数理解析研究所講究録
第 399 巻 1980 年 1-14

Dominant Operators の Quasi-Affine 変換

東北大 教養　斎藤 復四郎

1　Fong [4] においては，Putnam [7] の拡張を目的として subnormal operators の quasi-affine 変換の local spectral properties について色々調べている。ここではその中のいくつかの結果が dominant operators の quasi-affine 変換まで拡張できることを示し，吾々の議論が Clary [1] の結果の簡単な証明を与えることを注意する。ここで述べる多くの部分は吳屋氏との討論より得られたものである。

2　最初に記号と定義を準備する。

H, K を Hilbert space とするとき，$H \to K$ の bounded linear operators 全体を $\mathcal{B}(H, K)$ と表し，特に $H = K$ のときは $\mathcal{B}(H)$ と書く。

$W \in \mathcal{B}(H, K)$ が <u>quasi-affinity</u> とは，W が injective で dense range をもつときである。$T \in \mathcal{B}(H)$ が $S \in \mathcal{B}(K)$ の <u>quasi-affine 変換</u>とは，quasi-affinity

$W \in \mathcal{B}(H, K)$ が存在して，$SW = WT$ となるときである。さらに，$T \in \mathcal{B}(H)$, $S \in \mathcal{B}(K)$ に対して，quasi-affinity $X \in \mathcal{B}(H, K)$ と quasi-affinity $Y \in \mathcal{B}(K, H)$ が存在して，$XT = SX$, $YS = TY$ となるとき，T と S は <u>quasi-similar</u> であるという。

$T \in \mathcal{B}(H)$ が <u>dominant</u> であるとは，

$$\forall \lambda \in \sigma(T) : \quad \mathrm{range}(T-\lambda) \subset \mathrm{range}(T-\lambda)^*$$

が成りたつときで，この条件は次のことと同値である[9].

$$\forall \lambda \in \sigma(T), \exists M_\lambda \geqq 0 : \|(T-\lambda)^* x\| \leqq M_\lambda \|(T-\lambda)x\|$$

$T \in \mathcal{B}(H)$ が <u>single-valued extension property</u> をもつとは，open set Ω ($\subset \mathbb{C}$，複素平面) 上の H-valued analytic function $f : \Omega \longrightarrow H$ が $(T-\lambda)f(\lambda) \equiv 0$ on Ω ならば $g \equiv 0$ on Ω となるときである。このとき，closed set δ ($\subset \mathbb{C}$) に対して

$$X_T(\delta) = \{ x \in H \mid \exists f : \mathbb{C} \setminus \delta \to H \text{ analytic}, (T-\lambda)f(\lambda) \equiv x \text{ on } \mathbb{C} \setminus \delta \}$$

とおく。dominant operator は single-valued extension property をもつことが知られている。また，$T \in \mathcal{B}(H)$ が hyponormal のときは，$X_T(\delta)$ ($\delta (\subset \mathbb{C})$ は closed) が closed set となることが知られている[8].

3 若干の簡単な性質

<u>Proposition 1</u> $S \in \mathcal{B}(K)$ が single-valued extension property をもち，$T \in \mathcal{B}(H)$ が S の quasi-affine 変換ならば，T も single-valued extension property をもつ.

<u>Proof</u> $W \in \mathcal{B}(H, K)$ を quasi-affinity で $SW = WT$ とする。$\Omega \subset \mathbb{C}$ を open set とし，

$$f : \Omega \to H \quad \text{analytic}, \quad (T-\lambda)f(\lambda) \equiv 0 \quad \text{on } \Omega$$

とすると，

$$(S-\lambda)Wf(\lambda) = W(T-\lambda)f(\lambda) \equiv 0 \quad \text{on } \Omega$$

関数 $\lambda \in \Omega \longmapsto Wf(\lambda) \in K$ は analytic で S は single-valued extension property をもつから

$$Wf(\lambda) \equiv 0 \quad \text{on } \Omega$$

W の injectivity から，$f(\lambda) \equiv 0$ on Ω. よって T は single-valued extension property をもつ. ▨

ここで，次の既知の結果を引用する [3 : Proposition 3.8].

<u>Lemma 1</u> $T \in \mathcal{B}(H)$ が single-valued extension property をもち，$\delta \subset \mathbb{C}$ は closed set で $X_T(\delta)$ が closed とすると，$\sigma(T|X_T(\delta)) \subset \delta$ である。とくに，$X_T(\delta) = H$ ならば，$\sigma(T) \subset \delta$ である。

これを用いると

<u>Proposition 2</u> $S \in \mathcal{B}(K)$ が hyponormal operator で

$T\in\mathcal{B}(H)$ が S の quasi-affine transform ならば $\sigma(S)\subset\sigma(T)$ が成りたつ。

Proof $W\in\mathcal{B}(H,K)$ を quasi-affinity で $SW=WT$ とする。$x\in H$ とし，

$f:\mathbb{C}\backslash\sigma(T)\to H$ analytic, $(T-\lambda)f(\lambda)\equiv x$ on $\mathbb{C}\backslash\sigma(T)$

とする。このとき，

$(S-\lambda)Wf(\lambda)=W(T-\lambda)f(\lambda)\equiv Wx$ on $\mathbb{C}\backslash\sigma(T)$

$\lambda\in\mathbb{C}\backslash\sigma(T)\mapsto Wf(\lambda)\in K$ は analytic だから

$Wx\in X_S(\sigma(T))$，よって $WX_T(\sigma(T))\subset X_S(\sigma(T))$

S の hyponormality から，$X_S(\sigma(T))$ は closed である（[8]）．また，$H=X_T(\sigma(T))$ は明らかだから，W が dense range をもつことから，

$WH\subset X_S(\sigma(T))$，よって $K=X_S(\sigma(T))$

故に，Lemma 1 より $\sigma(S)\subset\sigma(T)$ が成りたつ。▨

Remark Proposition 2 では W の injectivity はいらないから，次の結果が得られる。

Corollary 2.1 ([1: Theorem 1]) $T\in\mathcal{B}(H)$ と $S\in\mathcal{B}(K)$ が hyponormal operators で，$W\in\mathcal{B}(H,K)$ は dense range をもち，$SW=WT$ ならば

T invertible $\Rightarrow$ S invertible

Proof Proposition 2 より，$0\notin\sigma(T)\Rightarrow 0\notin\sigma(S)$ ▨

Corollary 2.2 ([1: Theorem 2]) quasi-similar な hyponormal operators は spectrum が一致する。

Proof Proposition 2 から明らか。∎

Remark この場合も intertwining map の injectivity は不要である。

$T \in \mathcal{B}(H)$ が pure とは，$T|\mathfrak{M}$ が normal となる T の reducing subspace $\mathfrak{M} \subset H$ は $\mathfrak{M} = \{0\}$ だけのときである。T が pure dominant operator のとき，$T|\mathfrak{M}$ が normal となる nontrivial invariant subspace $\mathfrak{M}$ は存在しないことが知られている [9]。

Proposition 3 $S \in \mathcal{B}(K)$ が pure dominant で $T \in \mathcal{B}(H)$ が S の quasi-affine 変換ならば，T は $T|\mathfrak{M}$ が normal となる nontrivial invariant subspace $\mathfrak{M}$ をもたない。

Proof $W \in \mathcal{B}(H, K)$ を $SW = WT$ なる quasi-affinity とし，$\mathfrak{M}$ を $T|\mathfrak{M}$ が normal となる invariant subspace とする。$\mathfrak{N}$ を $W\mathfrak{M} = \{Wx \mid x \in \mathfrak{M}\}$ の closure とし，mapping $W_1 : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ を

$$W_1 x = W x \quad \text{for } x \in \mathfrak{M}$$

で定義する。このとき，$\mathfrak{N}$ は S の invariant subspace で

$$(S|\mathfrak{N}) W_1 x = (S|\mathfrak{N}) W x = S W x = W T x$$

$$= W_1 T x = W_1 (T|\mathfrak{m}) x \quad \text{for } x \in \mathfrak{m}$$

$$\therefore \quad (S|\mathfrak{n}) W_1 = W_1 (T|\mathfrak{m})$$

$T|\mathfrak{m}$ は normal, $S|\mathfrak{n}$ は dominant, W_1 は dense range をもつから，$S|\mathfrak{n}$ は normal である（[9: Theorem 1]）。故に前に注意したことから $\mathfrak{n}$ は S を reduce する。S は pure だから，$\mathfrak{n} = \{0\}$，よって $\mathfrak{m} = \{0\}$. ▨

Remark　Propositions 1, 2, 3 において S がとくに，subnormal operator の場合が Fong [4] の結果である。[4] では subnormal operator の normal extension を用いた議論を行うので，そのままの証明は出来ない。

4　主要定理

目的の結果は次の定理である。

Theorem　$S \in \mathcal{B}(K)$ を $\sigma_p(S) = \phi$ なる dominant operator, $T \in \mathcal{B}(H)$ を S の quasi-affine 変換とする。

$x \in H$, open set $\Omega \subset \mathbb{C}$ に対して $f : \Omega \to H$ を

$$(T - \lambda) f(\lambda) = x \quad \text{for all } \lambda \in \Omega$$

となる関数とすると，次のことが成りたつ。

$\exists\, \Omega_0 \subset \Omega$ dense open : f は Ω_0 上 analytic

Remark　Fong [4] は S を $\sigma_p(S^*) = \phi$ なる subnormal operator としてこの結果をしめしている。しかし，S が dominant のときは，

$$\sigma_p(S^*) = \phi \Rightarrow \sigma_p(S) = \phi$$

が成りたつので，吾々の結果は２つの意味において Fongの結果の拡張になっている。

最初にいくつかの準備をする。

<u>Proposition 4</u>　$S \in \mathcal{B}(K)$, $T \in \mathcal{B}(H)$ は Theorem の条件をみたすとする。$x \in H$, open set $\Omega \subset \mathbb{C}$ に対して bounded function $f: \Omega \to H$ が

$$(T-\lambda)f(\lambda) = x \quad \text{for all } \lambda \in \Omega$$

をみたすならば，f は analytic である。

<u>Proof</u>　$W \in \mathcal{B}(H, K)$ を $SW = WT$ をみたす quasi-affinity とする。$\lambda \in \Omega$ に対して

$$(S-\lambda)Wf(\lambda) = W(T-\lambda)f(\lambda) = Wx$$

で $\lambda \in \Omega \mapsto Wf(\lambda) \in K$ は $\Omega \to K$ の bounded function で，$\sigma_p(S) = \phi$ だから，Stampfli - Wadhwa [10 ; Lemma 1] の議論が適用できて（[5] 参照），$\lambda \mapsto Wf(\lambda)$ は analytic となる。故に，任意の $y \in K$ に対して

$$\lambda \in \Omega \mapsto (f(\lambda), W^*y) = (Wf(\lambda), y)$$

は analytic である。W は quasi-affinity だから，W^* は dense range をもつ。故に

$$\forall z \in H: \quad \lambda \in \Omega \mapsto (f(\lambda), z) \text{ は analytic}$$

すなわち，f は analytic である。▨

次の結果は Fong [4] の結果である。

<u>Lemma 2</u> ([4]) $\Omega\subset\mathbb{C}$ を open set, $f:\Omega\to H$ を vector-valued function, $D\subset H$ を dense subset とする。もし, $\lambda\in\Omega\longmapsto(f(\lambda),x)$ $(x\in D)$ が analytic であれば,

$\exists\Omega_0\subset\Omega$ open, dense ; f は Ω_0 上 analytic

が成り立つ。

<u>Proof</u> U を Ω の non-empty open subset とする。

$$F_n=\{\lambda\in U \mid \|f(\lambda)\|\leqq n\}\quad(n=1,2,\cdots)$$

とおく。まず, 各 F_n が relatively closed in U であることを示す。実際, $\lambda_0\in U$ を F_n の closure の点とする。$x\in D$ に対して, $\lambda\in\Omega\longmapsto(f(\lambda),x)$ は continuous で

$$|(f(\lambda),x)|\leqq\|f(\lambda)\|\,\|x\|\leqq n\|x\|\quad\text{for }\lambda\in F_n$$

故に, continuity により

$$|(f(\lambda_0),x)|\leqq n\|x\|\quad\text{for all }x\in D$$

D は dense in H だから,

$$\|f(\lambda_0)\|\leqq n,\quad\text{よって}\quad\lambda_0\in F_n$$

さて, $U=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$ だから, Baire Category Theorem から,

$$\exists n_0 : F_{n_0}^{i}\neq\phi$$

$U_0=F_{n_0}^{i}$ とおけば, $U_0\subset U$ は open in U で f は U_0 上で bounded である。$x\in H$ に対して,

$$\lambda \in U_0 \longmapsto (f(\lambda), x)$$

は bounded, analytic で, D が dense in H だから,

$\forall x \in H : \lambda \in U_0 \mapsto (f(\lambda), x)$ は analytic

故に, f は U_0 上で H-valued analytic function である。

Ω の open subsets 全体の family $\mathcal{O}$ を考えると, 上の議論から,

$\forall U \in \mathcal{O}, \exists U_0 \subset U$ open : f は U_0 上で analytic

が成りたつ。そこで, $\Omega_0 = \bigcup_{U \in \mathcal{O}} U_0$ とおけば, Ω_0 は open dense in Ω で, f は Ω_0 上で analytic である。▨

<u>Proof of Theorem</u> Ω の任意の open subset を U とする。Lemma 2 の証明からも分るように, U の non-empty open subset V で V 上で f が analytic となるものが存在することを示せばよい。

$W \in \mathcal{B}(H, K)$ を $SW = WT$ なる quasi-affinity とする。$\lambda \in \Omega$ に対して

$$(S - \lambda) W f(\lambda) = W(T - \lambda) f(\lambda) = Wx$$

が成りたつ。Ω の non-empty open subset U をとり, fix する。

$$F_n = \{\lambda \in U \mid \|W f(\lambda)\| \leq n\} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

とおく。まず, 各 F_n が relatively closed in U であることを証明する。

$\lambda_k \in F_n$, $\lambda_k \to \lambda_0 \in U$ $(k\to\infty)$ とすると，$\{Wf(\lambda_k)\}$ は bounded sequence だから，weakly convergent subsequence を含む。それを

$$Wf(\lambda_{k_j}) \to w_0 \in K \ (j\to\infty), \text{ weakly}$$

とすると，

$$(S-\lambda_{k_j})Wf(\lambda_{k_j}) = Wx \quad (j=1,2,\cdots)$$

で，さらに，任意の $y \in K$ に対して

$$((S-\lambda_{k_j})Wf(\lambda_{k_j}),\ y)$$

$$= ((S-\lambda_0)Wf(\lambda_{k_j}),\ y) + ((\lambda_0-\cancel{\lambda_{k_j}})Wf(\lambda_{k_j}),\ y)$$

$$= (Wf(\lambda_{k_j}),\ (S-\lambda_0)^*y) + (\lambda_0-\cancel{\lambda_{k_j}})(Wf(\lambda_{k_j}),\ y)$$

$$\to (w_0,\ (S-\lambda_0)^*y) = ((S-\lambda_0)w_0,\ y) \quad (j\to\infty)$$

$$\therefore \quad Wx = (S-\lambda_0)w_0$$

一方から，$(S-\lambda_0)Wf(\lambda_0) = Wx$．したがって，$\sigma_p(S)=\phi$ の仮定より，$Wf(\lambda_0) = w_0$ となる。故に，

$$\|Wf(\lambda_0)\| = \|w_0\| \leqq n, \text{ よって } \lambda_0 \in F_n$$

となり，F_n は relatively closed in U である。

$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ だから，Baire Category Theorem から，

$$\exists n_0 : F_{n_0}^i \neq \phi$$

$\sigma_p(S)=\phi$ の仮定から，Proposition 4 の証明と全く同じく Stampfli-Wadhwa [10] の結果より

$$\lambda \in F_{n_0}^i \longmapsto Wf(\lambda) \in K$$

は analytic である。故に，任意の $y \in K$ に対して，

$$\lambda \in F_{n_0}' \longmapsto (f(\lambda), W^* y) = (Wf(\lambda), y)$$

は analytic である。W^* の range は dense in H だから，Lemma 2 より

$\exists V \subset F_{n_0}'$ dense open : f は V 上で analytic

が成りたつ。$\boxtimes$

<u>Remark</u>　Theorem において，S が hyponormal で $\sigma_p(S) = \phi$ と特別な場合は，

$$\lambda \in \Omega \longmapsto Wf(\lambda) \in K$$

が既に analytic となる。それは，$\sigma_p(S) = \phi$ の仮定と，

$$Wx \in \bigcap_{\lambda \in \Omega} \mathrm{range}(S - \lambda) = X_S(\mathbb{C} \setminus \Omega)$$

が成りたつことから分かる。したがって，この場合は任意の $y \in K$ に対して

$$\lambda \in \Omega \longmapsto (f(\lambda), W^* y) = (Wf(\lambda), y)$$

が analytic となるから，W^* が dense range をもつことから，Lemma 2 より直ちに Theorem の結論が得られる。

しかし，S が dominant のときには

$$\bigcap_{\lambda \in \Omega} \mathrm{range}(S - \lambda) = X_S(\mathbb{C} \setminus \Omega)$$

は成りたたないので，上の議論が必要となる。

<u>Corollary</u>　$S \in \mathcal{B}(K)$ が hyponormal operator で $T \in \mathcal{B}(H)$ が S の quasi-affine 変換とする。Ω が $\sigma(S)$ の nonempty

open subset で $\bigcap_{\lambda\in\Omega}$ range$(T-\lambda)\neq\{0\}$ とすると，Tは nontrivial invariant subspace をもつ。

Proof　$W\in B(H,K)$ を $SW=WT$ なる quasi-affinity とする。

$\sigma_p(S)\neq\phi$ の場合：　このとき，$\sigma_p(S^*)\neq\phi$ だから，$\lambda\in\sigma_p(S^*)$ をとり，$x\in K$ を λ に対する eigenvector とする。

$$(T^*-\lambda)W^*x=W^*(S^*-\lambda)x=0,\quad W^*x\neq 0$$

より，$\lambda\in\sigma_p(T^*)$ となる。すなわち，$\sigma_p(T^*)\neq\phi$ でTは nontrivial invariant subspace をもつ。

$\sigma_p(S)=\phi$ の場合：　nonzero vector $x_0\in\bigcap_{\lambda\in\Omega}$ range$(T-\lambda)$ をとると，

$$\forall\lambda\in\Omega,\ \exists f(\lambda)\in H:\ (T-\lambda)f(\lambda)=x_0$$

Theorem より，open set $\Omega_0\subset\Omega$ が存在して，f は Ω_0 上で analytic で，$(T-\lambda)f(\lambda)\equiv x_0$ on Ω_0 が成りたつ。

$$\therefore\ x_0\in X_T(\mathbb{C}\setminus\Omega_0)$$

$X_T(\mathbb{C}\setminus\Omega_0)$ の closure を $\mathfrak{M}$ とおくと，$\mathfrak{M}\neq\{0\}$．また，S は hyponormal だから，$X_S(\mathbb{C}\setminus\Omega_0)$ は closed である。$\Omega_0\subset\sigma(S)$ より，$\sigma(S)\not\subset\mathbb{C}\setminus\Omega_0$，ゆえに Lemma 1 より，$X_S(\mathbb{C}\setminus\Omega_0)\neq K$ である。

$x\in X_T(\mathbb{C}\setminus\Omega_0)$ を任意にとると analytic function $g:\Omega\to H$ が存在して，$(T-\lambda)g(\lambda)\equiv x$ on Ω_0 となるから，

$$(S-\lambda)Wg(\lambda) = W(T-\lambda)g(\lambda) \equiv Wx \quad \text{on } \Omega_0$$

と $\lambda \in \Omega_0 \mapsto Wg(\lambda) \in K$ の analyticity から

$Wx \in X_S(\mathbb{C}\setminus\Omega_0)$ ，よって $W\mathfrak{M} \subset X_S(\mathbb{C}\setminus\Omega_0) \subsetneq K$

$\mathfrak{M} = H$ ならば $W\mathfrak{M}$ の closure が K 全体となって矛盾を生ずるから，$\mathfrak{M} \neq H$.

$\therefore \{0\} \neq \mathfrak{M} \neq H$, $T\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$ $\boxed{}$

文　献

[1] S. Clary, Equality of spectra of quasi-similar hyponormal operators, Proc. Amer. Math. Soc. 53 (1975), 88 - 90

[2] K. Clancey, On the local spectra of seminormal operators, Proc. Amer. Math. Soc. 72 (1978), 473 - 479

[3] I. Colojoara and C. Foias, Theory of generalized spectral operators, Gordon and Breach, New York- 1968

[4] C. Fong, Quasi-affine transforms of subnormal operators, Pacific J. Math. 70 (1977), 361 - 368

[5] E. Goya and T. Saito, Invariant subspace problem に関連した dominant operators についての最近の結果，数研講究録 377 (1980), 23-49

[6] E. Goya and T. Saito, Quasi-affine transforms of dominant operators, pre-print

[7] C. Putnam, Peak sets and subnormal operators, Illinois J. Math. 21 (1977), 388 - 394

[8] M. Radjabalipour, Ranges of hyponormal operators, Illinois J. Math. 21 (1977), 70 - 75

[9] J. G. Stampfli and B. L. Wadhwa, An asymmetric Putnam-Fugled theorem for dominant operators, Indiana Univ. Math. J. 25 (1976), 359 - 365

[10] J. G. Stampfli and B. L. Wadhwa, On dominant operators, Monatsh. Math. 84 (1977), 143 - 153