数理解析研究所講究録
第 399 巻 1980 年 66-74

Transitive 代数とその諸問題

東北大学　教養部　　御園生善尚

ヒルベルト空間上の有界線形作用素に関する，いわゆる"不変部分空間問題"に関連して，必らずしも $*$-operation に関して閉じていない作用素代数が研究されるようになった．Transitive 代数はその一つで，"不変部分空間問題"に最も密着した作用素代数といえよう．この代数に関する諸問題および 2，3 の結果を紹介するのが本稿の目的である．

<u>1</u>　<u>Transitive 代数と諸問題</u>　Transitive 代数の研究の端緒を開いたのは Arveson [1] である．ヒルベルト空間 H 上のすべての有界線形作用素の作る代数を $\mathcal{B}(H)$，$\mathfrak{A}$ を恒等作用素をもつ $\mathcal{B}(H)$ の部分代数とする．H の任意の 1 次独立な n 個の元 $x_1, \cdots, x_n$ および任意の n ヶの元 $y_1, \cdots, y_n$ に対して

$$\lim_i A_i x_k = y_k \qquad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

となるような $\{A_i\} \subset \mathfrak{A}$ が存在するとき，$\mathfrak{A}$ を n-fold transitive であるという．1-fold transitive 代数を単に transitive であるという．これは Arveson による定義である．

$A \in \mathcal{B}(H)$ に対して，A で不変な H の部分空間の作る束を Lat A で表わし，$\mathfrak{A} \subset \mathcal{B}(H)$ に対しては

$$\mathrm{Lat}\,\mathfrak{A} = \bigcap_{A \in \mathfrak{A}} \mathrm{Lat}\,A$$

とする．また，A と可換な任意の $\mathcal{B}(H)$ の作用素で不変な H の部分空間を，A で hyperinvariant であるという．容易にわかるように，$\mathfrak{A}$ が transitive 代数であるための必要十分条件は $\mathrm{Lat}\,\mathfrak{A} = \{\{0\}, H\}$ である．

Douglass - Pearcy [2] は，transitive 代数に関する基本的な諸問題を次のように整理している．

<u>命題 1</u>　$\mathfrak{A}$ が transitive 代数ならば $\mathfrak{A}$ は強位相に関して $\mathcal{B}(H)$ で稠密である．

<u>命題 2</u>　$\mathfrak{A}$ が transitive 代数ならば，$\mathfrak{A}$ は 2-fold transitive である．

<u>命題 3</u>　$\mathfrak{A}$ が transitive 代数ならば，$\mathfrak{A}' = \{\lambda I\}$ である．

<u>命題 4</u>　恒等作用素のスカラー倍でない $\mathcal{B}(H)$ の任意の作用素は，自明でない hyperinvariant な部分空間をもつ．

<u>命題 5</u>　$\mathcal{B}(H)$ の任意の作用素 A に対して，$\mathrm{Lat}\,A \neq \{\{0\}, H\}$ である．

これらの命題は，すべて未解決であり

命題1 ⇒ 命題2 ⇒ 命題3 ⇔ 命題4 ⇒ 命題5

の関係にある．命題5が成り立つかどうかという問題が，いわゆる"不変部分空間問題"である．

Arvesonは次の定理を与えた．

<u>定理</u>（Arveson） 任意の自然数nに対して，n-fold transitiveな代数は強位相に関して$\mathcal{B}(H)$で稠密である．

さらに，Arvesonは，命題2は次の命題と同値であることを示した．

<u>命題2'</u> $\mathfrak{A}$をtransitive代数とするとき，$\mathfrak{A}$と可換な任意の閉作用素は恒等作用素のスカラー倍である．

これらの諸問題を考えるに当って，transitive代数の定義をRadjavi-Rosenthal［5］に従って，次のように改めて，その本質を失なわない．

<u>定義</u> $\mathcal{B}(H)$の部分代数が弱閉で恒等作用素をもち，かつ

$$\mathrm{Lat}\,\mathfrak{A} = \{\{0\}, H\}$$

であるときtransitiveであるという．

この定義に対して，命題1は次のように述べ替えられる．

<u>命題1'</u> $\mathfrak{A}$がtransitiveならば，$\mathfrak{A} = \mathcal{B}(H)$．

この命題が成り立つかどうかという問題が"transitive代数問題"である．

<u>2　グラフ変換とその分解</u>　Radjavi - Rosenthal [　] は，前節の諸問題を考察するに当って，グラフ変換という概念を導入した．

ヒルベルト空間Hのn個の直和を$H^{(n)}$で表わし，H上の作用素Tのn個の直和を$T^{(n)}$で表わす．$H^{(n)}$の部分空間$\mathfrak{M}$に対して

$$\mathfrak{M} = \{ x \oplus T_1 x \oplus \cdots \oplus T_{n-1} x \mid x \in \mathfrak{D} \}$$

を満たす共通の定義域$\mathfrak{D}$をもつH上の（必らずしも有界でない）作用素$T_1, \ldots, T_{n-1}$が存在するとき，$\mathfrak{M}$を$H^{(n)}$のグラフ部分空間という．また，あるnに対して，上のような作用素をグラフ変換という．

$H^{(n)}$の部分空間$\mathfrak{M}$がグラフ部分空間であるための必要十分条件は

$$x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n \in \mathfrak{M},\ x_1 = 0 \ \Rightarrow\ x_2 = \cdots = x_n = 0$$

がなりたつことである．H上の閉作用素がグラフ変換であることは明らかであるが，グラフ変換は必らずしも閉作用素ではない．閉作用素を考える場合に，その極分解は有力な手段である．グラフ変換に関して，類似の分解定理として，次の結果がある．[4]

<u>定理</u>　$\{ x \oplus T_1 x \oplus \cdots \oplus T_n x \mid x \in \mathfrak{D} \}$

を$H^{(n+1)}$のグラフ部分空間とするとき

$$T_i x = n V_i S x \quad (x \in \mathcal{D} \ ; \ i = 1, 2, \cdots, n)$$

を満たすH上の正値作用素 S および $V_i \in \mathcal{B}(H)$ が存在して

$$V = \begin{bmatrix} V_1 & V_1 & \cdots & V_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ V_n & V_n & \cdots & V_n \end{bmatrix}$$

は $H^{(n)}$ 上の部分的等距離作用素である．さらに

$$P = n \sum_{i=1}^{n} V_i^* V_i$$

とすれば，P は射影作用素で

$$V_i P = V_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

である．

この分解が一意でないことは

$$\{ x \oplus T_1 x \oplus \cdots \oplus T_{n-1} x \mid x \in \mathcal{D} \}$$

が $H^{(n)}$ のグラフ部分空間ならば

$$\{ x \oplus T_1 x \oplus \cdots \oplus T_{n-1} x \oplus T_{n-1} x \mid x \in \mathcal{D} \}$$

が $H^{(n+1)}$ のグラフ部分空間となることから容易にわかる．

3　Transitive代数のグラフ変換　$\mathfrak{A}$ をヒルベルト空間H上の transitive代数とする．

$$\mathfrak{M} = \{ x \oplus T_1 x \oplus \cdots \oplus T_{n-1} x \mid x \in \mathcal{D} \}$$

が $\mathfrak{A}^{(n)} = \{ A^{(n)} \mid A \in \mathfrak{A} \}$ で不変な $H^{(n)}$ のグラフ部分空間であるとき，$\mathfrak{M}$ を $\mathfrak{A}^{(n)}$ の不変グラフ部分空間という．$\mathcal{D}$ は $\mathfrak{A}$ で不

変であるから，$\mathcal{D} \neq \{0\}$ ならば $\mathcal{D}$ は H で稠密である．（以下，$\mathcal{D} \neq \{0\}$ の場合について考えることにする．）　また，ある n に対して，$\mathfrak{A}^{(n)}$ の不変グラフ部分空間を構成するグラフ変換を単に $\mathfrak{A}$ のグラフ変換という．

$\mathfrak{A}$ と可換な $\mathcal{B}(H)$ の作用素の集合を $\mathfrak{A}'$ で表わし，$\mathfrak{A}$ と可換な閉作用素の集合を $\mathfrak{A}'_c$ で表わす．（$\mathfrak{A}'_c$ の閉作用素の定義域も上と同様にして H で稠密である場合を考えることにする．）さらに $\mathfrak{A}$ のグラフ変換の集合を $\mathfrak{A}'_g$ で表わすとき

$$\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}'_c \subset \mathfrak{A}'_g$$

である．

$$\text{命題 } 1 \Rightarrow \mathfrak{A}' = \mathfrak{A}'_c = \mathfrak{A}'_g = \{\lambda I\}$$

であることは明らかで，Arveson の定理は

$$\mathfrak{A}'_g = \{\lambda I\} \Rightarrow \mathfrak{A}' = \mathcal{B}(H)$$

のように述べることができる．[5]　命題 2′ は $\mathfrak{A}'_c = \{\lambda I\}$ に外ならない．次の定理がなりたつ．[4]

<u>定理</u>　$\mathfrak{A}$ を H 上の transitive 代数とし，$\mathfrak{A}'_c = \{\lambda I\}$ とする．任意の n（≥ 2）に対して，$\mathfrak{A}^{(n+1)}$ の任意の不変グラフ部分空間

$$\{x \oplus T_1 x \oplus \cdots \oplus T_n x \mid x \in \mathcal{D}\}$$

に対して，$\{T_1 x \oplus \cdots \oplus T_n x \mid x \in \mathcal{D}\}$ が $H^{(n)}$ で稠密でなければ $\mathfrak{A} = \mathcal{B}(H)$ である．

この定理に関連して，前節の分解定理を用いるとき，次の結果が成立する．

<u>定理</u> $\mathfrak{M} = \{x \oplus T_1 x \oplus \cdots \oplus T_n x \mid x \in \mathfrak{D}\}$ を $H^{(n+1)}$ のグラフ部分空間とするとき，$\{T_1 x \oplus \cdots \oplus T_n x \mid x \in \mathfrak{D}\}$ が $H^{(n)}$ で稠密であるための必要十分条件は

$$n V_i V_j^* = \delta_{ij} I \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

がなりたつことである．さらに，$\mathfrak{A}$ が transitive で，$\mathfrak{M}$ が $\mathfrak{A}^{(n+1)}$ の不変グラフ部分空間ならば

$$n \sum_{i=1}^{n} V_i^* V_i = I$$

である．

命題3に関連した考察をしよう．$x \in H$，$x \neq 0$ に対して

$$\mathfrak{A}(x) = \{A \in \mathfrak{A} \mid Ax = 0\}, \quad \mathfrak{M}(x) = \bigcap_{A \in \mathfrak{A}(x)} \mathfrak{N}(A)$$

とする．ここに $\mathfrak{N}(A) = \{y \in H \mid Ay = 0\}$ である．このとき，次の定理がなりたつ．[3]

<u>定理</u> $\mathfrak{A}$ を transitive 代数とする．$\mathfrak{A}(x) \neq \{0\}$ で $\mathfrak{M}(x)$ が有限次元であるような $x \in H$ が存在すれば $\mathfrak{A}' = \{\lambda I\}$ である．

命題がなりたてば，$\mathfrak{A}(x) \neq \{0\}$ で $\mathfrak{M}(x) = \{\lambda x\}$ であるが，transitive ならば $\mathfrak{A}(x) \neq \{0\}$ は未解決である．さらに

<u>定理</u> $\mathfrak{A}$ を transitive 代数とする．任意の $x \in H$ に対して

$$\mathfrak{A}(x) \neq \{0\}, \quad \mathfrak{M}(x) \text{ は有限次元}$$

ならば $\mathfrak{A} = \mathcal{B}(H)$ である.

4 *Strictly transitive* 代数 $\mathfrak{A}$ を $\mathcal{B}(H)$ の単位元を含む部分代数とする. 任意の $x\ (\neq 0)$, $y \in H$ に対して

$$Ax = y$$

を満たす $A \in \mathfrak{A}$ が存在するとき, $\mathfrak{A}$ を strictly transitive であるという. 一般の線形空間で, $\mathfrak{A}$ が strictly transitive である為の必要十分条件は $\mathrm{Lat}\,\mathfrak{A} = \{\{0\}, H\}$ である. H が有限次元であるとき, $\mathfrak{A}$ が strictly transitive であるための必要条件が $\mathfrak{A} = \mathcal{B}(H)$ であることは, Burnside の定理として知られているが, さらに次の定理がなりたつ. [5]

定理 $\mathfrak{A}$ が弱閉な strictly transitive 代数ならば $\mathfrak{A} = \mathcal{B}(H)$ である.

この定理に類似する結果として, 次の定理がある. [3]

定理 $\mathfrak{A}$ を transitive 代数とする. さらに, H の任意の 1 次独立な x, y に対して

$$Ax = 0, \quad Ay \neq 0$$

を満たす $A \in \mathfrak{A}$ が存在すれば $\mathfrak{A} = \mathcal{B}(H)$ である.

文　献

1 W. B. Arveson, A density theorem for operator al-

gelras, Duke Math. J., 34 (1967), 635 − 647

2. R. G. Douglas and C. Pearcy, Hyperinvariant subspaces and transitive algebras, Michigan Math. J., 19 (1972), 1 − 12

3 御園生善尚 洲之内長一郎 Transitive algebra について，数理解析研究所講究録，338, 70 − 76

4 ―――――― Invariant subspaces problemに関連する operator algebra について，数理解析研究所講究録，377, 141 − 156.

5 H. Radjavi and P. Rosenthal, Invariant subspaces, Springer-Verlag, New York, 1973