数理解析研究所講究録
第 406 巻 1980 年 100-115

MACSYMA の活用例
―― 5段 Runge-Kutta 型の 5 次の極限公式の分類等 ――

電総研　　戸田英雄
都立農芸高校　小野令美

1. Kutta 型5段公式

常微分方程式の初期値問題

$$dy/dx = f(x,y), \quad y(x_0)=y_0 \tag{1}$$

の数値解法で Kutta 型[8] の5段公式を

$$y_{n+1} - y_n = \sum_{i=1}^{5} \mu_i k_i \tag{2}$$

$$k_1 = h\, f(x_n, y_n)$$

$$k_i = h\, f(x_n+\alpha_i h,\ y_n + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j), \quad i=2(1)5$$

と表わす，ここで

$$h = x_{n+1} - x_n, \quad \alpha_i = \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij}, \quad i=2(1)5$$

とする．この公式の係数 $\mu_i, \beta_{ij}, \alpha_i$ を，(2) の Taylor 展開が解の関数の Taylor 展開と，h についてなるべく高次の項まで，その係数が一致するように決める．$O(h^5)$ の8個の項の係数の差を δ_{5j}　$j=1(1)8$ とおくと，つぎのように表わされる：

$$\left|\begin{array}{l}
\delta_{51} = 1/24\left\{\sum_{i=2}^{5}\mu_i\alpha_i^4 - 1/5\right\} \\
\delta_{52} = 1/2\left\{\sum_{i=3}^{5}\mu_i\alpha_i^2 X_{i1} - 1/10\right\} \\
\delta_{53} = 1/2\left\{\sum_{i=3}^{5}\mu_i\alpha_i X_{i2} - 1/15\right\} \\
\delta_{54} = 1/2\left\{\mu_4\beta_{43}X_{32} + \mu_5\sum_{i=3}^{4}\beta_{5i}X_{i2} - 1/60\right\} \\
\delta_{55} = 1/2\left\{\sum_{i=3}^{5}\mu_i X_{i1}^2 - 1/20\right\} \\
\delta_{56} = \mu_4\beta_{43}(\alpha_3+\alpha_4)X_{31} + \mu_5\sum_{i=3}^{4}\beta_{5i}(\alpha_i+\alpha_5)X_{i1} - 7/120 \\
\delta_{57} = 1/6\left\{\sum_{i=3}^{5}\mu_i X_{i3} - 1/20\right\} \\
\delta_{58} = \mu_5\beta_{54}\beta_{43}X_{31} - 1/120
\end{array}\right. \qquad (3)$$

ここで $X_{il} = \sum_{j=2}^{i-1}\beta_{ij}\alpha_j^l$, $l = 1\,(1)\,3$, $i = 1\,(1)\,5$ である．5段5次の公式とするためには

$$\left|\begin{array}{l}
\delta_{11} = 0, \quad \delta_{21} = 0, \quad \delta_{3j} = 0 \quad (j = 1, 2) \\
\delta_{4j} = 0 \quad (j = 1\ (1)\ 4)
\end{array}\right. \qquad (4)$$

$$\delta_{5j} = 0 \quad (j = 1\ (1)\ 8) \qquad (5)$$

をみたすように $\mu_i, \beta_{ij}, \alpha_i$ を決めなければならない．$a_i \neq a_j$ $(i \neq j)$，$0 < \alpha_i \leqq 1$ で (4) と (5) を満足する解を求めることはできないことはよく知られている[6]．そこで (4) と (5) の中から $\delta_{51} = \delta_{52} = \delta_{53} = 0$ を選び，$(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ をパラメタとして μ_i と β_{ij} を解き，これと δ_{54} と δ_{57} に代入すると両方とも $1-\alpha_5$ という因数をもつので[5] $\alpha_5 = 1$ と決めれば $\delta_{54} = \delta_{57} = 0$ にできる．（田中[2),3)]が数値的探索で $\alpha_5 = 1$ とした根拠を与える.）$\alpha_5 = 1$ として，分母に含まれる因数はすべて 0 でないとして，

μ_i, β_{ij} は $(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ を用いてつぎのように表わされる[5].

$$\mu_1 = \frac{p_5}{60\alpha_2\alpha_3\alpha_4}, \quad \mu_2 = \frac{f_{34}}{60\alpha_2(1-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_2)},$$

$$\mu_3 = -\frac{f_{24}}{60\alpha_3(1-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_3)(\alpha_3-\alpha_2)}, \quad \mu_4 = \frac{f_{23}}{60\alpha_4(1-\alpha_4)(\alpha_4-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_2)},$$

$$\mu_5 = -\frac{p_5}{60(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)(1-\alpha_4)},$$

$$\beta_{31} = \frac{\alpha_3\{(5\alpha_3+20\alpha_2^2-15\alpha_2)\alpha_4 - 3\alpha_3 - 10\alpha_2^2 + 9\alpha_2\}}{2\alpha_2 f_{24}}, \quad \beta_{32} = \frac{\alpha_3(\alpha_3-\alpha_2)(3-5\alpha_4)}{2\alpha_2 f_{24}},$$

$$\beta_{41} = \frac{\alpha_4\{(2-5\alpha_2)\alpha_4^2 + (5\alpha_3^2+5\alpha_2\alpha_3-5\alpha_3+5\alpha_2^2-2\alpha_2)\alpha_4 + 20\alpha_2^2\alpha_3^2 - 15\alpha_2^2\alpha_3 - 15\alpha_2\alpha_3^2 + 11\alpha_2\alpha_3\}}{2\alpha_2\alpha_3 f_{23}},$$

$$\beta_{42} = \frac{\alpha_4(\alpha_4-\alpha_2)(-5\alpha_3^2+5\alpha_3-3\alpha_2+5\alpha_2\alpha_4-2\alpha_4)}{2\alpha_2(\alpha_3-\alpha_2)f_{23}}, \quad \beta_{43} = \frac{\alpha_4(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)(2-5\alpha_2)}{2\alpha_3(\alpha_3-\alpha_2)f_{23}},$$

$$\beta_{51} = \frac{\begin{gathered}\Big[\alpha_4^2\{(60\alpha_2^2-60\alpha_2+20)\alpha_3^2 + (-60\alpha_2^2+75\alpha_2-25)\alpha_3 + 20\alpha_2^2 - 30\alpha_2 + 10\} \\ + \alpha_4\{(-60\alpha_2^2+75\alpha_2-25)\alpha_3^2 + (75\alpha_2^2-105\alpha_2+36)\alpha_3 - 25\alpha_2^2 + 39\alpha_2 - 14\} \\ + (20\alpha_2^2-30\alpha_2+10)\alpha_3^2 + (-30\alpha_2^2+46\alpha_2-16)\alpha_3 + 10\alpha_2^2 - 16\alpha_2 + 6\Big]\end{gathered}}{2\alpha_2\alpha_3\alpha_4 p_5},$$

$$\beta_{52} = \frac{\begin{gathered}\Big[-(1-\alpha_2)\{\alpha_4^2(20\alpha_3^2-25\alpha_3-5\alpha_2+10) + \alpha_4(-25\alpha_3^2-5\alpha_2\alpha_3+36\alpha_3+5\alpha_2^2+3\alpha_2-14) \\ - 5\alpha_3^2\alpha_2 + 10\alpha_3^2 + 10\alpha_3\alpha_2 - 16\alpha_3 - 3\alpha_2^2 - 2\alpha_2 + 6\}\Big]\end{gathered}}{2\alpha_2(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_2)p_5},$$

$$\beta_{53} = \frac{(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)\{\alpha_4^2(-20\alpha_2+10) + \alpha_2(25\alpha_2-14) + 5\alpha_2\alpha_3 - 2\alpha_3 - 10\alpha_2 + 6\}}{2\alpha_3(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)p_5},$$

$$\beta_{54} = -\frac{(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)(1-\alpha_4)f_{23}}{\alpha_4(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)p_5} \tag{6}$$

ここで,

$$p_5 \equiv 30\alpha_2\alpha_3\alpha_4 - 20(\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_4+\alpha_4\alpha_2) + 15(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4) - 12 ,$$

$$f_{mn} \equiv 10\alpha_m\alpha_n - 5(\alpha_m+\alpha_n) + 3 , \quad m \neq n ;\ m, n = 2, 3, 4$$

である．(6)を数式処理システムMACSYMA[7]で検算したものの一部を下に示す．

```
(c72) m1;
time= 1 msec.
                 ((30 a2 - 10) a3 - 10 a2 + 5) a4 + (5 - 10 a2) a3 + 5 a2 - 3
(d72)            ------------------------------------------------------------
                                         60 a2 a3 a4
(c73) m2;
time= 1 msec.
                                10 a3 a4 - 5 a4 - 5 a3 + 3
(d73)                    ------------------------------------
                         60 a2 (1 - a2) (a3 - a2) (a4 - a2)
(c74) m3;
time= 3 msec.
                                10 a2 a4 - 5 a4 - 5 a2 + 3
(d74)                  - ------------------------------------
                         60 a3 (a3 - a2) (1 - a3) (a4 - a3)
(c75) m4;
time= 1 msec.
                                10 a2 a3 - 5 a3 - 5 a2 + 3
(d75)                    ------------------------------------
                         60 a4 (a4 - a2) (a4 - a3) (1 - a4)
(c76) m5;
time= 1 msec.
              - 20 (a3 a4 + a2 a4 + a2 a3) + 15 (a4 + a3 + a2) + 30 a2 a3 a4 - 12
(d76)       - ---------------------------------------------------------------------
                                60 (1 - a2) (1 - a3) (1 - a4)
(c77) b31;
time= 1 msec.
                        2             2                     2                2
                 (5 a3  + (20 a2  - 15 a2) a3) a4 - 3 a3  + (9 a2 - 10 a2 ) a3
(d77)            -------------------------------------------------------------
                                       2               2
                             (20 a2  - 10 a2) a4 - 10 a2  + 6 a2
(c78) b32;
time= 2 msec.
                                  a3 (a3 - a2) (3 - 5 a4)
(d78)                      ---------------------------------
                           2 a2 (10 a2 a4 - 5 a4 - 5 a2 + 3)
(c79) b41;
time= 2 msec.
                           3             2                     2              2                       2    2          2
(d79) - ((5 a2 - 2) a4  + ( - 5 a3  + (5 - 5 a2) a3 - 5 a2  + 2 a2) a4  + ((15 a2 - 20 a2 ) a3  + (15 a2  - 11 a2) a3)
                                                                                           2          2            2
                                                                       a4)/((20 a2  - 10 a2) a3  + (6 a2  - 10 a2 ) a3)
(c24) b42;
time= 2 msec.
                                                                  2
                          a4 (a4 - a2) (5 a2 a4 - 2 a4 - 5 a3  + 5 a3 - 3 a2)
(d24)                     --------------------------------------------------
                              2 a2 (a3 - a2) (10 a2 a3 - 5 a3 - 5 a2 + 3)
(c25) b43;
time= 3 msec.
                                (2 - 5 a2) a4 (a4 - a2) (a4 - a3)
(d25)                      ------------------------------------------
                           2 a3 (a3 - a2) (10 a2 a3 - 5 a3 - 5 a2 + 3)
(c26) b52;
time= 3 msec.
                             2                          2            2                           2                             2
(d26) - ((1 - a2) ((20 a3  - 25 a3 - 5 a2 + 10) a4  + ( - 25 a3  - 5 a2 a3 + 36 a3 + 5 a2  + 3 a2 - 14) a4 - 5 a2 a3
                            2                          2
                    + 10 a3  + 10 a2 a3 - 16 a3 - 3 a2  - 2 a2 + 6))
                  /(2 a2 (a3 - a2) (a4 - a2) ( - 20 (a3 a4 + a2 a4 + a2 a3) + 15 (a4 + a3 + a2) + 30 a2 a3 a4 - 12))
(c27) b53;
time= 3 msec.
                                                  2
                (1 - a2) (1 - a3) ((10 - 20 a2) a4  + (25 a2 - 14) a4 + 5 a2 a3 - 2 a3 - 10 a2 + 6)
(d27)     ---------------------------------------------------------------------------------------------
          2 a3 (a3 - a2) (a4 - a3) ( - 20 (a3 a4 + a2 a4 + a2 a3) + 15 (a4 + a3 + a2) + 30 a2 a3 a4 - 12)
(c28) b54;
time= 3 msec.
                         (1 - a2) (1 - a3) (10 a2 a3 - 5 a3 - 5 a2 + 3) (1 - a4)
(d28)     - ------------------------------------------------------------------------------------------
            a4 (a4 - a2) (a4 - a3) ( - 20 (a3 a4 + a2 a4 + a2 a3) + 15 (a4 + a3 + a2) + 30 a2 a3 a4 - 12)
```

2. Kutta 型5段5次の極限公式

$O(h^5)$ の誤差項で 0 とならずに残る $\delta_{55}, \delta_{56}, \delta_{58}$ に (6) の μ_i, β_{ij} を代入して整理すると，

$$\left|\begin{aligned} \delta_{55} &= \frac{-\alpha_2^2(10\alpha_3\alpha_4-5(\alpha_3+\alpha_4)+3)(70\alpha_2\alpha_3\alpha_4-30(\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_4+\alpha_4\alpha_2)+15(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)-9)}{96\, f_{24}\; p_5} \\ \delta_{56} &= -\delta_{58} = \frac{\alpha_2(1-\alpha_2)}{48(10\alpha_2\alpha_4-5(\alpha_2+\alpha_4)+3)} \end{aligned}\right. \qquad (7)$$

となる，ここで $p_5 = 30\alpha_2\alpha_3\alpha_4-20(\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_4+\alpha_4\alpha_2)+15(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)-12$ である．これはMACSYMA[5] で求めた結果であり，それを下に示す，ただし $\delta_{55} = \frac{1}{2}\Delta_{55}$，$\delta_{56} = \Delta_{56}$，$\delta_{58} = \Delta_{58}$ である．

```
(c5) ratsimp( m3*(a2*b32)**2 +m4*x**2 +m5*y**2 -1/20 );
time= 25791 msec.
                   3        2    2          2          3           3       2    2
(d5) - (((700 a2  - 300 a2 ) a3  + (300 a2  - 650 a2 ) a3 + 150 a2  - 75 a2 ) a4
              2         3    2          3          2          3       2           3       2    2
 + ((300 a2  - 650 a2 ) a3  + (660 a2  - 330 a2 ) a3 - 165 a2  + 90 a2 ) a4 + (150 a2  - 75 a2 ) a3

          2         3          3       2
 + (90 a2  - 165 a2 ) a3 + 45 a2  - 27 a2 )

                 3           2                        2                  3            2                           3
/(((144000 a2  - 240000 a2  + 132000 a2 - 24000) a3  + ( - 168000 a2  + 295200 a2  - 170400 a2 + 32400) a3 + 48000 a2

            2                      2                  3            2                     2
 - 88800 a2  + 54000 a2 - 10800) a4  + (( - 168000 a2  + 295200 a2  - 170400 a2 + 32400) a3

              3            2                                    3            2
 + (204000 a2  - 374400 a2  + 225360 a2 - 44640) a3 - 60000 a2  + 115200 a2  - 72720 a2 + 15120) a4

 +             3           2                       2               3            2                             3
   (48000 a2  - 88800 a2  + 54000 a2 - 10800) a3  + ( - 60000 a2  + 115200 a2  - 7
                                                                                 2720 a2 + 15120) a3 + 1
                                                                                                        8000 a2

              2
 - 36000 a2  + 23760 a2 - 5184)
(c6) factor(%);
time= 3571 msec.
          2
(d6) - (a2  ((10 a3 - 5) a4 - 5 a3 + 3) (((70 a2 - 30) a3 - 30 a2 + 15) a4 + (15 - 30 a2) a3 + 15 a2 - 9))
   /(3 2  ((10 a2 - 5) a3 - 5 a2 + 3),((10 a2 - 5) a4 - 5 a2 + 3) (((30 a2 - 20) a3 - 20 a2 + 15) a4 + (15 - 20 a2) a3

    + 15 a2 - 12))

(c11) h56:factor(%);
time= 1186 msec.
                                                a2 (a4 - 1)
(d11)                      Δ56=  - ---------------------------------
                                       4
                                   3 2  ((10 a2 - 5) a4 - 5 a2 + 3)

(c12) ratsimp(m5*a2*b32*b43*b54 -1/120 );
time= 6902 msec.
                                                 a2 a4 - a2
(d12)                      Δ58=   --------------------------------
                                  (480 a2 - 240) a4 - 240 a2 + 144

(c13) factor(%);
lisp: car or cdr of number
time= 235 msec. so far
```

そこで，5次の公式とするためには $\delta_{55}=\delta_{56}=\delta_{58}=0$ としなければならないので，つぎの三通りの場合が考えられる：

A)　$\alpha_2=0$，

B−1)　$\alpha_4=1$ かつ $10\alpha_3\alpha_4-5(\alpha_3+\alpha_4)+3=0$，

B−2)　$\alpha_4=1$ かつ $70\alpha_2\alpha_3\alpha_4-30(\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_4+\alpha_4\alpha_2)+15(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)-9\equiv g_{70}=0$

しかし (6) の示すように，μ_1, μ_2 および β_{i1}, β_{i2} $(i=3,4,5)$ は因数 $\frac{1}{\alpha_2}$ を持ち，また μ_4, μ_5 は因数 $\frac{1}{1-\alpha_4}$ を持つので，このままでは A) または B−1)，B−2) を満足する公式は実現できない．実際田中[2)]の5次のオーダの誤差項を小さくしようとして $\alpha_4\to 1$ にすると，公式の μ_4 と μ_5 が非常に大きくなった理由は (6) より明らかである．また μ_i や β_{ij} はいずれも $\frac{1}{\alpha_2}$ や $\frac{1}{1-\alpha_4}$ の程度なので数式的に処理し極限の場合（これを極限の公式と呼ぶ）を考察すれば，5次の誤差項を消滅させることはできることがわかる．しかし公式には $f_x(x,y)$ や $f_y(x,y)$ が含まれる．

3．結論

$O(h^5)$ の誤差項を小さくするため $\alpha_4\to 1_{-0}$ にすると公式に含まれる μ_4 と μ_5 の絶対値が非常に大きくなるという田中[2)]の結果に着目し，その極限の場合（これを極限公式[5)]と呼ぶ）を考察して $\delta_{5j}=0$ にし，MACSYMA も活用することに

より，5段5次の極限公式には二つの型が存在することがわかった．これらをA型公式群，B型公式群（これはさらにB-1型とB-2型に細分される）とすると，A型公式群には自由なパラメタ α_3 と α_4 が含まれ，B型公式群には自由なパラメタ α_2 が含まれること，および田中の公式[2),3)]はB-2型に属することもわかった．

MACSYMA (project MAC's SYmbolic MAnipulator の略）は，Engleman C., Martin W., Moses J. 氏等により1968年に企画されAutomatic Programming Group (Math. Lab. MIT)において今日なお研究が進められている．MACLISPを記述言語として作成され，DEC 社の PDP-10 TSS の上に構成されている．Version 248 のものでプログラムコードが約160 K語といわれる．

MACSYMA はその機能面でも既存の数式処理システムに比べると格段に充実し，会話型言語として利用できるので，人間の知恵を活用しやすい．この研究で利用したのは MACSYMA の機能からいえばほんの一部（すなわち，多変数の有理式の因数分解を含む式の簡単化）で，これだけでもこの種の研究に十分役立つと思われる．

コンピュータによる数式処理で一番問題となるのは，数式の結果の表現がすぐ膨大になり，メモリのある種の領域がオーバーフロしてしまうことである．MACSYMA では，"Fatal error. Process has terminated, Unable to perform critical I/O"というエラーメッセージを出してMACSYMAの外に出てしまう。もちろん後で引用する式の結果は，一時的にディスク・ファイルに格納しておき必要なときロードするようにしても，なおオーバーフロするような長い式がでてくる．この研究で扱った $m=5$ の Runge-Kutta 系公式の処理が，普通のやり方でMACSYMAと利用してうまくいくギリギリの大きさの問題であったかと思われる．

4．付録

Δ_{55} の因数分解（p.5 の (c6)）はうまくいったが Δ_{58} では因数分解ができなかった．そこで MACSYMA の処理能力をテストするために，いくつかの問題を解かせた．これらのうち

1) この研究での多変数の因数分解
2) 自然数の素因数分解
3) 定積分

の結果の一部を以下に示す．

1) (3)式の δ_{56} をそのまま入力すると

```
(c55) h56:ratsimp(m4*a2*(a3+a4)*b32*b43+m5*(a2*b32*b53*(a3+1)+(a4+1)*b54*x)-7/120);
time= 4372 msec.
                                              2
             ((100 a2 - 50) a3 - 65 a2 + 30) a4  + ((55 a2 - 20) a3 - 25 a2 + 12) a4 + (30 - 55 a2) a3 + 30 a2 - 18
(d55)        ---------------------------------------------------------------------------------------------------
                                   2
                  (2400 a2 - 1200) a4  + ((1200 - 2400 a2) a3 - 1200 a2 + 720) a4 + (1200 a2 - 720) a3

(c56) factor(%);
time= 1094 msec.
                                              2
             ((100 a2 - 50) a3 - 65 a2 + 30) a4  + ((55 a2 - 20) a3 - 25 a2 + 12) a4 + (30 - 55 a2) a3 + 30 a2 - 18
(d56)        ---------------------------------------------------------------------------------------------------
                                              4
                                       5 3 2   (a4 - a3) ((10 a2 - 5) a4 - 5 a2 + 3)
```

となり間違った結果を与えている。そこで４次の条件式を用いて変形した式を下記((c54))のように入力したら正しい結果が得られた。

```
(c54) ratsimp((a3+a4)/24-7/120+(1-a4)*(1/24-m4*a2*b32*b43)+m5*(a4-a3)*x*b54);
time= 1309 msec.
                                                     a2 a4 - a2
(d54)                                     - ----------------------------
                                              (480 a2 - 240) a4 - 240 a2 + 144
        R56
(c55) h57:factor(%);
time= 210 msec.
                                                    a2 (a4 - 1)
(d55)                                     - ----------------------------
                                                 4
                                              3 2  ((10 a2 - 5) a4 - 5 a2 + 3)
```

2) 自然数の素因数分解

```
(c9) 2**(2**n)+1;
time= 15 msec.

                                                          n
                                                         2
(d9)                                                    2    + 1
                                                              (Fermat の予想)
(c10) for i:1 thru 5 do (display(factor(ev(d9,n=i))));        17世紀

(e10)                                         factor(5) = 5         (n = 1)

(e11)                                        factor(17) = 17        (n = 2)
(e12)                                       factor(257) = 257       (n = 3)
(e13)                                     factor(65537) = 65537     (n = 4)

lisp: car or cdr of number         n=5 のとき エラ となる!
time= 987 msec. so far

(c13) factor(4294967297);          2^2^5+1 = 2^32+1 = 4294967297 = 641 × 6700417
lisp: car or cdr of number                                (Euler 18世紀)
time= 536 msec. so far

(c14) for i:2 thru 50 do (display(factor(ev(n,n=i))));

(e14)                                         factor(2) = 2

(e15)                                         factor(3) = 3

                                                          2
(e16)                                         factor(4) = 2

(e17)                                         factor(5) = 5

lisp: car or cdr of number   (6が素因数分解されなかった)
time= 387 msec. so far

(c17) factor(6);
lisp: car or cdr of number
time= 69 msec. so far
```

3) 定積分の問題

i) 正しく処理された例

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt[6]{\cos x}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{5}{12})}{\Gamma(\frac{11}{12})}$$

```
(c46) 1/(cos(x))**(1/6);
time= 48 msec.
                                                                1
(d46)                                                       ---------
                                                                1/6
                                                          cos(x)
(c47) integrate(%,x,0,%pi/2);
time= 602 msec.
                                                                     5
                                                     sqrt(%pi) gamma(--)
                                                                     12
(d47)                                                -------------------
                                                                  11
                                                         2 gamma(--)
                                                                  12
(c48) ev(%,numer);
time= 55 msec.
(d48)                                                      1.7862762
```

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}\,dx = \frac{1}{2k}\log\frac{1+k}{1-k}, \quad |k|<1, \quad k=\frac{1}{2} \text{ のとき } \log 3$$

```
(c20) sin(x)/sqrt(1-k*k*(sin(x))**2);
time= 104 msec.
                                                          sin(x)
(d20)                                               ---------------------
                                                           2    2
                                                    sqrt(1 - k  sin (x))

(c21) integrate(%,x,0,%pi/2);
is  k  zero or nonzero?
nonzero;
is  (k - 1) (k + 1)  positive, negative, or zero?

negative;
time= 16896 msec.
                                                                2
                                                       %i sqrt(1 - k )
                                                       --------------- + k
                                                              2
                                                       sqrt(k  - 1)
                                                   log(--------------------)
                                                                 2
                                                         sqrt(1 - k )
(d21)                                              -------------------------
                                                              k

(c22) ratsimp(%);
time= 2605 msec.
                                                           2             2
                                               %i sqrt(1 - k ) + k sqrt(k  - 1)
                                           log(---------------------------------)
                                                          2                2
                                                   sqrt(k  - 1) sqrt(1 - k )
(d22)                                      --------------------------------------
                                                              k

(c23) ev(%,k=1/2);
time= 630 msec.
(d23)                                                      log(3)
```

ii) 処理しなかった例

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(\sin x)}{\sqrt{\sin x}}\,dx = -\frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2$$

```
(c11) log(sin(x))/sqrt(sin(x));
time= 70 msec.
                                                      log(sin(x))
(d11)                                                 -----------
                                                      sqrt(sin(x))

(c12) integrate(%,x,0,%pi/2);
time= 5099 msec.
                                                   %pi
                                                   ---
                                                    2
                                                   /
                                                   [     log(sin(x))
(d12)                                              I    (------------) dx
                                                   ]     sqrt(sin(x))
                                                   /
                                                   0
```

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

```
(c18) exp(-a*x)*sin(x)/x;
time= 90 msec.
                                                      - a x
                                                    %e      sin(x)
(d18)                                               --------------
                                                          x

(c19) integrate(%,x,0,inf);
is  a  positive, negative, or zero?

pos;
time= 4815 msec.
                                                   inf
                                                   /       - a x
                                                   [     %e      sin(x)
(d19)                                              I    (--------------) dx
                                                   ]           x
                                                   /
                                                   0
```

iii) 間違った結果を与えた例

$$\int_0^1 \frac{\sin^{-1} x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \log 2$$

```
(c13) asin(x)/x;
time= 31 msec.
                                                      asin(x)
(d13)                                                 -------
                                                         x

(c14) integrate(%,x,0,1);
time= 1240 msec.
(d14)                                                    0
```

$$\int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1}\, dx = \frac{\pi^2}{6}$$

```
(c5) x/(exp(x)-1);
time= 32 msec.
                                                        x
(d5)                                                 -------
                                                      x
                                                    %e  - 1

(c6) integrate(%,x,0,inf);
integral is divergent
time= 698 msec. so far
```

iv) エラーメッセージが出力され処理されなかった例

$$\int_0^{\infty} \frac{\log(1+x^3)}{1+x^3}\, dx = \frac{\pi}{3}\left(\sqrt{3}\log 3 - \frac{\pi}{3}\right)$$

```
(c2) log(1+x**3)/(1+x**3);
time= 38 msec.

                                                  3
                                            log(x  + 1)
(d2)                                        -----------
                                              3
                                             x  + 1

(c3) integrate(%,x,0,inf);

markedpdl storage capacity exceeded
2637 msec. so far
```

$$\int_0^{\infty} \log \frac{e^x+1}{e^x-1}\, dx = \frac{\pi^2}{4}$$

```
(c9) log((exp(x)+1)/(exp(x)-1));
time= 42 msec.

                                                  x
                                                %e  + 1
(d9)                                        log(-------)
                                                  x
                                                %e  - 1

(c10) integrate(%,x,0,inf);
lisp: function greaterp rejected argument simpln
time= 356 msec. so far
```

文　献

1) 田中正次： 5個の関数値を使用するRunge-Kutta公式について，情報処理，Vol.7，No.4，pp.181－189 (1966).

2) 田中正次： Runge-Kutta法の打切り誤差に関する研究，東京大学に提出した論文 (1972).

3) 田中正次： Runge-Kutta法の打切り誤差の評価について，情報処理，Vol.17，No.12，pp.1143－1151 (1976).

4) 田中正次： 5段数Runge-Kutta法について，情報処理，Vol.20，No.5，pp.382－391 (1979).

5) 戸田英雄： Runge-Kutta系のある極限公式の打切り誤差についての研究，電総研研究報告第772号 (1977).

6) Butcher, J.C. : On the attainable order of Runge-Kutta methods, Math. Comp., 19, pp.408－417 (1965).

7) Bogen, R. A, MACSYMA Reference Manual Version 6, 7, MIT (1974).

8) Kutta, W. : Beitrag zur näherungsweisen Integration totaler Differentialgleichungen. Z. Math. Phys. 46, pp.435－453 (1901)