数理解析研究所講究録
第 394 巻 1980 年 138-149

Lobachevsky 空間の discrete group について
—Vinbergの一連の論文の紹介(III)—

東大　数学科　　村上　順

§1　目標

植野，山口両氏により紹介された結果をもとに，§2ではいくつかの条件を満たす離散鏡映群を具体的に求めよう。そして§4ではLobachevskii空間Λ^nに作用する離散群の様子を知るために有効な方法を示そう。そのために§3で，I, IIで述べられた定理等を，応用しやすい形に述べ直そう。さらに§5では§4の結果を用いて，$\mathbb{R}^{n+1}$上の符号$(n,1)$の二次形式に関するunit elementsの生成する群の様子を調べてみよう。但し，Λ^nに作用する群は，Λ^nの運動群の部分群になっているものとする。

なお，以下に述べる内容は主にVinberg[8]による。

§2　ある条件の下での離散鏡映群の分類

ここでは，S^n, E^nに作用する離散鏡映群を分類し、さらに

Λ^nに作用する離散鏡映群で，基本領域が有界な単体となるものを分類するが，その前にいくつかの準備をする。

1 Gram 行列

S^n, E^n, Λ^nを に述べられているようにしてE^{n+1}に埋め込まれていると考えると，S^n, E^n, Λ^nに作用する離散鏡映群は自然にE^{n+1}に作用する直交Coxeter群となる。

Γの基本領域Kに対し，Kの境界を成す超平面の族を$\{\Pi_i\}_{i\in I}$とする。Π_iを鏡映面とする鏡映R_iをとると，$\{R_i\}_{i\in I}$はΓを生成する。そこでΠ_iの単位法線ベクトルでKの外へ向うものをe_iとする。このとき，$A=\left((e_i,e_j)\right)_{i,j\in I}$を$\Gamma$のGram行列と呼ぶ。ここで，$i$と$j$が異なり，$R_iR_j$の位数が有限のとき，それを$n_{ij}$と書くと，$(e_i,e_j)=-\cos\frac{\pi}{n_{ij}}$が成り立つ。

2 Coxeterグラフ

1で定めたGram行列はKの性質を良く表わしているが，見易くはない。そこで，Gram行列を一種の無向グラフを定める行列と考え，グラフの形に直すと見易くなる。このときできたグラフをCoxeterグラフと言い，次の様に作る。

Coxeterグラフの作り方

頂点はΓの基本領域Kの境界を成す超平面$\Pi_i, i\in I$を表わすものとし，頂点の集合とIとを同一視する。そして$\{e_i\}$を1で決めたようにとり，頂点iと頂点jを結ぶ辺を次の様に定め

る。

$-1 < (e_i, e_j) \leqq 0$ のとき  ($n_{ij}-2$本の実線)

又は 

但し n_{ij} は $(e_i, e_j) = -\cos\dfrac{\pi}{n_{ij}}$ となる正の整数

$(e_i, e_j) = -1$ のとき  (太線)

$(e_i, e_j) < -1$ のとき  (破線)

ここで破線の上に (e_i, e_j) の値を書くこともある。

3　Gram 行列とCoxeterグラフの関係

2により、Gram行列からCoxeterグラフを作る方法がわかった。さらに離散鏡映群 Γ の基本領域 K の境界を成す超平面の族 $\{\Pi_i\}_{i\in I}$ に対し，I の部分集合 S を考える。K のGram行列を $A=(a_{ij})_{i,j\in I}$ とすると，A の S についての主部分行列 $A_S=(a_{ij})_{i,j\in S}$ の定めるCoxeterグラフは，A の定めるCoxeterグラフ Σ の頂点が S に含まれ，両端点とも S に入るような辺から成る部分グラフ Σ_S と一致する。

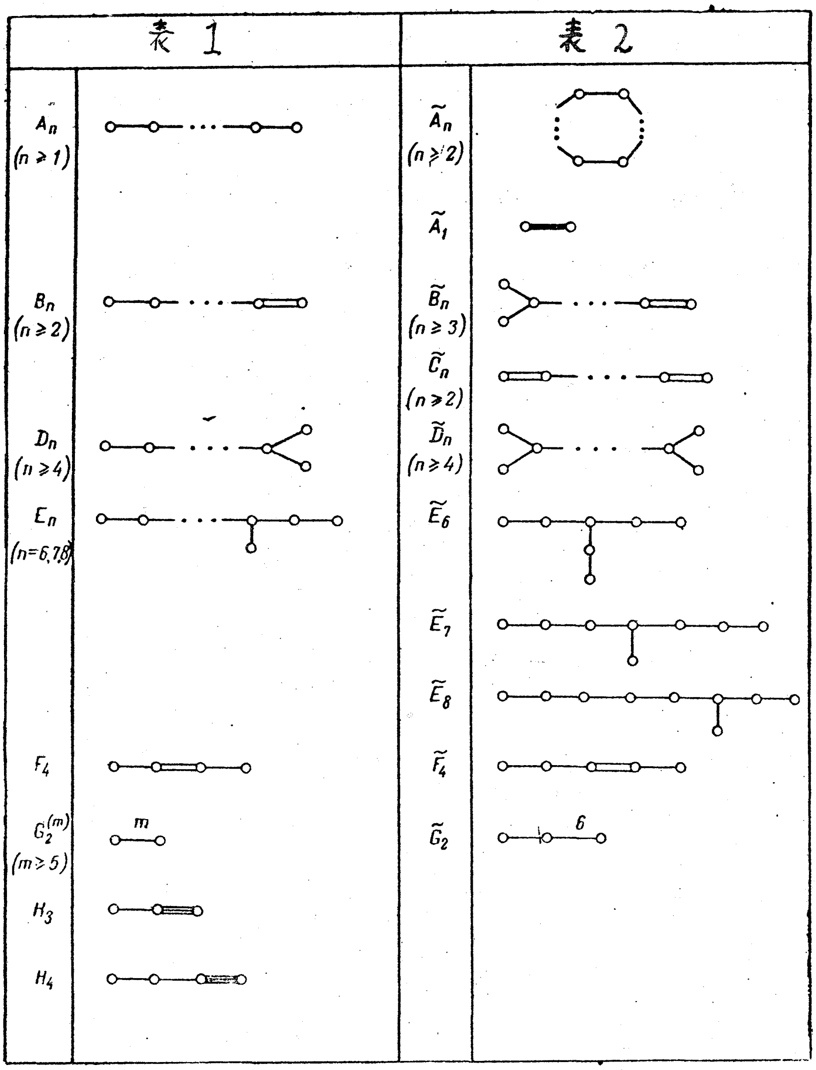
また，A が分解不能であることと A のCoxeterグラフ Σ が連結であることは同値である。

4　S^n に作用する離散鏡映群の分類

S^n に作用する離散鏡映群の特徴付けはⅡの命題3により得られる。これはCoxeter[1]により分類されていて，そのCoxeterグラフは表1のようになる。

5 E^n に作用する離散鏡映群の分類

E^n に作用する離散鏡映群の特徴付けはⅡの命題4により得られる。これもCoxeter[1]により分類されていて、そのCoxeterグラフは表2のようになる。

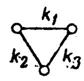
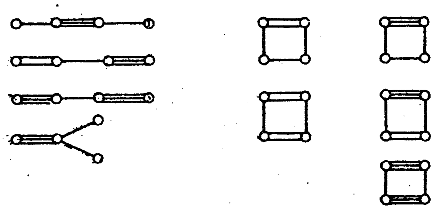
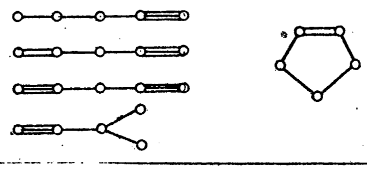


6 Λ^n に作用する基本領域が単体となる離散鏡映群の分類

単体とは、共通点を持たない $n+1$ 個の超平面 $\pi_i,\ i=1,\cdots,n+1$ を境界とする Λ^n の有界な図形のことである。

S_i を $\{1,2,\cdots,n+1\}$ から i を除いた集合とするとき，S_i に対応する面分 K_{S_i} は Λ^n 中で空でないので、Ⅰの定理2により、単体の Gram 行列 A の S_i に対応する主部分行列 A_{S_i} は楕円型である。従って A に対応する Coxeter グラフ Σ に対しては，A が群の作用によって定まるものならば，任意の i について，Σ_{S_i} の任意の連結成分が表1のどれかでなければならない。また，こうなるものを基本領域とする群は存在する。このようなものは Lanner [2] により分類されていて表3のようになる。

表3

$n=2$	 $\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_3}<1$
$n=3$	
$n=4$	

§3　Ⅰ,Ⅱより導かれる有用な定理

1.　定義と記号

K を Λ^n 中の凸多面体で，2面の成す角が $\frac{\pi}{2}$ 以下となっているものとする。K の境界を成す超平面 Π_i $(i\in I)$ に対し，原点と Π_i を通る R^{n+1} の超平面を $\mathrm{cn}\,\Pi_i$ とする。$\mathrm{cn}\,K$ を，R^{n+1} 中の $\mathrm{cn}\,\Pi_i$ で区切られる K を含む方の閉半空間とする。$\mathrm{cn}\,K=\bigcap_{i\in I}\mathrm{cn}\,\Pi_i$ とおく。

以下 $\mathrm{cn}\,K$ が真に凸となるような K のみを考えることにする。このときある超平面 H があって、$\mathrm{cn}\,K \cap H$ は閉じた多面体となる。そして $\mathrm{cn}\,K \cap H$ には自然に複体構造が入る。これを $\mathfrak{F}''K$ と置く。II で考えた K の複体 $\mathfrak{F}K$ は自然に $\mathfrak{F}''K$ の部分複体と考えられる。また，$\mathfrak{F}''K$ の頂点のうち，Δ の無限遠点に対応する頂点を $\mathfrak{F}K$ に付け加えたものも複体となる。これを $\mathfrak{F}'K$ とする。II で考えた写像 $\sigma : \mathfrak{F}K \to I$ は自然に $\mathfrak{F}''K$ に拡張される。$fK = \sigma(\mathfrak{F}K)$，$f'K = \sigma(\mathfrak{F}'K)$，$f''K = \sigma(\mathfrak{F}''K)$ とおく。

2 定理

<u>定理1</u> K を Δ^n 中の二面の成す角が零以下の多面体とする。これに対応する Gram 行列を $A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ とする。S を I の部分集合とする。このとき

1) S が fK に含まれることと、$A_S = A_S^+$ となることは同値である。

2) S が $f'K \setminus fK$ に含まれることと，$A_S = A_S^0$ となって A_S のランクが $n-1$ となることは同値である。

さらに，G_S が正定値ならば，K の S に対応する面分 K_S の次元は $n - \#(G)$ である。

右肩についた $+, 0$ の意味は I. §2 のとおりである。

3 臨界行列

<u>定義</u> 対称行列で I の (C1) を満たすもので，正定値ではないが，その任意の，真の主部分行列が正定値となるも

のを臨界行列と言う。

命題1 KをΛ^n中の多面体とするとき、Kの体積が有限となることと次は同値である。

KのGram行列Aについて，$\overset{(a_{ij})_{i,j\in I}}{\overset{\shortparallel}{A}}$の臨界主部分行列$A_S$ ($S\subset I$)に対し、次のいずれかが成り立つ。

a) もし$A_S = A_S^0$ならば$A_T = A_T^0$かつ$T\supset S$なるIの部分集合Tが存在して，$\mathrm{rank}\,A_T = n-1$となる。

b) もし$A_S = A_S^-$ならばSに対応するKの面分はない。

Kが有界であることと次は同値である。

KのGram行列Aについて、Aの主部分行列で，退化した半正値行列になるものはなく，臨界行列となるものは，上の条件b)を満たす。

§4 鏡映で生成される極大部分群

Λ^nに作用する運動群の離散部分群Θに対し，Θ中の鏡映で生成される極大部分群Γを求めるアルゴリズムを示す。運が良ければこのアルゴリズムは有限で終わり，Θ/Γも有限群になる。

1 ΘとΓの関係

命題2 ΓはΘの正規部分群で $\Theta = \Gamma\cdot H$（半直積）と書ける。

但しHはΓの基本領域Kの固定部分群の部分群である。

2　Γの基本領域を求めるアルゴリズム

ここではΓの基本領域の境界を成す超平面の族$\{\Pi_i\}_{i\in I}$をもとめる為、$E^{n,1}$での$\mathrm{cn}\,\Pi_i$の法線ベクトルで、基本領域の外へ向かうものの族$\{e_i\}_{i\in I}$を求める。$\mathrm{cn}\,\Pi_i$はΓのΛ^nへの作用を自然に$E^{n,1}$への作用に拡張したときの鏡映面である。

① $\mathfrak{R}$を、Θに属する鏡映の$E^{n,1}$への作用による鏡映面の法線ベクトルの全体とする。

② Λ^n中の1点p_0を固定すると、p_0を含むΓの基本領域Pがある。p_0を含む鏡映面をもつような鏡映で生成される群をΓ_{p_0}とする。$\Gamma_{p_0}=\{1\}$のときは⑤へ進む。

③ Γ_{p_0}の基本領域でPを含むものをP_0とする。

④ $\mathfrak{R}$の元$e_1,\cdots,e_k$を次を満たすようにとる。

$\Pi_{e_i}=\{x\in\Lambda^n;\ (x,e_i)\le 0\}$とするとき、$P_0=\bigcap_{i=1}^{k}\Pi_{e_i}$である。

⑤ $\mathfrak{R}$の元e_l（$l>k$，但し$\Gamma_{p_0}=\{1\}$のときは$k=0$とみなす）を次のように帰納的にとってゆく。

$(e_i,e_l)\le 0$（任意の$i<l$に対して，但し$l=1$のときは考えなくてよい）
を満たし，p_0とΠ_{e_l}との距離が最小になるような，
そして$p_0\in\Pi_{e_l}$となるような向きのe_lをとる。

3　アルゴリズムの正当性

命題3　$P=\bigcap_{i=1}\Pi_{e_i}$（e_iは2でとったものすべてで無限にあるかもしれない。）

4　アルゴリズムの終了条件

<u>命題</u> 4　$P^{(m)} = \bigcap_{i=1}^{m} \Pi_{e_i}^{-}$ とするとき、$P^{(m)}$ の体積が有限ならば $P^{(m)} = P$ である。但し e_i は2で決めたベクトルである。

これにより、2で e_i を決めてゆくとき、$P^{(m)}$ の体積が有限になるところで終えてよいことがわかる。

§5　2次形式 $-x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2$ に関する unit elements で生成される群 Φ

1. Φ とは何か

Φ とは、$\mathbb{R}^{n+1}$ の基底 $\{v_0, v_1, \cdots, v_n\}$ に関する二次形式 $f(x) = -x_0^2 + \cdots + x_n^2$　$(x = \sum_{i=0}^{n} x_i v_i)$　の unit lattice $L = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{Z} v_i$ と、f を変えない線形変換群のことである。$-\Lambda^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1};\ -x \in \Lambda^n\}$ とすると、$-\Lambda^n \cup \Lambda^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1};\ f(x) = -1\}$ なので、Φ は $-\Lambda^n \cup \Lambda^n$ を保つ。そして Λ^n を保つ部分群 Θ は指数2で Φ に含まれていて、$\Phi = \Theta \times \{1, -1\}$ となる。そこで Θ を調べてみよう。

2. Θ の、鏡映で生成される極大部分群 P の基本領域

§4の手法を Θ に適用してみよう。

① $\mathcal{R}' = \{e = \sum_{i=0}^{n} k_i v_i\ ;\ k_i \in \mathbb{Z},\ -k_1^2 + k_2^2 + \cdots + k_n^2 = 1$ 又は $2\}$

とすると、$\mathcal{R}'$ は Θ のすべての鏡映による鏡映面を表す法線ベクトルを含むので、$\{e_i\}_{i \in I}$ は $\mathcal{R}'$ の中からとればよい。

② P_0としてv_0に対応するΛ^nの点をとる。

③ $P_0=\{(x_0,x_1,\cdots,x_n)\in\Lambda^n;\ x_1\geq x_2\geq\cdots\geq x_n\geq 0\}$ とできる。

④ P_0の境界を成す超平面の法線ベクトルで条件を満たすものは

$$e_i=-v_i+v_{i+1}\quad(i=1,2,\cdots,n-1)$$
$$e_n=-v_n$$

である。

⑤ 実際にやると、$n\leq 17$ のときは§4の命題4により有限個で終わり、表4のようになる。このときのCoxeterグラフを表5にあげておく。このとき、HはΓの基本領域の固定部分群に等しくなる。

表4

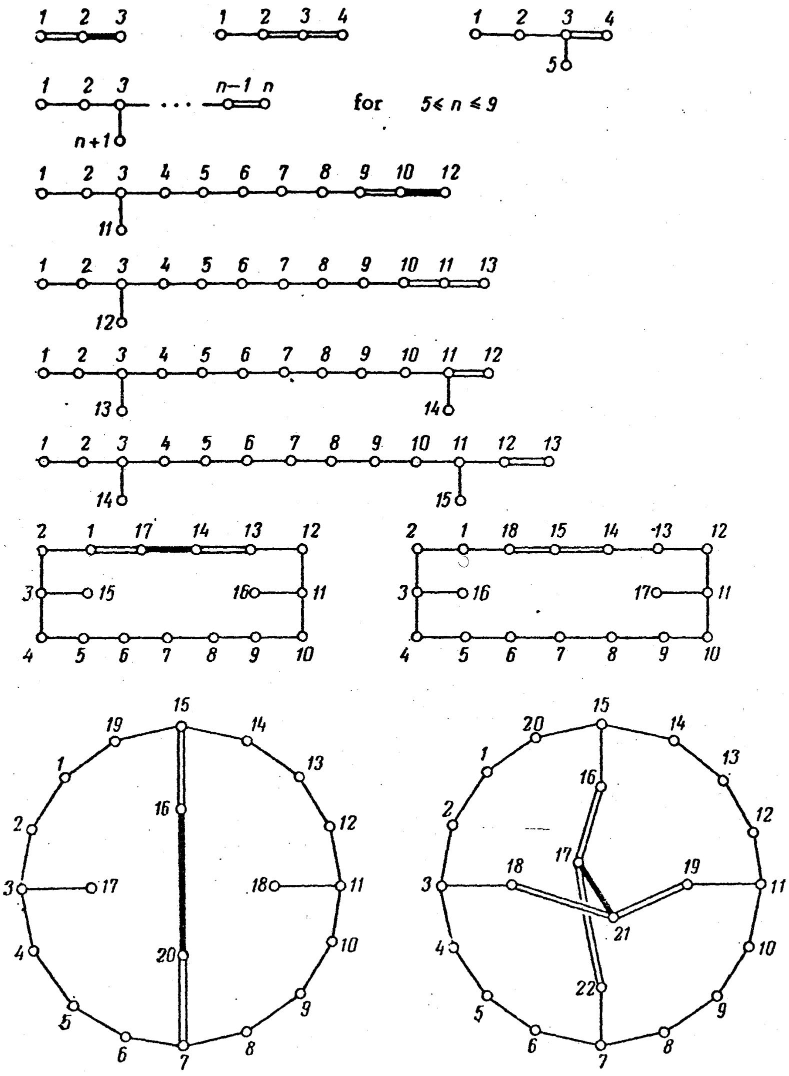
i	e_i	ε	n	$\frac{k_0^2}{\varepsilon}$
$n+1$	$v_0+v_1+v_2$	1	2	1
	$v_0+v_1+v_2+v_3$	2	$\geqslant 3$	0,5
$n+2$	$v_0+v_1+\ldots+v_{10}$	1	10	9
	$v_0+v_1+\ldots+v_{11}$	2	$\geqslant 11$	4,5
$n+3$	$4v_0+2v_1+v_2+\ldots+v_{14}$	1	14	16
	$4v_0+2v_1+v_2+\ldots+v_{15}$	2	$\geqslant 15$	8
$n+4$	$6v_0+2(v_1+\ldots+v_7)+v_8+\ldots+v_{16}$	1	16	36
	$4v_0+v_1+\ldots+v_{17}$	1	17	16
$n+5$	$6v_0+2(v_1+\ldots+v_7)+v_8+\ldots+v_{17}$	2	17	18

3　$n\geq 18$ のとき

Leech lattice と呼ばれる、原点からの距離が1や2にならないような、24次元のある二次形式に関する unit lattice が知られている。このことから、$n\geq 25$ のときは、Γの基本領域は体積が無限になるので、B/Γも無限になってしまう。

$18 \leq n \leq 24$ のときはまだわかっていない。

表 5



文 献

1 H. S. M. Coxeter : Discrete groups generated by reflections, Ann. Math, 35, (1934), 588-621

2 F. Lanner : On complexes with transitive groups of automorphisms, Lunds Univ. Math. Sem., 11 (1950)

3 J. H. Conway : A characterization of Leech's lattice, Invent. Math., 7 (1969), 137-142

4 J.-P. Serre : Cours d'arithmetique, Presses Universitaires de France, Paris, (1970)

5. E. M. Andreev : On convex polyhedra of finite volume in Lobachevskiĭ spaces, Math. Sbornik, 83, (1970), 256-260.

6. È. B. Vinberg : Discrete groups generated by reflections in Lobačevskiĭ spaces, Mat. Sbornik, 72 (1967), 471-488

7. È. B. Vinberg : Discrete linear groups generated by reflections, Izv. Akad. Nauk SSSR, ser. mat., 35, (1971), 1072-1112

8. È. B. Vinberg : On the groups of units of some quadratic forms, Mat. Sbornik, 87 ((1972), 18-36