数理解析研究所講究録
第 392 巻 1980 年 53-57

加法定理（予想 C_n）

東大 理　角田秀一郎

加法定理．$f: X \to Y$ を代数的ファイバー空間．$\kappa(X) \geq 0$，$\kappa(Y) = \dim Y$ ならば，$\kappa(X) = \kappa(F) + \kappa(Y)$。ここで F は f の"一般"ファイバー $f^{-1}(y)$．

証明．まず $P_g(X) \neq 0$ の場合に帰着させる。m を $P_m(X) \neq 0$ なる正整数とする。$\mathcal{U} = \{U_i\}$ を X のアフィン開被覆，φ_{ij} を K_X の $\mathcal{U}$ に関する変換関数とする。f_i を mK_X の非零切断に対応する U_i 上の関数で．$f_i = \varphi_{ij}^m f_j$ をみたすものとする。$U_i' = \{(x, t) \in U_i \times \mathbb{C} \mid t^m = f_i(x)\}$ とおけば，U_i' たちは，代数多様体 K_X の代数的集合 X' をつくる．X^* を X' の既約成分の非特異化，$\pi: X^* \to X$ を射影とすれば，X^* の構成法から，$H^0(X^*, \pi^* K_X) \neq 0$，$R_\pi$ を π の分岐因子とすれば，$N \gg 0$ に対して，$0 \leq R_\pi \leq N\pi^* K_X$．したがって，$\kappa(X^*) = \kappa(X)$。一方，$X^* \xrightarrow{f_1} Y^* \to Y$ を $f \circ \pi$ のスタイン分解とすれば，$\kappa(Y^*) \geq \kappa(Y)$，$\kappa(F^*) \geq \kappa(F)$，$F^*$ は f_1 の一般ファイバー。

よって、$X^* \to Y^*$ について加法定理を示せばよいので、はじめから、$P_g(X) \neq 0$ としてよい。

F を f の一般ファイバーとすれば、$P_g(X) \neq 0$ より $P_g(F) \neq 0$。

$f: X \to Y$ はモデルをとりかえることにより、中単化定理の系の仮定をみたすとしてよい。そこで、次の可換図式をとる。

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle p}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle g} \\ X_1 = X \times_Y \hat{Y} & \xrightarrow{f_1} & \hat{Y} \\ {\scriptstyle \mu}\nearrow & \nearrow{\scriptstyle \tilde{f}} & \\ \hat{X} & & \end{array}$$

以下 F, D, $\hat{D}$ その他も中単化定理の系と同様とする。

主補題によれば、$\hat{f}_* K_{\hat{X}/\hat{Y}}$ は局所自由かつ半正値な層で、$P_g(F) \neq 0$ より非零がわかる。

補題[1]. L を非常に豊富な $\hat{Y}$ 上の因子とする。このとき、正整数 m が存在し、$H^0(\hat{Y}, m g^* K_Y - L) \neq 0$

$P = \mathbb{P}(\hat{f}_* K_{\hat{X}/\hat{Y}})$ とおき、$\pi: P \to \hat{Y}$ を射影とする。を P の基本因子とすると、H は半正値 すなわち C を P 上の曲線とすれば、$(H.C) \geq 0$。

$\nu: C^* \to C$ を非特異化とする。π は $\varphi: C^* \to \hat{Y}$, $\varphi^* \hat{f}_* K_{\hat{X}/\hat{Y}}$ の商可逆層を誘導するが、それは $\nu^* H$ に他ならない。したがって、$(H.C) = \deg_{C^*} \nu^* H \geq 0$。

次の定理を使って、$mH + \pi^* L$ は豊富を示す。

定理(セシャドリの判定法)[2].

Sを完備代数多様体，DをS上のCartier因子．このとき，Dが豊富である必要十分条件は，正数εが存在して．S上の任意の曲線に対し，$(D, C) \geqq \varepsilon(m(C))$。ここで$m(C) = \max_{P \in C} m_P(C)$.，とおいた。

Lは豊富なので，正数ε_1が存在して，Y上の曲線Cに対し$(L, C) \geqq \varepsilon_1(m(C)$．$\pi$のファイバーは，射影空間で，$H$をファイバーに制限すると，超平面になる．したがって，

πのファイバーにふくまれる曲線Cに対し，$(H, C) \geqq m(C)$。

CをP上の曲線とする。Cがπのファイバーにふくまれれば，

$(mH + \pi^*L, C) = m(H, C) \geqq m \quad m(C) \geqq \quad m(C)$。

$\pi(C) = C_0$が曲線であれば，$(mH + \pi^*L, C) \geqq (\pi^*L, C)$

$= [C : C_0](L, C_0) \geqq [C : C_0]\varepsilon_1 m(C_0) \geqq \varepsilon_1 m(C)$

ここで$[C : C_0]$は$\pi : C \to C_0$の写像度を表わす。

よって，セシャドリの判定法により，$mH + \pi^*L$は豊富．

gは平坦であるから，平坦基底変換定理により，$K_{X_1/Y} = p^*K_{X/Y}$.

したがって，$K_{X_1} = p^*K_{X/Y} \otimes f_1^*K_Y$となり，$X_1$はゴレンスタインに．次の命題によれば，$\mathrm{Hom}(\mu_*K_{\tilde{X}}, K_{X_1}) \neq 0$がわかる。

命題[3]．$f : M \to V$を全射正則写像とする。ここにM, Vは次元の等しい，局所マコーレー完備代数多様体．

そのとき，$\mathrm{Hom}(f_*\omega_M, \omega_V) \neq 0$。ここに$\omega_M$と$\omega_V$はdualizing sheaf.

次の準同型がつくれる.

$$\mathrm{Sym}\,\hat{Y}\ \hat{f}_* K_{\hat{X}/\hat{Y}} \longrightarrow \mathrm{Sym}\,\hat{Y}\ f_{1*} K_{X_1/\hat{Y}} \to \sum_{n\geq 0} f_{1*}(nK_{X_1/\hat{Y}})$$

上の準同型は, Pの部分スキームRを定め, $\pi: R\to\hat{Y}$を誘導する. $\dim\hat{Y}=0$なら主張は自明. $\dim\hat{Y}>0$とし, $y_1, y_2 \in\hat{Y}$を異なる点, r_1, r_2をRの点でそれぞれy_1, y_2におちるとする. $mH+\pi^*L$は豊富であるから正整数nと$n(mH+\pi^*L)$の切断S_1, S_2が存在し, $S_1|_{\pi^{-1}(y_1)}=0$, $S_1(r_2)\neq 0$, $S_2|_{\pi^{-1}(y_2)}=0$, $S_2(r_1)\neq 0$. $H^0(P, n(mH+\pi^*L)) = H^0(\hat{Y}, \mathrm{Sym}^{nm}\hat{f}_* K_{\hat{X}/\hat{Y}}\otimes nL)\to H^0(\hat{Y}, f_{1*}(nmK_{X_1/\hat{Y}})\otimes nL)$により, S_1, S_2は$H^0(\hat{Y}, f_{1*}(nmK_{X_1/\hat{Y}})\otimes nL)$の切断$\omega_1$ ω_2を誘導する. S_1, S_2の性質から, $\omega_1(y_1)=0$, $\omega_1(y_2)\neq 0$ $\omega_2(y_2)=0$, $\omega_2(y_1)\neq 0$. したがって, $h^0(\hat{Y}, f_{1*}(nmK_{X_1/\hat{Y}})\otimes nL)\geq 2$. よって, $\kappa(nmK_{X_1/\hat{Y}}\otimes nf_1^*L, X_1)>0$

$$\Rightarrow \kappa(nmK_{X_1/\hat{Y}}\otimes mf_1^*g^*K_Y, X_1)>0$$

$$\Rightarrow \kappa(p^*K_X, X_1)>0 \Rightarrow \kappa(X)>0.$$

$\Phi: X\to Z$を飯高ファイバリング, Gを$(f,\Phi): X\to Y\times Z$の像とする. Zの一般超平面切断の共通部分Z'をとって, $Y^*=G\times_Z Z'$がY上支配的かつ, 次元が等しくできる. $\dim Y^*\geq\kappa(Y^*)\geq\kappa(Y) = \dim Y=\dim Y^*$より$\kappa(Y^*)=\dim Y^*$が従う. $Y^*\to Z'$の一般ファイバーは$f(\Phi^{-1}(z))$ $(z\in Z')$. $Y^*\to Z'$に基本不等式を使う $\kappa(Y^*)\leq\kappa(f\Phi^{-1}(z))+\dim Z'$より $\kappa(f\Phi^{-1}(z))=\dim f\Phi^{-1}(z)$

$\Phi^{-1}(z) \longrightarrow f(\Phi^{-1}(z))$を考えると，$\dim f\Phi^{-1}(z) > 0$であれば，上に証明したことにより，$\kappa(\Phi^{-1}(z)) > 0$でなければならず，$\kappa(\Phi^{-1}(z)) = 0$に矛盾，したがって，$\dim f\Phi^{-1}(z) = 0$．よって，有理写像$g : Z \to Y$が存在して，$f = g \cdot \Phi$。モデルをとりかえて，$g$は正則写像としてよい．$y \in Y$を一般点とし$f^{-1}(y) \longrightarrow g^{-1}(y)$に基本不等式（弱加法性）をつかって．$\kappa(f^{-1}(y)) \leq \kappa(\Phi\text{の fibers}) + \dim g^{-1}(y)$。$\dim g^{-1}(y) = \dim Z - \dim Y = \kappa(X) - \kappa(Y)$ よって．$\kappa(F) \leq \kappa(X) + \kappa(Y)$

一方基本不等式から，$\kappa(X) \leq \kappa(F) + \kappa(Y)$．

したがって　$\kappa(X) = \kappa(F) + \kappa(Y)$　Q. E. D.

文　献

[1] K. Kodaira: Holomorphic mappings of polydiscs into compact complex manifolds, J. Diff. Geo., 6 (1971), 33-46

[2] R. Hartshorne: Ample Subvarieties of Algebraic Varieties; Springer Lecture Notes in Math. 156. P37.

[3] T. Fujita: On Kähler fiber spaces over curves, J. Math. Soc. Japan. Vol 30, No 4, 1978 779-794