数理解析研究所講究録
第 399 巻 1980 年 38-52



# シフト作用素による不変部分空間の構造

山形大　理　　河村新蔵

この稿は[5]の続きである。$\mathfrak{K}$ を可分なヒルベルト空間、$\mathfrak{K}_n$ をそのコピーとする。$\mathfrak{H}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\oplus\mathfrak{K}_n$ とする。$\mathfrak{H}$ 上のユニタリ作用素 $U$ が $U\mathfrak{K}_n=\mathfrak{K}_{n+1}$ の時、$U$ をシフト作用素という。$S$ を $\sum\oplus\xi_n\longrightarrow\sum\oplus\eta_n$ $(\eta_n=\xi_{n-1})$ である自然なシフト作用素とする。$\mathcal{S}$ を $S$ を含むシフト作用素の族とする。我々の目的は $\mathcal{S}$ の不変部分空間 $\mathfrak{M}$ の構造を研究する事である。[5]の結果をもう一度ここに述べてみよう。

$W(\mathcal{S})=\{W \mid W=US^*,\ U\in\mathcal{S}\}$ とする。

定理　$W(\mathcal{S})$ は群で $S^*W(\mathcal{S})S=W(\mathcal{S})$ とする。$\mathfrak{M}$ を pure で simply な $\mathcal{S}$-不変部分空間とする。この時

$$\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_0\oplus\mathfrak{M}_1\oplus\mathfrak{M}_2\oplus\cdots\qquad,\quad \mathfrak{M}_n=S^n\mathfrak{M}_0$$

となり、simply な不変部分空間 $\mathfrak{M}$ については

$$\mathfrak{H}=(\mathfrak{M}_p)_{-\infty}\oplus\mathfrak{M}_r\oplus\mathfrak{M}_c$$

と三つの *reducing* な不変部分空間に分割される。ここで
$(\mathfrak{M}_p)_{-\infty} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [\mathcal{S}^n \mathfrak{M}_p]$ である。

この稿では全て $W(\mathcal{S})$ は (1) 群 で (2) $S^*W(\mathcal{S})S = W(\mathcal{S})$ の条件をみたしているとする。ここで $\mathcal{S}$ に関する主な記号をあげておこう。

$M(\mathcal{S})$ = $\mathcal{S}$ と $\mathcal{S}^*$ から生成される von Neumann環

$A(\mathcal{S})$ = 1 と $\mathcal{S}$ から生成される環（強位相について閉）

$D(\mathcal{S})$ = $W(\mathcal{S})$ から生成される von Neumann 環

$W(\mathcal{S})$ の条件 (1), (2) より $M(\mathcal{S})$ は $W(\mathcal{S})$ と $\{S^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ より生成される von Neumann 環に一致している事を注意しておく。

**1.** $W(\mathcal{S})$ が条件 (1), (2) をみたしているような $\mathcal{S}$ の例をいくつかあげてみよう。

1-1. 例　$\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{T}) \otimes \mathfrak{K}$，$\mathcal{S} = S \otimes A$，ここで $A$ は $\mathfrak{K}$ 上のユニタリ作用素全体の部分群である。(以下 $A$ あるいは $A_i$ は同様である。)　$S = S\otimes 1$ で $W(\mathcal{S}) = 1\otimes A$ は群で任意の $u \in A$ に対して $S^*\otimes 1 \cdot 1\otimes u \cdot S\otimes 1 = 1\otimes u$ だから、$S^*W(\mathcal{S})S = W(\mathcal{S})$ である。又 $A(\mathcal{S}) = H^\infty(\mathbb{T}) \otimes M(A)$, $M(\mathcal{S}) = L^\infty(\mathbb{T}) \otimes M(A)$, $M(A)$ は $A$ から生成される von Neumann 環とする。

1-2, 例. $\mathfrak{H}=\sum\oplus\mathfrak{K}_n$, $u$ を $\mathfrak{K}$ 上のユニタリ作用素とする。$W(\mathcal{S})=\{W=\sum\oplus u_n \mid u_n=u^n u_0 u^{*n}\quad n\in\mathbb{Z},\ u_0\in A\}$

$M(\mathcal{S})=R(M(A),\mathrm{Ad}\,u)$ : $M(A)$ と*-自己同型写像 $\alpha=\mathrm{Ad}\,u$ によって決まる接合積 (cf. [14, V. 7])

1-3, 例. $\mathfrak{H}=\sum\oplus\mathfrak{K}_n$, $\alpha$ を $M(A)$ 上の*-同型写像とする。$W(\mathcal{S})=\{W=\sum\oplus u_n \mid u_n=\alpha^{-n}(u_0)\quad n\in\mathbb{Z},\ u_0\in A\}$

この時 $M(\mathcal{S})=R(M(A),\alpha)$

1-4, 例. $\mathfrak{H}=\sum\oplus\mathfrak{K}_n$, $u$ を $\mathfrak{K}$ 上の isometry とする。

$W(\mathcal{S})=\{W=\sum\oplus u_n \mid u_n=u u_{n+1} u^*\quad u_n\in A\}$ このとき、

$M(\mathcal{S})$ は $M(A)$ と*-自己縮少写像 $\mathrm{Ad}\,u$ より決まる接合積

1-5, 例 $\mathfrak{H}=\sum\oplus\mathfrak{K}_n$, $W(\mathcal{S})=\{W=\sum\oplus u_n \mid u_n=u_{n+k}\in A$

$n\in\mathbb{Z}\}$ $k$ は自然数 $D(\mathcal{S})$ は $\underbrace{(1\otimes A)\oplus(1\otimes A)\oplus\cdots\oplus(1\otimes A)}_{k}$

と同型。

1-6, 例. $\mathfrak{H}=\sum\oplus\mathfrak{K}_n$ $\mathcal{S}=\mathfrak{H}$ 上のシフト作用素全体。

このとき、$A(\mathcal{S})=\mathfrak{H}$ 上の三角行列全体。$M(\mathcal{S})=B(\mathfrak{H})$.

**2.** $\mathfrak{M}$ を $\mathcal{S}$ の不変部分空間としよう。

$$\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_0\oplus\mathfrak{M}_1\oplus\mathfrak{M}_2\oplus\cdots$$

$\mathfrak{M}_n=S^n[W(\mathcal{S})\mathfrak{M}_0]$ となるから、もし $\mathfrak{M}$ が $W(\mathcal{S})$-不変ならば、$\mathfrak{M}_n=S^n\mathfrak{M}_0$ である。そして $\mathcal{S}$-不変部分空間と $W(\mathcal{S})$ かつ $\mathcal{S}$ の不変部分空間の違いは $\mathfrak{M}_0$ においてのみ起

り、それは本質的な差を生じないので、今後全て $W(\mathcal{S})$-不変な $\mathcal{S}$-不変部分空間，即ち $A(\mathcal{S})$-不変部分空間のみを考える事にする。最初に典型的な不変部分空間を考えてみよう。

$$H^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus \mathfrak{K}_n$$

とすれば、$H^2$ は最も基本的な不変部分空間である。又 $\mathfrak{K}_0$ の部分空間 $\mathfrak{m}_0$ に対して $W(\mathcal{S})\mathfrak{m}_0 \subset \mathfrak{m}_0$（このとき $[W(\mathcal{S})\mathfrak{m}_0] = \mathfrak{m}_0$ である）である時

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{m}_0 \oplus \mathcal{S}\mathfrak{m}_0 \oplus \mathcal{S}^2\mathfrak{m}_0 \oplus \cdots$$

とすれば $\mathfrak{M}$ も $\mathcal{S}$-不変部分空間で $\mathcal{S}^n\mathfrak{m}_0 \subset \mathfrak{K}_n$ である。

$[W(\mathcal{S})\mathfrak{m}_0] = [D(\mathcal{S})\mathfrak{m}_0] = \mathfrak{m}_0 \subset \mathfrak{K}_0$ より $\mathfrak{K}_0$ から $[D(\mathcal{S})\mathfrak{m}_0]$ への射影子 $e$ は $P_0 D(\mathcal{S}) P_0$ と可換である。ここで $P_0$ は $\mathfrak{H}$ から $\mathfrak{K}_0$ への射影子であって、$W(\mathcal{S})$ と可換であるから、$D(\mathcal{S})'$ の元で $P_0 D(\mathcal{S}) P_0$ は $D(\mathcal{S})$ の $P_0$ による reduced von Neumann 環である。この環を $D(\mathcal{S})_0$ と書こう。$i(e) = \sum \oplus x_n$ $(x_n = e)$ とすれば $i(e) \in H(\mathcal{S})'$ である。実際、$S$ とはもちろん可換であって、$W = \sum \oplus u_n \in W(\mathcal{S})$ に対しても $S^{*k} W S^k = \sum \oplus y_n$ ($y_0 = x_k$ となる) $\in W(\mathcal{S})$ であるから $x_k \in D(\mathcal{S})_0$ となり $e x_k = x_k e$ となる。即ち $i(e)W = Wi(e)$

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{m}_0 \oplus S\mathfrak{m}_0 \oplus S^2\mathfrak{m}_0 \oplus \cdots = e\mathfrak{K}_0 \oplus e\mathfrak{K}_1 \oplus e\mathfrak{K}_2 \oplus \cdots$$

であるから $\mathfrak{M} = i(e) H^2$ である。

2-1 定義、 $D(\mathcal{S})'_0$ の射影子 $e$ に対して $\mathcal{S}$-不変部分空間 $\mathfrak{M}=i(e)H^2$ を $H^2$-型 不変部分空間と呼ぶ。

ここで我々は Beurling [1] の定理を思い出してみよう。$L^2(\mathbb{T})$ 上のシフト作用素 $S$ の不変部分空間 $\mathfrak{M}$ は $uH^2$ ( $u$ は $|u(z)|=1$ a.e $z\in\mathbb{T}$ ) と表現される。この時 $L^2(\mathbb{T})=\sum\oplus[e_n]$ ( $e_n(z)=z^n$ ) に対して $u([z^n])=\mathfrak{M}_n$ である。

2-2 定義 $\mathcal{S}$ が次の条件をみたしている時、$\mathcal{S}$ は property (B) を持つという。任意の pure で simply な $\mathcal{S}$-不変部分空間 $\mathfrak{M}$ に対して $M(\mathcal{S})'$ の partial isometry $u$ が存在して $\mathfrak{M}=uH^2$ となり、しかも $\mathfrak{M}_n=u\mathfrak{K}_n$ である。

上の定義の中の不変部分空間 $\mathfrak{M}=uH^2$ について考えてみよう。$P=u^*u$ とすれば $P$ は $M(\mathcal{S})'$ の射影子で $u^*\mathfrak{M}_0=u^*u\mathfrak{K}_0=P\mathfrak{K}_0$ で $P\mathfrak{K}_0\subset\mathfrak{K}_0$ である。実際、$x_0\in\mathfrak{K}_0$, $x_n\in\mathfrak{K}_n$ $(n\neq 0)$ に対して $\langle u^*ux_0, x_n\rangle=\langle ux_0, ux_n\rangle=0$。従って $B(\mathfrak{K}_0)$ の射影子 $e$ が対応して $P\mathfrak{K}_0=e\mathfrak{K}_0$ となる。$P\in W(\mathcal{S})'\subset D(\mathcal{S})'$ より $e=PP_0\in D(\mathcal{S})'_0$ である

又 $PS=SP$ より $P=i(e)$ である。結局、$\mathfrak{n}=\mathcal{U}^*\mathfrak{m}$ $=\mathcal{U}^*UH^2=PH^2=i(e)H^2$ となり、$\mathfrak{n}$ は $H^2$-型の不変部分空間である。又 $U$ によって $P_{\mathfrak{m}_{-\infty}} \sim P_{\mathfrak{n}_{-\infty}}$ (equivelent) である。更に、$P_{\mathfrak{m}_0} \in D(\mathcal{S})'$ であって $V=UP_0$ とすれば、$V \in D(\mathcal{S})'$ で $VV^*=P_{\mathfrak{m}_0}$, $V^*V=i(e)P_0$。即ち $P_{\mathfrak{m}_0}$ と $i(e)P_0 \leqq P_0$ は $D(\mathcal{S})'$ で equivalent である。又 $\mathfrak{m}_0$ と $eR_0$ は wandering な部分空間である。即ち $\{S^n\mathfrak{m}_0\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ( $\{S^n eR_0\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ) は互いに直交する。

2-3 定義 $B(\mathfrak{H})$ の射影子 $P$ が $D(\mathcal{S})'$ の元で、任意の $n$ に対して $S^nPS^{*n}=0$ $(n\neq 0)$ となる時 $P$ は $\mathcal{S}$ に関する wandering な射影子という。

2-4 定理 $\mathcal{S}$ が Property (B) を持つ為の必要十分条件は、$\mathcal{S}$ が次の性質 Property (W) を持つことである。

Property (W) 任意の $\mathcal{S}$ の wandering な射影子は $P_0$ の部分射影子と $D(\mathcal{S})'$ で equivalent である。

証明 条件が $\mathcal{S}$ が Property (B) を持つ為の必要条件である事は上で示したので十分条件である事を示そう。

$\mathfrak{m}$ を pure で simply な $\mathcal{S}$-不変部分空間としよう。$\mathfrak{m}_0=\mathfrak{m}\ominus[\mathcal{S}\mathfrak{m}]$ は $\mathcal{S}$ の wandering な部分空間であるから

$P_0$ の部分射影子 $q$ が存在して $\mathcal{D}(\mathcal{S})'$ で $P_{\mathfrak{m}_0} \sim q$ となる。即ち $\mathcal{D}(\mathcal{S})'$ の partial isometry $V$ で $V^*V = q$ $VV^* = P_{\mathfrak{m}_0}$ となる。 $\tilde{V} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} S^n V S^{*n}$ とすれば $\tilde{V}$ は $M(\mathcal{S})'$ の partial isometry である。又定義より $\tilde{V}\, i(q)\, \mathfrak{R}_n = \mathfrak{m}_n$ となる。即ち $\tilde{V} H^2 = \mathfrak{m}$ である。(証終)

どの様な $\mathcal{S}$ が Property (B) を持つかという事を調べる前に Property (B) を持つのはどの様な $\mathcal{S}$ かという事を調べてみよう。

2-5 定理　$\mathcal{S}$ が Property (B) を持つとする。この時 $\mathfrak{R}$ 上にユニタリ作用素 $u$ が存在し $\alpha = \mathrm{Ad}\, u$ は $\mathcal{D}(\mathcal{S})_0$ 上の*-自己同型写像となり $M(\mathcal{S})$ は $\mathcal{D}(\mathcal{S})_0$ と $\alpha = \mathrm{Ad}\, u$ によって決まる接合積である。(注 $\mathrm{Ad}\, u(x) = uxu^*$ $x \in \mathcal{D}(\mathcal{S})_0$)

証明　$\mathfrak{m} = \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_2 \oplus \mathfrak{R}_3 \oplus \cdots$ とする。$\mathfrak{m}$ は明らかに pure で simply な $\mathcal{S}$-不変部分空間である。従って $\mathcal{D}(\mathcal{S})'$ で $P_1 = P_{\mathfrak{m}_0} \prec P_0$ である。又 $\mathfrak{n} = \mathfrak{R}_{-1} \oplus \mathfrak{R}_0 \oplus \mathfrak{R}_1 \oplus \cdots$ とすれば $\mathcal{D}(\mathcal{S})'$ で $P_{-1} = P_{\mathfrak{n}_0} \prec P_0$ で $P_0 = S P_{-1} S^* \prec S P_0 S^* = P_1$ となる。従って $P_0 \sim P_1$ である([14. Prop. 1.3])。即ち $\mathcal{D}(\mathcal{S})'$ の partial isometry $U$ が存在して $U^*U = P_0$ $UU^* = P_1$ となる。$u = U^*S$ とすれば、$u$ は

$P_0$ 上のユニタリ作用素と考えられる。又 $U = S u^* P_0$ $= S i(u^*) P_0$ である。 $x = \sum \oplus x_n \in D(\mathcal{S})$ に対して $Ux = xU$ であるから $S i(u^*) P_0 (\sum \oplus x_n) P_0 i(u) S^*$ $= (\sum \oplus x_n) P_1$ 。従って $u^* x_0 u = x_1$ である。 $S^n U S^{*n}$ も又 $D(\mathcal{S})'$ の元であるから $u^* x_n u^* = x_{n+1}$ $(n \in \mathbb{Z})$ である。 $S W(\mathcal{S}) S^* \subset W(\mathcal{S})$ より $u D(\mathcal{S})_0 u^* \subset D(\mathcal{S})_0$ 、 $S W(\mathcal{S}) S^* \supset W(\mathcal{S})$ より $u D(\mathcal{S})_0 u^* \supset D(\mathcal{S})_0$ であるから $\alpha = Ad\,u$ は $D(\mathcal{S})_0$ 上の $*$-同型写像である。従って $x_n = \alpha^{-n}(x_0)$ $(x_0 \in D(\mathcal{S})_0)$ となる。(証終)

$M(\mathcal{S})$ が接合積の形になっていても一般的には Property (B) を持たない事は、 $D(\mathcal{S})_0$ が standard に表現されている時、McAsey, Muhley と Saito [9] [10] によって示されているのでどのような $\mathcal{S}$ が Property (B) を持つか調べてみよう。

2-6 命題、 $\mathcal{S}$ が Property (B) をもつとする。この時 $\alpha = Ad\,u$ は $D(\mathcal{S})'_0$ の有限な中心射影子に対して不変である。

証明. $\alpha(z) \neq z$ となる有限な中心射影子が存在するとしよう。 $y = z - z\alpha(z)$ とする。 $y$ は $D(\mathcal{S})_0$ の中心元で $\alpha(y) y = 0$ である。実際 $\alpha(y) y = (\alpha(z) - \alpha(z)\alpha^2(z))(z - z\alpha(z)) = \alpha(z) z - z\alpha(z)\alpha^2(z) - z\alpha(z)^2 + z\alpha(z)^2\alpha^2(z) = z\alpha(z)$

$- z\alpha(z)\alpha^2(z) - z\alpha(z) + z\alpha(z)\alpha^2(z) = 0$

$$\mathfrak{m} = y\mathfrak{K}_0 \oplus (y+\alpha^{-1}(y))\mathfrak{K}_1 \oplus (y+\alpha^{-1}(y))\mathfrak{K}_2 \oplus \cdots$$

とする。$\mathfrak{m}$ は pure で simply な $\mathcal{S}$-不変部分空間で $\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m} \ominus \mathcal{S}\mathfrak{m} = y\mathfrak{K}_0 \oplus \alpha^{-1}(y)\mathfrak{K}_1$ である。Property (W) より

$$P_{\mathfrak{m}_0} = i(y)P_0 + i(\alpha^{-1}(y))P_1 \sim r \leqq P_0$$

である。従って $P_{\mathfrak{m}_0}$ と $r$ の $D(\mathcal{S})'$ での central support $C(P_{\mathfrak{m}_0})$, $C(r)$ は同じである。ここで $y$ に対して $\pi(y) = \sum \oplus y_n$ $(y_n = \alpha^n(y))$ とすれば $\pi(y)$ は $D(\mathcal{S})'$ の中心元であって $P_{\mathfrak{m}_0} = i(y)P_0 + i(\alpha^{-1}(y))P_1 < \pi(y)$ であるから、$C(r) < \pi(y)$ となる。即ち $r \leq rP_0 \leq \pi(y)P_0 = i(y)P_0$。又 $r = r_1 \oplus r_2$ で $D(\mathcal{S})'$ の中で $r_1 \sim i(y)P_0$, $r_2 \sim i(\alpha^{-1}(y))P_1 \sim i(y)P_0$ であるから $D(\mathcal{S})'_0$ の中で $z \geqq y \geqq r = r_1 \oplus r_2$ $r_1 \sim y$, $r_2 \sim y$ となる。$y$ は有限射影子であるからこれは矛盾する。(証終)

$\mathcal{S}$ が Property (B) をもつための十分条件を考えてみよう。$D(\mathcal{S})_0$ と $\alpha = \mathrm{Ad}\,u$ によって決まる接合積を $R(D(\mathcal{S})_0, \alpha)$ と書く事にする。

2-7 命題　$M(\mathcal{S}) = R(D(\mathcal{S})_0, \alpha)$ とする。$M(\mathcal{S})'$ の有限であるとする。$\alpha = \mathrm{Ad}\,u$ が $D(\mathcal{S})'_0$ の中心元を不変にすれば

$\mathcal{S}$ は Property (B) をもつ。

証明. $R(D(\mathcal{S})_0, Ad\, u)' \cong R(D(\mathcal{S})'_0, Ad\, u)$ ([14, P373]) であるから $M(\mathcal{S})'$ が有限であれば $D(\mathcal{S})'_0$ は必然的に有限 von Neumann環である ([11, 7.11.8])

$P$ を $\mathcal{S}$ の wandering な射影子とする。$D(\mathcal{S})'$ の射影子 $P$ と $P_0$ に対して比較定理 [14. V Th.18] より $D(\mathcal{S})'$ の中心射影子 $Z$ が存在して

$$ZP_0 \prec ZP \qquad \text{かつ} \qquad (1-Z)P_0 \succ (1-Z)P$$

となる。$ZP_0 \sim ZP$ である事を示してみよう。$Z$ は $D(\mathcal{S})$ の中心元であるから $Z = \sum \oplus x_n$ ( $x_n = \alpha^{-1}(x_0)$, $x_0$ は $D(\mathcal{S})_0$ の中心元 ) となっており $\alpha$ は $x_0$ を不変にするから、$Z = i(e)$ ( $e = x_0$ は $D(\mathcal{S})_0$ の射影子しかも中心元 ) となっている。従って $Z \in M(\mathcal{S})'$ でもある。

$$\widetilde{ZP_0} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} S^n Z P_0 S^{*n} = i(e) = Z$$

$$\widetilde{ZP} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} S^n Z P S^{*n} \leqq i(e) = Z$$

である。$ZP_0$ と $ZP$ は $D(\mathcal{S})'$ の元である事より $\widetilde{ZP_0}$, $\widetilde{ZP}$ は $M(\mathcal{S})'$ の射影子となる。$ZP_0 \prec ZP$ より $D(\mathcal{S})'$ の partial isometry $V$ が存在して $V^*V = ZP_0$, $VV^* \sim Q \leqq ZP$ となる。$\widetilde{V} = \sum S^n V S^{*n}$ とすれば $\widetilde{V}$ は $M(\mathcal{S})'$ の partial isometry で $\widetilde{V}^*\widetilde{V} = \widetilde{ZP_0} = Z(= i(e))$, $\widetilde{V}\widetilde{V}^* = \widetilde{Q} = \sum S^n Q S^{*n} \leqq \widetilde{ZP} < Z\ (= i(e))$。即ち $Z \sim \widetilde{Q} < Z$ となり $Z$ は

有限射影子であるから $z=\tilde{Q}$ であり、この事から $Q=zP$ 即ち $zP_0 \sim Q = zP$ となる。従って $P \prec P_0$ となって Property (W) を持つ事になり 2-4 より $\mathcal{S}$ は Property (B) をもつ。(証終)

$D(\mathcal{S})'_0$ が真無限 (properly infinite) な時について考えてみよう。

2-8 命題 $M(\mathcal{S}) = R(D(\mathcal{S})_0, Ad\,u)$ とする。$D(\mathcal{S})'_0$ が真無限な von Neumann 環ならば $\mathcal{S}$ は Property (B) をもつ。

証明. $u$ に対して $u_n = u^{*n}$ とし $W = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \oplus u_n$ とおれば $W$ は $\mathfrak{H}$ 上のユニタリ作用素で、この $W$ によって $W^* D(\mathcal{S}) W = \{ W = \sum \oplus W_n \mid v_n = v_0 \}$。従って $W^* D(\mathcal{S}) W$ は $L^2(\mathbb{T}) \otimes \mathfrak{K}$ 上のテンソル積 $1 \otimes D(\mathcal{S})_0$ と spatially に同型である。故に、$D(\mathcal{S})'$ は $B(L^2(\mathbb{T})) \otimes D(\mathcal{S})'_0$ と spatially に同型である。この対応によって $D(\mathcal{S})'$ の $I$ と $P_0$ は $I$ と $q_0 \otimes 1$ に移る。ここで $q_0$ は $L^2(\mathbb{T})$ 上の 1 次元ベクトル空間 $[e_0]$ ($e_0(z) = 1, z \in \mathbb{T}$) への射影子である。$D(\mathcal{S})'_0$ が真無限であるから、$q_0 \otimes 1$ も真無限である。明らかに $q_0 \otimes 1$ の central support は $I$ であるから $q_0 \otimes 1 \sim I$ [14, Prop 1.39] となる。結局 $P_0 \sim I$ であるから任意の wandering projection $P$ に対して $P \prec P_0$ となる。(証終)

2-9.系. $M(\mathcal{S}) = R(D(\mathcal{S})_0, Ad\,u)$, $Ad\,u$ が $D(\mathcal{S})'_0$ の有限な中心射影子を不変にすれば $\mathcal{S}$ は Property (B) をもつ。

証明 von Neumann環 $D(\mathcal{S})'_0$ に対して $D(\mathcal{S})_0$ の中心有限射影子 $z_1$ と中心真無限中心射影子 $z_2$ が存在して

$$I = z_1 + z_2 \qquad z_1 z_2 = 0$$

となる ([14, Chap V. Th 1.19])。

ここで $z$ を $D(\mathcal{S})'_0$ の元とする。$\mathfrak{H}_z = \sum \oplus z R_n$ とする。$z$ は $W(\mathcal{S})$ の元と可換であるから $\mathcal{S}_z = \{U i(z) \mid U \in \mathcal{S}\}$ とすれば $\mathcal{S}_z$ は $\mathfrak{H}_z$ のシフト作用素の族で $M(\mathcal{S}_z) = M(\mathcal{S})\, i(z)$, $D(\mathcal{S}_z) = D(\mathcal{S})\, i(z)$, $D(\mathcal{S}_z)_0 = D(\mathcal{S}) z$ となる。$z_1$ と $z_2$ は $Ad\,u$ によって不変であるから $M(\mathcal{S}_{z_i}) = R(D(\mathcal{S}_{z_i}), Ad\,u z_i)$ と考えられる。$\mathcal{S}_{z_2}$ については $D(\mathcal{S}_{z_2})'_0 = D(\mathcal{S})'_0 z_2$ が真無限であるから Property (B) をもつ。$D(\mathcal{S}_{z_1})'_0 = D(\mathcal{S})'_0 z_1$ は有限 von Neumann であるから $Tr$ を自然な $D(\mathcal{S}_{z_1})'_0$ 上のトレースとする。$Ad\,u_{z_1}$ は中心元を不変にするから $Ad\,u_{z_1}$ は $Tr$ に対して不変である。従って [11] の 7.11.8 より接合積 $R(D(\mathcal{S}_{z_1})'_0, Ad\,u z_1)$ は有限である。これは $M(\mathcal{S}_{z_1}) = R(D(\mathcal{S}_{z_1})_0, Ad\,u z_1)'$ と spatially に同型であるから命題 2-7 の条件をみたしている。従って $\mathcal{S}_{z_1}$ は Property (B) を持つ。$P$ を $\mathcal{S}$ の wandering な射影子とする。$P i(z_1)$, $P i(z_2)$ は wandering な射影子である。従って $D(\mathcal{S}_{z_1})'$ の中

で $P\,i(z_1) \propto P_0\,i(z_1)$、$D(\mathcal{S}_{z_2})'$ の中で $P\,i(z_2) \propto P_0\,i(z_2)$ となる。$i(z_j)\ (j=1,2)$ は $D(\mathcal{S})'$ の中心射影子であるから

$$P = P\,i(z_1) + P\,i(z_2) \propto P_0\,i(z_1) + P_0\,i(z_2) = P_0$$

となる。(証終)

2-5 より 2-9 までの定理、命題、系によって我々は Property (B) の特徴付けを得る事ができる。

2-10. 定理 $\mathcal{S}$ が Property (B) をみたす為の必要十分条件は $M(\mathcal{S}) = R(D(\mathcal{S})_0, \mathrm{Ad}\,u)$ となり $\mathrm{Ad}\,u$ は $D(\mathcal{S})_0$ 上の有限中心元を不変にする事である。

$u=1$ の時は $M(\mathcal{S}) = L^2(\mathrm{T}) \otimes D(\mathcal{S})_0$ となるから次の事を得る。

2-11. 系 $\mathfrak{H} = L^2(\mathrm{T}) \otimes \mathfrak{K}$, $\mathcal{S} = S \otimes A$、ここで $A$ は $\mathfrak{K}$ 上のユニタリ作用素全体の部分群とする。このとき $\mathcal{S}$ は Property (B) をもつ。

## 参考文献

[1] A. Beurling, On two problems concerning linear transformations in Hilbert space, Acta Math., 81 (1949), 239-255.

[2] J. Dixmier, Les algebres d'operateurs dans l'espace Hilbertien, Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[3] P. R. Halmos, Shifts on Hilbert spaces, J. Reine Angew. Math., 208 (1961), 102-112.

[4] H. Helson, Lectures on invariant subspaces, Academic Press, London, New York, 1964.

[5] 河村新蔵, Invariant Subspaces of Shift Operators of Arvitrary Multiplicity, 数解研講究録「作用素環論とその応用」1980.

[6] S. Kawamura and J. Tomiyama, On subdiagonal algebras associated with flows, J. Math. Soc. Japan, 29 (1977), 73-90.

[7] P. Lax, Translation invariant spaces, Acta Math., 101 (1959), 163-178.

[8] R. I. Loebl and P. S. Muhly, Analyticity and flows in von Neumann Algebg, J. Funct. Anal., 29 (1978), 214-252.

[9] M. McAsey, P. S. Muhly and K. S. Saito, Non-self-adjoint crossed products (Invariant Subspaces and Maximality), Trans. A. M. S., 248 (1979), 381-409.

[10] ________, Non-self-adjoint crossed product II,

to appear in J. Math. Soc. Japan.

[11] G. K. Pedersen, $C^*$-algebras and their automorphism groups, Academic Press, London, New York, San Francisco, 1979.

[12] H. Radjavi and P. Rosenthal, Invariant subspaces, Springer-Verlag, New York, Heiderberg, Berlin, 1973.

[13] S. Stratila and L. Zsido, Lectures on von Neumann algebras, Abacus Press, Tunbridge Wells, Kent, England, 1979.

[14] M. Takesaki, Theory of Operator Algebras I, Springer-Verlag, New York, Heiderberg, Berlin, 1979.