数理解析研究所講究録
第404巻 1980年 158-162

完全m組グラフ$K_m(n_1,n_2,\cdots,n_m)$のクロー分解について

広島経済大学　田澤新成

§1. 序

$V_1, V_2, \cdots, V_m$はそれぞれ$n_1, n_2, \cdots, n_m$個の点からなる点集合である。各V_iについてその中のどの2点も結ばれてなく，V_iの各点はV_i以外のすべての点と結ばれているようなグラフを完全m組グラフといい，$K_m(n_1,n_2,\cdots,n_m)$と記述する。特に，1点と他の$c\ (\geq 2)$個の点すべてを結ぶ完全2組グラフ$K_2(1,c)$は次数cのクローと呼ぶ。次数cの点をクローの根と呼ぶ。

<u>定義</u>　完全m組グラフ$K_m(n_1,n_2,\cdots,n_m)$が互いに共通の線をもたない次数cのクローの和に書けるならば，$K_m(n_1,n_2,\cdots,n_m)$は次数cのクロー分解をもつといわれる。

論文[2]で$K_m(n_1,n_2,\cdots,n_m)$が次数cのクロー分解をもつための必要条件を与えた。ここでは$\sum_{i=1}^m n_i - \max_j n_j < c$のときの必要十分条件，$\sum_{i=1}^m n_i - \max_j n_j \geq c$のときの必要条件を与える。以下では，一般性を失うことなく$n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_m$とし，$N=$

$\sum_{i=1}^{m} n_i$ とおく。

§2. $N-n_m<c$ のとき

<u>定理1</u>　$N-n_m<c$ のとき完全 m 組グラフ $K_m(n_1, n_2, \cdots, n_m)$ が次数 c のクロー分解をもつための必要十分条件は

(i) $\dfrac{N^2-\sum_{i=1}^{m} n_i^2}{2c}=$ 整数

(ii) $(N-n_m)\left\lceil\dfrac{n_m}{c}\right\rceil \leqq \dfrac{N^2-\sum_{i=1}^{m} n_i^2}{2c} \leqq \sum_{i=1}^{m-1} n_i\left\lfloor\dfrac{N-n_i}{c}\right\rfloor$

である。そこで $\lfloor r\rfloor$ は r を越えない最大の整数，$\lceil r\rceil$ は r 以上の最小の整数である。

証明（必要性）$K_m(n_1, n_2, \cdots, n_m)$ の線の本数は $(N^2-\sum_{i=1}^{m} n_i^2)/2$ であるから，(i)は明らかに必要である。V_i の点 v_{ip} を根とするクローの個数を y_{ip} と書く（$p=1,2,\cdots,n_i$；$i=1,2,\cdots,m$）。$y_i=\sum_{p=1}^{n_i} y_{ip}$ とおく。$N-n_m<c$ であるから $y_m=0$。また，$p=1,2,\cdots,n_i$；$i=1,2,\cdots,m-1$ に対して $n_m \leqq y_{ip}c \leqq N-n_i$ すなわち

$$\left\lceil\frac{n_m}{c}\right\rceil \leqq y_{ip} \leqq \left\lfloor\frac{N-n_i}{c}\right\rfloor \tag{1}$$

である。それ故 $\sum_{i=1}^{m} y_i=\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{p=1}^{n_i} y_{ip}=(N^2-\sum_{i=1}^{m} n_i^2)/2c$ を用いて(ii)を得る。

（十分性）条件(i)と(ii)を用い，若干の計算により $(N^2-\sum_{i=1}^{m} n_i^2)/2c$ が $N-n_m$ の倍数であることがわかる。すなわち

$$\frac{N^2-\sum_{i=1}^{m} n_i^2}{2c}=(N-n_m)a. \qquad (2)$$

次の2つの補題を用意する。下記で $G_{t,u}$ はすべての要素が1なる大きさ $t\times u$ の行列である。

<u>補題2</u>[3]　完全m組グラフ $K_m(n_1, n_2, \cdots, n_m)$ が次数 c のフロー分解をもつための必要十分条件は

(a)　$M_{ii}=0 \quad (i=1,2,\cdots,m)$

(b)　$M_{ij}+M_{ji}^T=G_{n_i,n_j} \quad (i\neq j;\ i,j=1,2,\cdots,m)$

(c)　$\sum_{j=1}^{m} M_{ij}G_{n_j,1}$ の各要素が c の整数倍である。すなわち

$$\sum_{j=1}^{m} M_{ij}G_{n_j,1}=(a_{i1}c, a_{i2}c, \cdots, a_{in_i}c)^T \qquad (i=1,2,\cdots,m) \qquad (3)$$

をみたす m^2 個の0-1部分行列 M_{ij}（大きさ $n_i\times n_j$）からなる0-1行列

$$M=\begin{bmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1m} \\ & \cdots & \\ M_{m1} & \cdots & M_{mm} \end{bmatrix} \qquad (4)$$

が存在することである。

<u>補題3</u>[1]　a_{ip} は $\sum_{i=1}^{m}\sum_{p=1}^{n_i} a_{ip}c=(N^2-\sum_{i=1}^{m} n_i^2)/2$ をみたし，$a_{i1}\geq a_{i2}\geq\cdots\geq a_{in_i}$ をみたす非負の整数とする。このとき条件(a)-(c)をみたす N 次の0-1行列 M が存在するための必要十分条件は

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{p=1}^{k_i} a_{ip}{}^c \leqq \frac{1}{2}\left\{N^2-\sum_{i=1}^{m} n_i{}^2-(N-K)^2+\sum_{i=1}^{m}(n_i-k_i)^2\right\} \tag{5}$$

が $0 \leqq k_i \leqq n_i$ をみたす m 個の整数 k_i のあらゆる組に対して成立することである。ただし $K=k_1+k_2+\cdots+k_m$ である。

補題3における a_{ip} に対し

$$\begin{aligned} a_{ip} &= a \quad (p=1,2,\cdots,n_i;\ i=1,2,\cdots,m-1) \\ a_{mp} &= 0 \quad (p=1,2,\cdots,n_m) \end{aligned} \tag{6}$$

とおく。そこで a は(2)に現われたものである。(6)に対し不等式(5)を検証する。(5)の左辺について $\sum_{i=1}^{m}\sum_{p=1}^{k_i}\alpha_{ip}=a^c K_0$. そこで $K_0=k_1+k_2+\cdots+k_{m-1}$ である。従って((5)の右辺)−((5)の左辺)$=S/2N_0$ を得る。そこで $N_0=n_1+n_2+\cdots+n_m$,

$$S=(N_0-K_0)\left(N^2-\sum_{i=1}^{m}n_i{}^2\right)-N_0\left\{(N-K)^2-\sum_{i=1}^{m}(n_i-k_i)^2\right\} \tag{7}$$

である。$t_i=n_i-k_i$ $(i=1,2,\cdots,m)$, $T_0=\sum_{i=1}^{m-1}t_i$ とおき，若干の計算により

$$S=\left(K_0T_0{}^2-2T_0\sum_{i=1}^{m-1}k_it_i+K_0\sum_{i=1}^{m-1}t_i{}^2\right)+T_0\left(K_0{}^2-\sum_{i=1}^{m-1}k_i{}^2\right)+2T_0(K_0+T_0)(n_m-t_m) \tag{8}$$

を得る。(8)の才1，2，3項すべて非負であるから $S \geqq 0$ であることがわかる。それ故，補題2，3により $K_m(n_1,n_2,\cdots,n_m)$ が次数 c のクロー分解をもつ。（定理1の証明終）

§3. $N-n_m \geqq c$ のとき

定理4　$N-n_m \geq c$ のとき，完全m組グラフ $K_m(n_1, n_2, \cdots, n_m)$ が次数cのクロー分解をもつための必要条件は

(i) $$\frac{N^2 - \sum_{i=1}^{m} n_i^2}{2c} = \text{整数}$$

(iii) $$\frac{N^2 - \sum_{i=1}^{m} n_i^2}{2c} \geq N - n_m$$

である。

証明　(i) は明らか。V_iの点を根とするクローの個数をy_iと書く。分解可能ということから，たかだか1つ，たとえばj_0，を除いてすべてのiに対し$y_i \geq n_i$である。それ故

$$\frac{N^2 - \sum_{i=1}^{m} n_i^2}{2c} = \sum_{i=1}^{m} y_i \geq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j_0}}^{m} n_i = N - n_{j_0} \geq N - n_m \tag{9}$$

すなわち (iii) を得る。

$N-n_m \geq c$ の場合いくつかの十分条件が知られている。特に，$n_1 = n_2 = \cdots = n_m = n$ のとき (iii) は $mn \geq 2c$ となり[3]に見られるように (i) (iii) はまた十分である。

参考文献

[1] J.W.Moon(1962). On the score sequence of an n-partite tournament. Canad. Math. Bull. 5, 51-58.

[2] S.Tazawa(1979). Claw-decomposition and evenly-partite-claw-decomposition of complete multi-partite graphs. Hiroshima Math. J. 9, 503-531.

[3] K.Ushio, S.Tazawa and S.Yamamoto(1978). On claw-decomposition of a complete multi-partite graph. Hiroshima Math. J. 8, 207-210.