数理解析研究所講究録
第 399 巻 1980 年 15-23

C_p modulo の Fuglede-Putnam の定理について

北海道教育大　　大久保 和義

1. $\mathcal{H}$ を可分なヒルベルト空間として、$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ で $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素環を表わすものとする。以下で、A, B, C, ……，は $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の元を表わす。又、$p > 0$ として $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の部分集合 C_p を Schatten の p-class（i.e. $T \in C_p$ とは $\sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n|^p < \infty$，ただし $\mu_n \in \sigma_p((T^*T)^{1/2})$）とする。特に C_1 を trace class（$\|\cdot\|_1$ を trace norm）、C_2 を Hilbert-Schmidt class（$\|\cdot\|_2$ を H-S norm）とする。1950年に Fuglede は N を normal として $NX = XN$ が成立するときに $N^*X = XN^*$ が成り立つことを示し、さらに翌年 Putnam が N_1, N_2 を normal として，$N_1X = XN_2$ が成立するときに $N_1^*X = XN_2^*$ が成り立つことを示した。

次に $\mathcal{J}$ を $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の norm ideal とするとき，最近，G. Weiss は Fuglede-Putnam の定理を，N_1, N_2

が normal で

$$N_1X - XN_2 \in \mathcal{I} \Longrightarrow N_1^*X - XN_2^* \in \mathcal{I} \cdots\cdots (*)$$

となるような$\mathcal{I}$はどのようなものか ということを問題にした。(*)は Fuglede の定理を Putnam が拡張したと同様な方法で、N を normal としたとき

$$NX - XN \in \mathcal{I} \Longrightarrow N^*X - XN^* \in \mathcal{I} \cdots\cdots (*)'$$

ということと同値であることが容易にわかり，以後は(*)′の方を考えていく。

2. まず $\mathcal{I} = \{0\}$, $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ ($\mathcal{K}(\mathcal{H})$ は compact operators 全体の集合）とするとき(*)′が成立することは容易である。又 $\mathcal{I} = \mathcal{F}(\mathcal{H})$ ($\mathcal{F}(\mathcal{H})$ は finite rank operators 全体の集合）とすると(*)′は必ずしも成立しない。これは次のようにしてわかる。

$D_1, D_2 \in C_1$ を diagonal, $X_1 \in C_2$ で $X, D \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ を $D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 0 & X_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと

$$DX - XD = \begin{pmatrix} 0 & D_1X_1 - X_1D_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D^*X - XD^* = \begin{pmatrix} 0 & D_1^*X_1 - X_1D_2^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

で、$\mathrm{rank}(DX - XD) = 1$, $\mathrm{rank}(D^*X - XD^*) = \infty$ となるように D_1, D_2, X_1 を構成する。D_1, D_2, X_1 を行列表示して、

$$D_1 = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \cdots\cdots\right)$$

$$D_2 = \mathrm{diag}\,(z_1, z_2, z_3, \cdots\cdots)\ ,$$

$X_1 = (x_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$ で　$x_{ij} = 4^{-(i+j)}(2^{-i} - z_j)^{-1}$　とする。

今　(z_j)　を

① $z_j \in P_1$　(P_1 は closed left half plane)

[これは $X_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ の十分条件]

② $|z_j| < 2^{-j}$　[これは $D_2 \in C_1$ の十分条件]

となるようにとる。このとき　$(D_1X_1 - X_1D_2)_{ij} = 4^{-(i+j)}$

となり　rank $(D_1X_1 - X_1D_2) = 1$　がわかる。

一方、$(D_1^*X_1 - X_1D_2^*)_{ij} = 4^{-(i+j)}(2^{-i} - \bar{z}_j)/(2^{-i} - z_j)$

で　rank $(D_1^*X_1 - X_1D_2^*) = \infty$ なるように　(z_j) のとり方にさらに制限をつける。即ち、任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して、

$$x_j = \left(4^{-(i+j)}(2^{-i} - \bar{z}_j)/(2^{-i} - z_j)\right)_{i=1}^{\infty} \quad (1 \le j \le N)$$

は $D_1^*X_1 - X_1D_2^*$ の像に入るから、これらの vectors が1次独立になるようにする。即ち、任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して

$$\det\left(\left(4^{-(i+j)}(2^{-i} - \bar{z}_j)/(2^{-i} - z_j)\right)_{i,j=1}^{N}\right) \neq 0$$

なるように (z_j) をとる。実際に帰納法で $(z_j)_{j=1}^{N}$ までが条件にあうようにとれたとするとき

$$f(z_{N+1}, \bar{z}_{N+1}) = \det\left(\left(4^{-(i+j)}(2^{-i} - \bar{z}_j)/(2^{-i} - z_j)\right)_{i,j=1}^{N+1}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N+1} (-1)^{N+1-i} D_i\, 4^{-(i+N+1)}(2^{-i} - \bar{z}_{N+1})/(2^{-i} - z_{N+1})$$

(D_i は $(i, N+1)$ における小行列式)

で $f(z_{N+1}, \bar{z}_{N+1})$ が ①,② の条件をみたす z_{N+1} で常に 0

とすると $D_{k+1} \neq 0$（帰納法の仮定）に反することがわかる。

3．次に $\mathcal{J} = C_p$ の場合を考える。

D. Voiculescu [3] は、次の定理を示した。

［定理 1］ N を normal とするとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，diagonal D と unitary U が存在して，

$N - UDU^* \in C_2$ かつ $\| N - UDU^* \|_2 < \varepsilon$ とできる

証明は［5］で紹介してある。

G. Weiss は［4］で $\mathcal{J} = C_2$ のとき次の定理を示した。
証明は generating function を用いてなされているがここでは 定理 1 の結果を用いて示す。

［定理 2］ N を normal，X を任意の operator とするとき

$$\| NX - XN \|_2 = \| N^*X - XN^* \|_2$$ が成立．

証明．定理 1 より diagonal D_n と Unitary U_n が存在して、$N - U_n D_n U_n^* \in C_2$，かつ
$\| N - U_n D_n U_n^* \|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ とできる．

今 $\left| \| NX - XN \|_2 - \| U_n D_n U_n^* X - X U_n D_n U_n^* \|_2 \right|$

$$\leq \| (N - U_n D_n U_n^*) X - X (N - U_n D_n U_n^*) \|_2$$

$$\leq 2 \| N - U_n D_n U_n^* \|_2 \cdot \| X \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

よって $\| U_n D_n U_n^* X - X U_n D_n U_n^* \|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \| NX - XN \|_2$

がいえる。一方 D を diagonal とするとき，任意の $Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して

$$\| DY - YD \|_2 = \| D^*Y - YD^* \|_2$$ は容易に示されるから

$$\| U_n D_n U_n^* X - X U_n D_n U_n^* \|_2$$
$$= \| D_n (U_n^* X U_n) - (U_n^* X U_n) D_n \|_2$$
$$= \| D_n^* (U_n^* X U_n) - (U_n^* X U_n) D_n^* \|_2$$
$$= \| U_n D_n^* U_n^* X - X U_n D_n^* U_n^* \|_2$$
$$\longrightarrow \| N^* X - X N^* \|_2$$ がいえる.

よって定理は成立する。

又 $0<p<1$ のとき $\mathcal{I} = C_p$ とすると $(*)'$ は必ずしも成立しないことがわかっている.

4. 次に $\mathcal{I}$ を $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の norm ideal とするとき，N を $\mathcal{I}$ を modulo とする normal（即ち $NN^* - N^*N \in \mathcal{I}$）のとき

$$NX - XN \in \mathcal{I} \Longrightarrow N^*X - XN^* \in \mathcal{I}$$

が，いかなる $\mathcal{I}$ で成立するかという問題が考えられる。これに関しては，$\mathcal{H}$ の orthonormal basis を $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ として $Se_i = e_{i+1}$ $(i=1,2,\cdots)$（S: unilateral shift operator）とする。このとき $S^*S - SS^* = P_1$（P_1 は e_1 で generate される subspace 上への projection）.

[Proposition 3]　S を unilateral shift, $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ とすると

$$SX - XS \in C_2 \Longrightarrow S^*X - XS^* \in C_2$$

証明．$X = (x_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$, $SX - XS = (a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$, $S^*X - XS^* = (b_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$ と行列表示をすると，

$$a_{ij} = \begin{cases} x_{1,j+1} & (i=1) \\ x_{i-1,j} - x_{i,j+1} & (i \geq 2) \end{cases}$$

$$b_{ij} = \begin{cases} x_{i+1,1} & (j=1) \\ x_{i+1,j} - x_{i,j-1} & (j \geq 2) \end{cases}$$ となる

よって

$$\| SX - XS \|_2^2 = \sum_{j\geq 1} |x_{1,j+1}|^2 + \sum_{\substack{i\geq 2 \\ j\geq 1}} |x_{i-1,j} - x_{i,j+1}|^2 .$$

又

$$\| S^*X - XS^* \|_2^2 = \sum_{i\geq 1} |x_{i+1,1}|^2 + \sum_{\substack{i\geq 1 \\ j\geq 2}} |x_{i+1,j} - x_{i,j-1}|^2$$

$$= \sum_{i\geq 1} |x_{i+1,1}|^2 + \sum_{\substack{i\geq 2 \\ j\geq 1}} |x_{i-1,j} - x_{i,j+1}|^2$$

一方 $\sum_{i\geq 1} |x_{i+1,1}|^2 \leq \sum_{i\geq 1} |x_{i,1}|^2 = \| X^* e_1 \|^2 < \infty$ より

$SX - XS \in C_2 \Longrightarrow S^*X - XS^* \in C_2$ がいえる．

5．次に $\dim \mathcal{H} = n < \infty$ のとき，$p \geq 1$ としたとき

$$\sup \left\{ \frac{\| D^*X - XD^* \|_p}{\| DX - XD \|_p} \;\middle|\; D, X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}),\ D: \text{diagonal} \right\}$$

の値が n, p の函数として求められるかという問題が考

えられるが $n=3,\ p \geqq 1$ に関しては次のことがいえる.

[Proposition 4]　$\dim \mathcal{H} = 3$ とする. 又 $p \geq 1$ とする. D を diagonal, $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ とすると

$$\| DX - XD \|_p = \| D^* X - X D^* \|_p$$

証明. $D = \mathrm{diag}\,(d_i)$, $X = (x_{ij})_{i,j=1}^{3}$ とする.

このとき

$$DX - XD = \left((d_i - d_j)\, x_{ij} \right)_{i,j}$$

$$D^*X - XD^* = \left((\bar{d}_i - \bar{d}_j)\, x_{ij} \right)_{i,j}$$ である

$A = DX - XD = (a_{ij})_{i,j}$　(i.e　$a_{ij} = (d_i - d_j)\, x_{ij}$)

$A_* = D^*X - XD^* = (a'_{ij})_{i,j}$　(i.e.　$a'_{ij} = (\bar{d}_i - \bar{d}_j)\, x_{ij}$)

とすると

$$a_{13}\,\bar{a}_{23}\,a_{21}\,\bar{a}_{31}\,a_{32}\,\bar{a}_{12} + a_{12}\,\bar{a}_{32}\,a_{23}\,\bar{a}_{13}\,a_{31}\,\bar{a}_{21}$$

$$= 2\,|d_1 - d_3|^2\,|d_2 - d_3|^2\,|d_1 - d_2|^2\,\mathrm{Re}\,(x_{12}\,x_{23}\,x_{31}\,\bar{x}_{21}\,\bar{x}_{32}\,\bar{x}_{13})$$

と $|a_{ij}| = |a'_{ij}|$ より

$$\det\,(A^*A - \lambda I) = \det\,(A_*^* A_* - \lambda I)$$

故に $\| DX - XD \|_p = \| D^*X - XD^* \|_p$ が成立する

6. G. Weiss [4] は N を normal operator, $X \in C_2$ かつ $NX - XN \in C_1$ とするとき $\mathrm{tr}\,(NX - XN) = 0$ ($\mathrm{tr}\,A$ は A の trace) を示したが, さらに次のことがいえる。

[定理 5]　次の命題 α), β) で　$\alpha) \Rightarrow \beta)$

α) $\mathcal{I} = C_1$ で $(*)'$ が成立する.

β) N を normal, K を compact とするとき $NK - KN \in C_1$ ならば $\mathrm{tr}(NK - KN) = 0$

証明. α) より $(N+N^*)K - K(N+N^*) \in C_1$ がいえる. 故に $S := \mathrm{Re}\, N$ とすると

$$T = SK - KS \in C_1$$

今 $T - T^* = S(K+K^*) - (K+K^*)S$

$T + T^* = S(K-K^*) + (K-K^*)S$ で

$K+K^*$, $K-K^*$ は compact normal より

$K+K^*$, $K-K^*$ は diagonable.

故に $\mathrm{tr}(T-T^*) = 0 = \mathrm{tr}(T+T^*)$

で $\mathrm{tr}\, T = 0$ が出る.

同様に

$\mathrm{tr}((\mathrm{Im}\, N)K - K(\mathrm{Im}\, N)) = 0$ が示せて

$\mathrm{tr}(NK - KN) = 0$ がいえる.

References

[1] B. A. Fuglede, A commutativity theorem for normal operators, Proc. N. A. S. 36 (1950), 35-40.

[2] C. R. Putnam, On normal operators in Hilbert space, Amer. J. Math. 73 (1951), 357-362.

[3] D. Voiculescu, Some results on norm-ideal perturbations Hilbert space operators, J. Operator Theory 2 (1979), 3-38.

[4] G. Weiss, The Fuglede commutative theorem modulo the Hilbert- Schmidt class and generating functions for matrix operators I, Trans. Amer. Math. Soc. 246 (1978), 193-210.

[5] 大久保和義, Operator の norm-ideal perturbation について 数理解析研究所講究録 377 (1980).