数理解析研究所講究録
第395巻 1980年 95-111

BCK代数

神戸大 理 井関清志

BCK-代数の概念は1965年から66年にかけて，私のセミナーで導入された1つの代数系である。このときBCI-代数とGriss代数の概念も同時に導入した。BCK, BCI-代数は⇒だけを含むある種の命題計算と集合算における差のもつ性質を同時に一般化したものである。Griss型代数は集合算の差と和集合の性質を一般化したものである。

束論との関連では，たとえば，束は（歴史的ではないが）集合算での $\cup, \cap$ のもつ性質を一般化したものとみられる。ここで集合算の差の性質の一般化が残っていた。この立場からみて，BCK-代数は，束論と両立する理論の1つとみることができる。

1973年頃より，まずBCK-代数について，主として研究をはじめた。

この間にB. Bossbach（[3] をみよ）がかれのcomplementary semigroup とBcK-代数との関係をしらべた。ごく最近になって，B.Bossbach ［4］はさらにくわしくしらべている。集合算では，A∩B=A−(A−B)となって，差をつかって，共通部分が定義されるので，差と共通部分の一般化は面白くないようにみえる。これに対して差によって和は表わされないので差と和で一つの代数系を構成することは有益ではないかと考えた。これがGriss型代数を定義する基本的な立場であった。Griss型の代数として，どのような公理系がよいかまだはっきりしていない。いくつかのGriss型の代数は筆者やN.Prabhakara Rao（［29］，［30］，［31］）が論じた（1977−79）。

BcI-代数については，まだ殆んどしらべられていない。最近すこししらべはじめた（MSN，Kobe[1] 8(1980)の筆者のノートをみよ）。

また古くから知られているSouslin，Lusin，Sierpiński による解析集合の概念を一般化したKantrovicとLivenson の解析演算がある。これは無限個の集合に1つの集合を対応させる演算の1つである。これを一般化してanalytic algebraというべきものがえられることを注意しておく。

---

1) Mathematics Seminar Notes, Kobe University. の略

集合算でのごく簡単な関係式

(1′)　$(X-Y)-(X-Z)\subset Z-Y$,

(2′)　$X-(X-Y)\subset Y$,

(3′)　$X\subset X$,

(4′)　$\phi\subset X$,

(5′)　$X\subset Y$ で $Y\subset X$ のとき　$X=Y$

を一般化する。

まず二項演算 $*$ と特定元 0 をもつ集合 X を考え，上記の(1′)～(5′)をまねて，公理として

(1)　$(x*y)*(x*z)\leq z*y$,

(2)　$x*(x*y)\leq y$,

(3)　$x\leq x$,

(4)　$0\leq x$,

(5)　$x\leq y$ で，$y\leq x$ のとき　$x=y$.

をとる。そして $x\leq y$ は $x*y=0$ を表わすものとする。

たとえば(2)は $(x*(x*y))*y=0$ のことである。

いま定義した $\langle X,*,0\rangle$ を<u>BCK-代数</u>とよぶ（BCK-代数の初等的理論もすぐに定義される）。

上の公理(4)を

(4″)　$x*0=0$ のとき　$x=0$

におきかえた代数を<u>BCI-代数</u>という。

BCK-代数では $0*x=0$ が成立しているので, $x*0=0$ のとき, (5)によって $x=0$ となる。したがって<u>BCK-代数はBCI-代数である</u>。

(4)を(4')におきかえただけでは, あまりちがいなさそうにみえるが, 実際は想像以上に大きなちがいがある。

BCK とBCI-代数の公理系についてすこし注意をしておく。いずれの場合にも最後の公理(5)を除いて, 公理は等式で与えられている。(5)は「$x*y=y*x=0$ ならば $x=y$」という形になっている。Universal algebraist の用語によれば, (5)は equational implication form になっている（G. Grätzer [14] の附録4の W. Taylor の論文をみよ）。

未解決の問題がある。

<u>問題1</u>。<u>BCK やBCI-代数の class は equational class か, どうか</u>。

一方いままでに考えた Griss 型代数の class はいずれも equational class でないことがわかっている。

BCK とBCI-代数でえられる重要な等式は

(6) $(x*y)*z=(x*z)*y$

である（証明は, たとえば, [15], [24]）。また $\leq$ はいずれの場合にもそれらの代数上に partial order を与え, さらに

(7) $x\leq y$ のとき $x*z\leq y*z$, また $z*y\leq z*x$。

逆に最小元0をもつ任意の partial ordered set にはBCK-構造がはいる。たとえば

$$x*y=\begin{cases}0, & x\leq y \text{ のとき,}\\ x, & \text{そうでないとき}\end{cases}$$

とおけばよい。しかしこれは一通りではない。

BCKとBCI-代数の本質的な差異は0がBCI-代数の最小元でないことと，BCK-代数では

(7) $\quad x*y\leq x$

が成立するが，BCI-代数では成立しないことである。(7)からBCK-代数では，ただちに

(8) $\quad x*0=x$

がえられる。BCI-代数でも(8)は，成立する([21]をみよ)。

BCI-代数Xにおいて，$0\leq x\ (x\in X)$となるxの全体はBCK-代数になる。これがXの最大のBCK-部分代数になる。これをXのBCK-partとよぶ。

2つのBCK(BCI)-代数X, Yがあるとき，直積$X\times Y$は$(x_1, x_2)*(y_1, y_2)=(x_1*y_1, x_2*y_2)$と定義するとBCK(BCI)-代数となる。

XをBCK-代数とする。

$$X=\cup A_\alpha,\quad A_\alpha\cap A_\beta=\{0\}$$

と分解する。ここで$x\in A_\alpha$で$y\leq x$のとき$y\in A_\alpha$とする。

このとき A_α を X の branch とよぶ。異なった branch から x, y をとれば，つねに $x*y=x$ となる。この考えを逆につかって，2つの BCK-代数 X, Y の direct sum をつくることができる。

X, Y の ordinal union には2種類が考えられる（[25] をみよ）。

BCK(BCI)-代数の ideal の概念は A. Tarski がかつて命題計算のなかで考えた deductive system の概念をまねて，筆者 [16] が導入した。

X を BCK(BCI)-代数とし，X の部分集合 A に対して

(1) $0 \in A$，(2) $x*y \in A$ で，$y \in A$ のとき $x \in A$ であれば，A を X の ideal という。

一般の環論をまねて種々の ideal が考えられる。きわめて重要な結果は X の任意の部分集合 A から生成される ideal がつぎのようにしてえられることである。

定理1（筆者 [16]）。A から生成される ideal I は

$$I = \{x \mid (\cdots((x*a_1)*a_2)*\cdots)*a_n = 0 \text{ for some } a_1, \cdots, a_n \in A\}.$$

で与えられる。

Krull 流の ideal 論の基礎は J. Ahsan − A. B. Thaheem [1] によって研究された。

BCK-代数Xの ideal が$\{0\}$とXだけのとき，Xを simple といい，Pを ideal とするとき，2つの ideal I_1, I_2について$I_1 \cap I_2 \subset P$のとき，$I_1 \subset P$か$I_2 \subset P$ならば，Pを prime という。

maximal ideal は普通の通り定義する。

BCI-代数のBCK-part は ideal になる。しかし maximal ではない。

直積の ideal についてつぎの面白い結果がある。

定理2（田中）。直積$X \times Y$の ideal IはIのX, Yへのそれぞれの projection I_1, I_2の直積になる。

最初に集合算以外のBCK-代数の例と特別な条件をみたすBCK-代数をとりあげた。例については，田中［38］がいくつかつくった。筆者は最大元1をもつBCK-代数について考えた。一方，田中［36］によって可換BCK-代数というきわめて大切な概念が導入された。

XをBCK-代数とし，

$$x \wedge y = y * (y * x)$$

とおく。このとき$x \wedge y = y \wedge x$が成立するかどうかである。一般に成立しない。さきの partially ordered set 上のBCK-structure では，一般に$x \wedge y = y \wedge x$はいえない。

定義1．任意の$x, y \in X$について

(8) $x \wedge y = y \wedge x$

のとき，Xを可換という。このとき，つぎの定理が成立する。

定理3（田中）．つぎの条件は同値である。

(I) Xが可換である。

(II) Xが$\wedge$に関して semilattice である。

(III) $A(x)=\{y \mid y \leq x\}$ とするとき $A(x) \cap A(y)=A(x \wedge y)$.

可換BCK-代数の class は equational であることが示された。$*$をX上の二項演算とするとき，可換BCK-代数はつぎの公理系で与えられる（湯谷[41]）。

(9) $(x * y) * z=(x * z) * y$,

(10) $x *(x * y)=y *(y * x)$,

(11) $x * x=0$,

(12) $x * 0=x$.

$x * y=y * x=0$ とすると(10)と(12)から $x=x * 0=x *(x * y)$ $=y *(y * x)=y * 0=y$ から(5)が出てくる。

最大元1をもつBCK-代数Xを有界という。このとき

$N x=1 * x$

とおくと，Xが可換のとき，$x \vee y=N(N x \wedge N y)$が$x$と$y$の上限になり，$X$は$\wedge$と$\vee$について束となる（筆者[17]）。この結果は T. Traczyk [34] によってつぎのように拡張された。

定理4。Xを可換BCK-代数とする。Xの任意の2つの元x, yが上界をもてば，xとyの上限$x \vee y$が存在し，Xは$\vee$と$\wedge$について分配束になる。

この定理と筆者の結果から，有界可換BCK-代数は de Morgan 代数になる。

最近，M. Palasinski [26] は定理2の仮定をみたす（必ずしも可換でない）BCK-代数を directed とよんだ。

Palasinski は定理2の仮定をみたすBCK-代数は全順序BCK-代数の subdirect product であることを示しさらにつぎの結果を出した。

定理5。subdirectly irreducible BCK-代数が$\leq$について全順序になるための必十条件は

$$(x*(x*(x*z)))*(x*(z*y))=0$$

が成立することである。

定義2。XをBCK-代数とする。Xの任意の元x, yについて

$$(x*y)*y=x*y$$

が成立するとき，Xを positive implicative といい，これが commutative のとき，Xを implicative という。

定理6［筆者］。Xが implicative のとき，そのときにかぎって

$$x*(y*x)=x$$

定理7。有界で，implicative なBCK-代数はBoole 代数である。このとき，y, z に対して

$$x * y \leq z$$

をみたす最大元xが存在する。そのxが $y \vee z$ で与えられる。

上の定理から，条件(S)をもつBCK-代数の概念がえられる。([18] をみよ)。

定義3。XをBCK-代数とする。任意のy, z に対して

$$x * y \leq z$$

を満足する最大の元xが存在するとき，Xを(S)ー条件をみたすという。このとき最大元xを $y \circ z$で表わす。

(S)条件をもつBCK-代数Xでは，$\circ$ がX上に semigroup structureをいれる。そして $x \circ y = y \circ x$, $x \circ 0 = 0 \circ x = x$ となり，$x \leq y$ のとき $x \circ z \leq y \circ z$ が成立す

このようなBCK-代数について，筆者がかなりくわしくしらべた[20]。

条件(S)をもつBCK-代数では

$$(x * y) * z = x * (y \circ z)$$

が成立する。

条件(S)をもつBCK-代数の特徴づけについての次の結果がある。

定理8 [湯谷]。binary operation $\circ$ をもつBCK-代数をX

とする。ここで

$$(x * y) * z = x * (y \circ z)$$

であれば，Xは(S)条件をもつBCK-代数である。

directed BCK-代数はcommutativeのとき条件(S)をもつ

また

$$x * y \leq (x * z) \circ (z * y),$$

$$(x \circ y) * (y \circ z) \leq x * z \leq x \circ z$$

が成立する。この性質がGriss型代数を定義するときの大切な関係になる。

定理9［筆者］。条件(S)をBCK-代数Xでつぎのことは同値である。

(1)　Xがpositive implicative，

(2)　$x \leq y$のとき　$x \circ y = y$，

(3)　$x \circ x = x$，

(4)　$(x \circ y) * z = (x * z) \circ (y * z)$。

また条件(S)をもつBCK-代数では，いくつかのidealが一致することもわかっている。

positive implicative & commutative BCK-代数を含む広いequational classは湯谷［42］によって定義された。

まず，記号$Q_{m,n}$をつぎのように，recursivelyに定義する。自然数m, nに対して

$$Q_{0,0}(x,y)=x*(x*y),$$
$$Q_{m+1,n}(x,y)=Q_{m,n}(x,y)*(x*y),$$
$$Q_{m,n+1}(x,y)=Q_{m,n}(x,y)*(y*x).$$

たとえば，BCK-代数の可換性は

$$Q_{0,0}(x,y)=Q_{0,0}(y,x)$$

で表わされる。

定義4（湯谷[42]）。ある自然数 m,n,i,j が存在して，すべての x,y に対して

$$Q_{m,n}(x,y)=Q_{i,j}(y,x)$$

が成立するとき，この代数を (m,n,i,j) 型の quasi-commutative BCK-代数という。

定理10（湯谷[42]）。quasi-commutative BCK-代数は equationally definable である。有限BCK-代数はいつでも quasi-commutative である。

$(1,1;1,1)$ 型の例は湯谷[42]が，また $(1,2:1,2)$ 型の例は瀬藤[33]が与えた。

quasi-commutative BCK-代数の class は equational class であるから Jonsson の理論[14]が広く適用される。この立場から W. Cornish が面白い結果を導いている[9]。

問題2。m,n,i,j を任意に与えられたとき $(m,n;i,j)$ 型の quasi-commutative BCK-代数は存在するか。

この問題は $m, n, i, j > 3$ のとき完全には解けていない。

有限BCK-代数のもっと適切な分類が考えられている（筆者[22]）。

一方ごく最近，A. Grzaslewicz が Γ-代数という概念を導入した。

定義5。BCK-代数の任意の元 x, y に対して

$$x * y = y * x \Rightarrow x = y$$

のとき，この代数をΓ-代数という。

Grzaslewicz によれば，positive implicative，や directed commutative BCK-代数はΓ-代数になる（[12] をみよ）。

Γ-代数の概念は，可換BCK-代数を有界な可換BCK-代数に拡大する問題を研究しているときに導入されたもので，今後，重要なクラスの1つになるだろう。

なお directed commutative BCK-代数は完全順序BCK-代数の subdirect product になることが M. Palasinski [26] によって証明された。さらに T. Traczyk と A. Romanowska [35] は有界可換BCK-代数が有限のとき，それは完全順序BCK-代数の直積になることを示した。このような代数では，素イデアルは極大になる。しかし有限でないとき，このことは成立しない。反例は区間 [0,1] を non-standard extension して，いわゆる無限小をつけ加えた世界でえられる（M. Palasinski）。

BCK-代数の種々のイデアルは順序代数系の nonstandard extension のなかのイデアルと密接な関係をもちはじめた（M. Palasinski [28]）。この研究もこれからの話題である。

なお，環論，順序群などとBCK-代数の関係は W. H. Cornish がくわしくしらべ始めた（[6]，[7]，[8]，[10] をみよ）。

またBCK-代数上の合同類の研究もいろいろはじまってきた（湯谷[42]，J. C. Varlet [39]）。

BCK-代数のカテゴリー論も考えられるが，この場合 cotheory の方がきわめてむつかしい。可換BCK-代数の可換拡大は A. Grzaslewicz [13] が研究しはじめた。

BCK-代数の表現問題は特別な場合を除いて，解けていない（S. D. Comer [5] または H. Rasiowa [32] をみよ）。

さきの問題に関して，すこし注意しておく。

$(m, n; i, j)$ 型BCK-代数で $m \leq i$，$n \leq j$ であれば，この代数は $(m, n; m, n)$ 型になる。ここで $Q_{m+1,n}(x, y) = Q_{n,m}(y, x)$ をみたすと，この代数は $(g, h; l, k)$ $(m \leq g, l,\ n \leq h, k)$ 型の代数になる。$(m, n; 0, 0)$ 型はつねに可換になる。

また，たとえば $(m, n; 0, 1)$ $(m \geq 1)$ 型は $(1, 0; 0, 1)$，$(1, 1; 1, 1)$ 型に，$(m, p; p; n)$ $(m \geq n \geq p \geq 1)$ 型のときには，$(n, n; n, n)$ 型になる。

References

[1] Ahsan, J. and Thaheem, A. B., On ideals in BCK-algebras, MSN, 5(1977), 167-172.

[2] Arai, Y., Iséki, K. and Tanaka, S., Characterizations of BCI, BCK-algebras, Proc. Japan Acad., 42(1966), 105-107.

[3] Bossbach, B., Komplementäre Halbgrappen, Fund. Math. 46 (1969), 257-287.

[4] Bossbach, B., Contribution to the theory of divisibility, Preprint.

[5] Comer, S. D., The representation of implicative BCK-algebras, Math. Japonica, 25(1980), 111-115.

[6] Cornish, W. H., Rings and implicative BCK-algebras, MSN, 8 (1980), 147-155.

[7] Cornish, W. H., A multiplier approach to implicative BCK-algebras, MSN, 8(1980), 157-169.

[8] Cornish, W. H., Lattice ordered groups and BCK-algebras, to appear in Math. Japonica.

[9] Cornish, W. H., 3-permutability and quasi-commutative BCK-algebras, to appear in Math. Japonica.

[10] Cornish, W. H., On positive implicative BCK-algebras, MSN, 8/2(1980).

[11] Cornish, W. H., A 3-distributive 2-based variety, MSN, 8/2 (1980).

[12] Grzaslewicz, A., On some problem on BCK-algebras, to appear in Math. Japonica.

[13] Grzaslewicz, A., On extensibility of commutative BCK-algebras, MSN, 8/2(1980).

[14] Grätzer, G., Universal algebra, 2nd ed., 1979.

[15] Iséki, K., An algebra related with a propositional calculus, Proc. Japan Acad., 42(1966), 26-29.

[16] Iséki, K., On ideals in BCK-algebras, MSN, 3(1975), 1-12.

[17] Iséki, K., On bounded BCK-algebras I, II, MSN, 3(1975), 23-33, 34-36.

[18] Iséki, K., A special class of BCK-algebras, MSN, 5(1977), 191-198.

[19] Iséki, K., On congruence relations on BCK-algebras, MSN, 5 (1977), 327-346.

[20] Iséki, K., BCK-algebras with condition(S), Math. Japonica, 24(1979), 107-119.

[21] Iséki, K., On BCI-algebras, MSN, 8(1980), 125-130.

[22] Iséki, K., On finite BCK-algebras, Math. Japonica, 25(1980), 225-229.

[23] Iséki, K. and Tanaka, S., Ideal theory of BCK-algebras, Math. Japonica, 21(1976), 351-366.

[24] Iséki, K. and Tanaka, S., An introduction to the theory of BCK-algebras, Math. Japonica, 23(1978), 1-26.

[25] Iséki, K. and Yutani, H., On ordinal unions of BCK-algebras, MSN, 8/2(1980).

[26] Palasinski, M., Some remarks on BCK-algebras, MSN, 8(1980), 137-144.

[27] Palasinski, M., On ideals in direct commutative BCK-algebras, MSN, 8/2(1980).

[28] Palasinski, M., Some examples of commutative BCK-algebras, MSN, 8/2(1980).

[29] Prabhakara Rao, N., Autometrized Griss algebras, I, II, MSN, 5(1977), 1-21, 151-166.

[30] Prabhakara Rao, N., Representable Griss algebras, Math. Japonica, 23(1978), 61-69.

[31] Prabhakara Rao, N., On certain classes of autometrized algebras, Dr Thesis, Andhra Univ. Waltair, 1977.

[32] Rasiowa, H., An algebraic approach to non-classical logics, Amsterdam, 1974.

[33] Setô, Y., Some examples of BCK-algebras, MSN, 5(1977), 397-400.

[34] Traczyk, T., On the variety of bounded commutative BCK-algebras, Math. Japonica, 24(1979), 283-292.

[35] Traczyk, T. and Romanovska, A., On commutative BCK-algebras I, to appear in Math. Japonica.

[36] Tanaka, S., A new class of algebras, MSN, 3(1975), 37-43.

[37] Tanaka, S., On ∧-commutative algebras, MSN, 3(1975), 59-64.

[38] Tanaka, S., Examples of BCK-algebras, MSN, 3(1975), 75-82.

[39] Varlet, J. C., Congruences on de Morgan algebras, Preprint.

[40] Woźniakowska, B., On a problem on BCK-algebras, MSN, 8(1980), 233-234.

[41] Yutani, H., The class of commutative BCK-algebra is equationally definable, MSN, 5(1977), 207-210.

[42] Yutani, H., Quasi-commutative BCK-algebras and congruence relations, MSN, 5(1977), 469-480.

[43] Yutani, H., Disjoint unions of BCK-algebras, MSN, 8/2(1980).

[44] Yutani, H., Characterization of positive implicative BCK-algebras by ideals, MSN, 8/2(1980).