数理解析研究所講究録
第 403 巻 1980 年 57-69

On differentiable maps which are not homotopic to any C^∞ stable map

山口大教養　安藤良文

J.N. Mather の一連の論文の結果から，proper な写像の全体の中でいわゆる'nice range'に於いては C^∞ stable proper maps は $C^\infty_{pr}(N, P)$ の中で dense であることが得られた．さらに nice range の外でも位相的な proper stable maps が dense であることも知られた．そこで我々は C^∞ stable map について考え，nice range の外で C^∞ stable map がどのくらいあるかを問題とする．

問題　与えられた写像 $f: N \to P$ が C^∞ stable map には決してホモトピックにならないための位相幾何的な条件を多様体 N と P および f に関する言葉で記述せよ．

この稿では次のような結果をえる．

定理○ N C^∞ 閉多様体, P C^∞多様体
$f: N \to P$ 連続写像. $\dim N = n$ $\dim P = p$ とする.
次のような整数 i が存在すると仮定する.

(1) $(p-n+i)\{i+\frac{1}{2}i(i+1)\}-i^2-(p-n+i)^2+1 > n$ として

(2) 次の(i), (ii)のいずれかが成立する.

(i) 次の (s,t) 成分が $W_{i+s-t}(\gamma)$ である $(p-n+i)$-行列の行列式が零でない

$$\begin{pmatrix} W_i(\gamma) & W_{i-1}(\gamma) & \cdots & \\ W_{i+1}(\gamma) & \ddots & & W_{i-1}(\gamma) \\ & \ddots & W_{i+1}(\gamma) & W_i(\gamma) \end{pmatrix}$$

(ii) $n-p$: even i: even, N と P が orientable でありかつ、次の (s,t) 成分が $P_{\frac{i}{2}+s-t}(\gamma)$ である $\frac{p-n+i}{2}$ 行列の行列式が 2-torsion の元ではない.

$$\begin{pmatrix} P_{\frac{i}{2}}(\gamma) & P_{\frac{i}{2}-1}(\gamma) & \cdots & \\ P_{\frac{i}{2}+1}(\gamma) & \ddots & & P_{\frac{i}{2}-1}(\gamma) \\ & \ddots & P_{\frac{i}{2}+1}(\gamma) & P_{\frac{i}{2}}(\gamma) \end{pmatrix}$$

ここで $\gamma = TN - f^*(TP)$.

このとき, f はいかなる C^∞ stable map にもホモトピックではない(特に $P=\mathbb{R}^P$ の場合には $C^\infty(N, \mathbb{R}^P)$ の中に C^∞ stable map は存在しない).

この稿でよく使われるThom-Boardman singularityとその性質については[2], [7], [10]を参照してほしい。さらにThom-Boardman singularityの双対類については[1]とその文献を参照してほしい。

最初にJ. Matherによる結果を引用していく。$\theta(f)_x$によって germ $f:(N,x)\to(P,f(x))$に沿ったC^∞-vector field つまりC^∞-germ $\xi:(N,x)\to TP$であり、Nのすべての点x'に於いて$\xi(x')\in TP_{f(x')}$であるもののつくる集合を表わす。$\theta(N)_x=\theta(id_N)_x$, $\theta(P)_y=\theta(id_P)_y$とおく。$tf:\theta(N)_x\to\theta(f)_x$と$\omega f:\theta(P)_{f(x)}\to\theta(f)_x$を$tf(\xi)=Tf\circ\xi$と$\omega f(\eta)=\eta\circ f$によって定義する。次の定理は[5]のTheorem 4.1の一部である。

<u>定理1</u> ([5]). $f:N\to P$を proper C^∞ stable map とする。この時

(*) $\theta(f)_x = tf(\theta(N)_x) + \omega f(\theta(P)_{f(x)})$

がすべてのNの点xで成立。

点xにおけるfの階数を$n-i_1$とする。Nの点xにおける局所座標$x_1,\cdots,x_n$とPの点yにおける局所座標$y_1,\cdots,y_p$を次のようにとる。

$$(**)\quad \begin{cases} y_i \circ f = x_i & i \leq n-i_1 \\ d(y_i \circ f)(x) = 0 & n-i_1 < i \leq p \end{cases}$$

こゝで d は differential.

さて $\mathcal{E}$ (resp $\mathcal{E}'$) で 変数 $x_1, \cdots, x_n$ (resp. $x_{n-i_1+1}, \cdots, x_n$) の原点における C^∞ 関数の germ のつくる環を表わす. $\mathcal{E}'^{p-n+i_1}$ により $\mathcal{E}'$ を $(p-n+i_1)$ コかけた積空間 $\mathcal{E}' \times \cdots \times \mathcal{E}'$ とする. 次に $(\ )' : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ を

$$u'(x_{n-i_1+1}, \cdots, x_n) = u(0, \cdots, 0, x_{n-i_1+1}, \cdots x_n)$$

で定義する. $\theta(f)$ を $\mathcal{E}^p$ と普通に同一視したとき, [4. §1] によりある射影: $\theta(f) \longmapsto \mathcal{E}'^{p-n+i_1}$ が存在する. このときこの射影により $tf(\theta(N)_x) + \omega f(\theta(P)_{f(x)})$ は の module $\Omega(f'_\cdot) + [\partial f]$ に写される.

$\Omega(f'_\cdot)$ は次のもので生成される $\mathcal{E}'^{p-n+i_1}$ の $\mathcal{E}'$ — submodule である.

i_1 この vectors $\quad [\partial f'/\partial x_j, \cdots, \partial f_p'/\partial x_j]$
$(j = n-i_1+1, \cdots, n)$

$J'(f) \times \cdots \times J(f')$

$J(f') \equiv (f'_{p-n+i_1}, \cdots, f'_p)$

$[\partial f]$ は 次の $(n-i_1)$ コの vector で生成される $\mathcal{E}'^{p-n+i_1}$ の R-vector space.

*

$$[\partial f_{n-i_1+1}/\partial x_j', \cdots, \partial f_p/\partial x_j']$$
$$(j = 1, \cdots, n-i_1)$$

$\mathcal{E}'$ の maximal ideal を $\mathfrak{m}'$ とかく．$\mathcal{E}'^{p-n+i_1}$ の部分集合 V に対して，標準的射影 $\mathcal{E}'^{p-n+i_1} \mapsto \mathcal{E}'^{p-n+i_1}/\mathfrak{m}'^{k}(\mathcal{E}'^{p-n+i_1})$ による像を $V^{(k-1)}$ とかく．

定理2 ([4]) $k > p$．germ $f : (N, x) \to (P, y)$ に対して定理1の(*)が成立する

$\Updownarrow$

(*) $\quad \Omega(f')^{(k-1)} + [\partial f]^{(k-1)} = (\mathfrak{m}'\mathcal{E}'^{p-n+i_1})^{(k-1)}$

この定理より germ f が stable かどうかは f の $(p+1)$ jet にのみ依存する．(*)が germ f (k jet of f) に対して成立しないとき f を不安定(nonstable)と呼ぶ．$\Sigma(n, p)$ によって $J^k(n, p)$ $(k > p)$ の nonstable k-jets のなす部分集合を表わす．すると $\Sigma(n, p)$ は定理2より $J^k(n, p)$ の alg. subset になる．$J^k_{x,y}(N, P)$ に対して $\Sigma_{x,y}(N, P)$ を考えて，$\Sigma(N, P) = \bigcup_{x,y} \Sigma_{x,y}(N, P)$ を $J^k(N, P)$ の中につくる．次の定理1の系を得る．

5.

系3. fが proper C^∞ stable map
$\Rightarrow$

$$j^k f(N) \cap \Sigma(N, P) = \phi$$

我々の目的は与えられたfに対してfとホモトピックなどんなgに対しても $j^k g(N) \cap \Sigma(N, P) \neq \phi$ なるための条件を得ることである. しかし $\Sigma(N, P)$ はいかにも難しい集合であるので、かわりに $\Sigma(n, p) \supset \Sigma^I(n, p)$ となる Thom-Boardman singularity を考える. そして同様のことを考えるのである.

以下では多様体Nは閉多様体とする. さらに $I = (i)$ or (i, j) に対して Σ^I の双対類を $C^I(TN, f^*(TP))$ で表わす([1]の定義参照)

定理4. $I = (i)$ or (i, j) N;閉多様体.
$f: N \to P$; C^∞ 写像. ($\Sigma^I(n, p)$ が orientable のときは N と P も orientable) このとき
$\Sigma(n, p) \supset \Sigma^{(I, 0, \cdots, 0)}$ であり, $C^I(TN, f^*(TP)) \neq 0$ であるような symbol I が存在すれば、fはいかなる C^∞-stable map にもホモトピックでない(特に $P = \mathbb{R}^p$ ならば $C^\infty(N, \mathbb{R}^p)$ の中に C^∞-stable map はない.)

(証明) g を C^∞-stable map とする. $\Sigma^I(N,P)$ の Whitney's condition (b) ([9]) をみたす stratification を考えると $j^k g : N \to J^k(N,P)$ は stratification に transverse. だから $\Sigma^I(g)$ の双対類が定義できて. それは $C^I(TN, g^*(TP))$ に等しくなる. さてもし f が上の g にホモトピックとすれば. $\Sigma(n,p) \supset \Sigma^I(n,p)$ より $\Sigma^I(g) = \phi$. 故に $C^I(TN, g^*(TP)) = 0$ 一方 $C^I(TN, g^*(TP)) = C^I(TN, f^*(TP))$. 仮定より後者は nonzero だから矛盾である. (証終)

我々は [1] で双対類を特性類で表現する方法を与えたから これは計算可能. 故に次に $\Sigma(n,p) \supset \Sigma^I(n,p)$ なる条件を考えよう.

$I = (i_1 i_2 \cdots i_k)$. そして $\mathcal{E}'/m'^{k+1}$ のイデアル

$$J' = (x_{n-i_1+1}, \cdots, x_{n-i_2})^2 + (x_{n-i_1+1}, \cdots, x_{n-i_3})^3 + \cdots + (x_{n-i_1+1}, \cdots, x_{n-i_k})^k$$

$$g_{n-i_1+1}, \cdots, g_p \in J'$$

とする.

ベクトル $[\partial g/\partial x] \equiv [\partial g_{n-i_1+1}/\partial x_j, \cdots, \partial g_p/\partial x_j]$

$g_{n-i_1+1}, \cdots, g_p$ で生成されるイデアルを $J(g)$ とする.

このとき次の $\mathcal{E}'$ submodule を考える.

$$\Omega(g) \equiv \mathcal{E}'[\partial g/\partial x_{n-i_1+1}] + \cdots + \mathcal{E}'[\partial g/\partial x_p] + \mathcal{J}(g)^{p-n+i_1}$$

$$d(I) \equiv \min\left\{ \dim_{\mathbb{R}} (m'\mathcal{E}'^{\,p-n+i_1})^{(k-1)} / \Omega(g)^{(k-1)} \;\middle|\; g_{n-i_1+1}, \cdots, g_p \text{ が } \mathcal{J}' \text{中で動く} \right\}$$

命題 5　$k > p$，$I = (i_1, i_2, \cdots, i_k)$

$$\Sigma(n, p) \supset \Sigma^I(n, p) \Longleftrightarrow d(I) > n - i_1$$

（証明）まず $\Sigma(n, p) \supset \Sigma^I(n, p)$ を仮定する．これより $\overline{\Sigma}(n, p) \supset \overline{\Sigma}^I(n, p)$（$\overline{}$ は閉包）．このとき $d(I) \leq n - i_1$ と思うと矛盾が生じることを示す．$d(I) \leq n - i_1$ より $\mathcal{J}'$ の中にある $g_{n-i_1+1}, \cdots, g_p$ が存在して

$$\dim (m'\mathcal{E}'^{\,p-n+i_1})^{(k-1)} / \Omega(g)^{(k-1)} \leq n - i_1$$

となる．そこで $(m'\mathcal{E}'^{\,p-n+i_1})^{(k-1)} / \Omega(g)^{(k-1)}$ から $(n - i_1)$ コのベクトル $[\tilde{h}^j_{n-i_1+1}, \cdots, \tilde{h}^j_p]$ $(1 \leq j \leq n - i_1)$ を取ると $(m'\mathcal{E}'^{\,p-n+i_1})^{(k-1)}$ の中に $[h^j_{n-i_1+1}, \cdots, h^j_p]$ が存在して標準的射影で前者のベクトルに写される．そこで germ $f : (N, x) \longrightarrow (P, f(x))$（$k$-jet と言った方が良いが）を次の式で定義する．

$$(***)\quad \begin{cases} y_i \circ f = x_i & (i \leq n-i_1) \\ y_i \circ f = y_i + \sum_{j=1}^{n-i_1} x_j h_i^j & (n-i_1 \lneq i \leq p) \end{cases}$$

すると $\Omega(f_\cdot')$ は $y_{n-i_1+1}, \cdots, y_p$ のみで決まり $(=\Omega(y))$ $[\partial f]$ は $[h^j_{n-i_1+1}, \cdots, h^j_p]$ $(j=1,\cdots,n-i_1)$ 上の $\mathbb{R}$-vectorspace であるから、その作り方より

$$\Omega(f_\cdot')^{(k-1)} + [\partial f]^{(k-1)} = (m' \mathcal{E}^{p-n+i_1})^{(k-1)}$$

即ち f は stable germ となる。一方 f の作り方から f はいわゆる Boardman ideal

$$\mathcal{J}_I = (x_1 \cdots x_{n-i_1}) + (x_1 \cdots x_{n-i_2})^2 + \cdots$$
$$+ (x_1 \cdots \quad x_{n-i_k})^k$$

を考えると $y_i \circ f \in \mathcal{J}_I$ for every i. 故に $j^k f \in \Sigma^I(n,p)$. 最初の仮定より $\Sigma^I(n,p) \subset \Sigma(n,p)$ だから f は nonstable germ となる. これは矛盾である.

逆に $d(I) > n-i_1$ とする. $z \in \Sigma^I(n,p)$ とする. z を適当な coordinate $(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)$ と $(\bar{y}_1,\cdots,\bar{y}_p)$ の下に

$$\begin{cases} \bar{y}_i \circ f = \bar{x}_i & (i \leq n-i_1) \\ d(\bar{y}_i \circ f) = 0 & (n-i_1 < i \leq p) \end{cases}$$

とかいて良い. 一方 $\Sigma(n,p)$ と $\Sigma^I(n,p)$ は N と P の座標変換に関して不変だから $(\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n)$ を $(x_1,\cdots,x_n)$ に $(\bar{y}_1,\cdots,\bar{y}_p)$ を $(y_1,\cdots,y_p)$ に変換する座標変換を f にほどこしたものについて $j^k f$ が $\Sigma(n,p)$ に入るかどうかを問題

にすることと $j^k f$ そのものについてそれを問題にすることは同値である。故に以下では germ f（あるいは z）について

$$\begin{cases} y_i \circ f = x_i & (i \leq n-i_1) \\ d(y_i \circ f) = 0 & (n-i_1 < i \leq p) \end{cases}$$

なるものだけについて考えれば充分である。

$$\dim \left(\Omega(f'_\cdot)^{(k-1)} + [\partial f]^{(k-1)}\right)$$
$$\leq \dim \Omega(f'_\cdot)^{(k-1)} + \dim [\partial f]^{(k-1)}$$
$$\leq \dim (\mathfrak{m}' \mathcal{E}'^{\,p-n+i_1})^{(k-1)} - d(I) + n - i_1$$
$$< \dim (\mathfrak{m}' \mathcal{E}'^{\,p-n+i_1})^{(k-1)}$$

故に

$$\Omega(f'_\cdot)^{(k-1)} + [\partial f]^{(k-1)} \subsetneqq (\mathfrak{m}' \mathcal{E}'^{\,p-n+i_1})^{(k-1)}$$

即ち $z \in \Sigma(n, p)$. （証終）

系 6. $k > p$, $k \geq l+1$, $I = (\underbrace{i, i, \cdots, i}_{l\text{コ}}, 0, \cdots, 0)$

に対して $(p-n+i)\dim(\mathfrak{m}'/\mathfrak{m}'^{\,l+2}) - \{i + i^2 + (p-n+i)^2 - 1\}$

$> n-i$ ならば $\Sigma(n, p) \supset \Sigma^I(n, p)$.

証略）

さて次に定理 を証明しよう.

<u>定理0の証明</u>. 系6で $l=1$ の場合を考えると

$$(p-n+i)\{i+\tfrac{1}{2}i(i+1)\}-i-i^2-(p-n+i)^2+1>n-i$$

$$\Longrightarrow \quad \Sigma(n,p) \supset \Sigma^{(i,0,\cdots,0)}(n,p).$$

一方 [1] により $C^{I}(TN, f^*(TP))$ という dual class はそれぞれ、定理0の中の行列の行列式に等しい。ただし i ; even, $p-n$; even N と P ; orientable の場合の整係数の双対類については modulo 2-torsion で等しい。今我々はその双対類 $C^{I}(TN, f^*(TP))$ が消滅しないと仮定したので定理0は定理4より導かれる。 (証終)

例 7. $C^\infty(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}^n)$, $n=2^\ell \cdot a$ (ただし a ; odd, $\ell \geq 2$, $2^\ell \leq a \leq 2^{\ell-1}(2^\ell-1)$) の中には C^∞ stable map は存在しない

(略証)
$$W(\mathbb{R}P^n) = (1+W_1)^{2^\ell \cdot a}$$
$$= (1+W_1^{2^\ell})^a$$
$$= 1+a\,W_1^{2^\ell}+\cdots$$

定理0の i として 2^ℓ を取ると

$$W_j = 0 \qquad \text{for} \quad 1 \leq j < 2^\ell$$

ゆえに

$$\begin{vmatrix} W_i & & 0 \\ W_{i+1} & \ddots & \\ & & W_{i+1}\ W_i \end{vmatrix} = (W_i)^i = W_1^{2^\ell \cdot 2^\ell} \neq 0$$

系より $\Sigma(n,p) \supset \Sigma^{(2^\ell,0,\cdots,0)}(n,p)$.

このような例は $C^\infty(\mathbb{C}P^n, \mathbb{R}^{2n})$ に対しても Pontrjagin class を考えることにより簡単に構成することができる. $P(\mathbb{C}P^n) = (1+h_n^2)^{n+1}$, h_n は $H^2(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z})$ の generator である.

今後の課題(直接の)は $d(I)$ の計算と $\Sigma(n,p)$ を $\Sigma^I(n,p)$ を細分してできるだけうまく表現すること. もう1つの問題は, この稿の主旨と逆に stable map の構成を Gromov 型の問題に定式化することと思う.

この稿および[1]では双対類を定義する homology theory を singular homology theory で扱ったので多様体Nを閉多様体にしたが、これはNの閉の条件のかわりに map f を proper map の条件に置きかえることもできる.

文　献

[1] Y. Ando, Elimination of certain Thom-Boardman singularities of order two (to appear).

[2] J. M. Boardman, Singularities of differentiable maps, Publ. Math. Inst. HES, 33 (1967), 383-419.

[3] M. Golubitsky and V. Guillemin, Stable Mappings and their singularities, Springer Verlag, 1973.

[4] J. N. Mather, Stability of C^∞ Mappings IV Publ. Math. I.H.E.S., 37 (1969), 223-248.

[5] ———, Stability of C^∞ Mappings V Advances in Math., 4 (1970), 301-336.

[6] ———, Stability of C^∞ Mappings VI, Springer Lecture Notes 192 (1971), 207-253.

[7] ———, On Thom-Boardman singularities, Dynamical Systems, Academic Press, 1973, 233-248

[9] ———, Stratification and Mappings, ibid., 195-232

[10] R. Thom, Les singularités des applications differentiables, Ann. Inst. Four., 6 (1955-56), 43-87.