[r] \arrow[urr, "g^*"] & Y \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

<u>主張</u>　$\psi: X \to Y$ は正則写像である。

∵　X は正規だから，$P \in X$ に対し $\psi(P)$ が1点であることを云えばよい。Enriques の連結性原理により $\pi^{-1}(P)$ は連結したがって $\psi(P)$ は連結である。一方，$\psi(P) \ni x, y$ に対し $g(x)=g(y)$ で g は有限正則写像だから $\psi(P)$ は有限集合である。よって $\psi(P)$ は1点である。

Poincare の定理により，不分岐被覆 $C \to A/B$ があって $A \times_{A/B} C \cong B \times C$ となる。よって不分岐被覆をとること

により$X_0 \cong B\times Y_0$となっているとしてよい。

主張　YのZariski開集合Uで，Uは非特異，ψはU上でsmooth，$y\in U$に対して$\psi^{-1}(y)\longrightarrow B$は不分岐となるものが存在する。

∵　$Y^*\longrightarrow Y$は双有理であるから，前にとったY^*のZariski dense な部分集合U'を適当に制限して，YのZariski dense な部分集合U_1で，$y\in U_1$に対し$\kappa(\psi^{-1}(y))=0$でB_yはBに平行となるものを得る。$\psi^{-1}(y)\longrightarrow B_y\cong B$は有限正則写像であるから，定理$B_n$により$\psi^{-1}(y)\longrightarrow B$は不分岐となる。$f: X\to X_0$と射影$X_0\cong B\times Y_0\longrightarrow B$の合成写像を$h: X\to B$とする。$h$の

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "\psi"'] \arrow[drr, "h"] & X_0\cong B\times Y_0 \arrow[dr] & \\ Y\supset U_1 & & B \end{tikzcd}$$

ramification locus を$R(h)$とすれば，$R(h)$はψについてhorizontalでない。もしhorizontalならば，ある$y\in U_1$に対して$\psi^{-1}(y)\cap R(h)\neq\phi$となり$\psi^{-1}(y)\to B$が不分岐であることに反するからである。よって，あるZariski開集合$U\subset Y$があって，$\psi^{-1}(U)\cap R(h)=\phi$となる。必要なら$U$をさらに縮めて，$U$は非特異で$\psi$が$U$上でsmoothになるようにできる。（主張の証明終り。）

さて，任意の$y\in U$に対して$\psi^{-1}(y)$がBの不分岐被覆となったから，$\psi^{-1}(y)$　$(y\in U)$はすべて同型となる。即ち不分岐被覆$\hat{B}\longrightarrow B$があって，$\psi^{-1}(y)\cong B$となる。

Bは$X_0 \cong B \times Y_0$に作用している。bをBの原点の近傍の点とし，$\tilde{B} \to B$ でbにうつる点$\tilde{b}$を$\tilde{B}$の原点の近傍からとる。次の図式が可換になるように$\tilde{b}$は$\psi^{-1}(U)$に作用する。

$$\begin{tikzcd}
\psi^{-1}(U) \arrow[r, "\tilde{b}"'] & \psi^{-1}(U) \\
X \arrow[u, phantom, "\subset" sloped] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[u, phantom, "\subset" sloped] \arrow[d, "f"'] \\
X_0 \arrow[r, "b"] & X_0
\end{tikzcd}$$

したがって，$\tilde{b}$は双有理写像 $\varphi_{\tilde{b}} : X \dashrightarrow X$ を定める。Xは正規であるから，$X \ni P$ に対し像 $\varphi_{\tilde{b}}(P)$ は連結であり，$f \circ \varphi_{\tilde{b}}(P)$が1点であって$f$が有限正則写像だから $\varphi_{\tilde{b}}(P)$は有限集合である。よって$\varphi_{\tilde{b}}(P)$は1点となり，$\varphi_{\tilde{b}} : X \to X$ は双有理正則写像となり結局Xの自己同型を与えることになる。かくて$\tilde{B}$がXに作用することがわかった。

$\tilde{B} \to B$ の kernel をGとおくと，Gは$f^{-1}(\{0\} \times Y_0)$に作用している。$\tilde{Y}$を$f^{-1}(\{0\} \times Y_0)$の正規化とし，$\tilde{X} = \tilde{B} \times \tilde{Y}$ とおく。Gの$\tilde{X}$への作用を $g \in G$，$(\tilde{b}, y) \in \tilde{B} \times \tilde{Y} = \tilde{X}$ に対して，$(\tilde{b}, y)^g = (\tilde{b} - g, y^g)$ によって定めると，$\tilde{X}/G \cong X$ となる。Gの$\tilde{X}$への作用は固定点をもたないから，$\tilde{X} \to X$ は不分岐被覆となる。

また，$\kappa(X) = \kappa(\tilde{X}) = \kappa(\tilde{Y}) = \dim \tilde{Y}$ が成り立つ。

Q. E. D.