数理解析研究所講究録
第 407 巻 1980 年 50-63

微分トポロジーと経済学

東京都立大経済学部
西村和雄

1. はじめに

理論経済学に於けるトポロジーの使用は，1937年のフォンノイマンの斉一成長経路の存在証明［18］，1954年のアロウ・デブリュー〔1〕，マッケンジー〔12〕の一般均衡解の存在証明で，ブラウアー，角谷の不動点定理を用いて以来，1970年代までは，主に存在証明に用いられる点集合トポロジーといわれるものに限られていた。70年代の経済学に於ける微分トポロジーの使用は，1970年のデブリューの論文〔7〕に端を発したように思える。その後，ディアカー，スメールなどによって，それまで微分を用いて研究されてきたものに，トポロジー的視点を入れて，条件の緩和や理論の精致化が試みられた。以下で，この70年代の業績の展望と，残された課題を論じてみよう。

2. 一般均衡モデル

一般均衡の純粋交換モデルでは．経済は．初期保有財 $w^i \in R_+^l = \{x \in R^l \mid x_j \geqq 0 \ j=1,\cdots,l\}$ をもつ個人（$i=1,\cdots,m$）から成り．各個人は．その満足度を表わす指標である効用関数 $u^i : R_+^l \to R_+$ を．所得制約式の下で最大化するように行動している．すなわち．価格ベクトル $p \in R_{++}^l = \{p \in R^l \mid x_j > 0 \ j=1,\cdots,l\}$ が与えられた時．

$$(1) \qquad \begin{array}{ll} & \mathrm{Max}\ u^i(x) \\ \mathrm{s.t.} & px \leqq pw^i \end{array}$$

を解くように．消費決定をするのである．(1)の解は．需要 $x^i(p) \in R_+^l$ といわれる。この需要は．各消費者の全ての財の初期保有量が正．そして効用関数が強い準凹関数という仮定の下で．価格ベクトルに関し連続であることが証明される。その時．総需要関数 $x(p) = \sum_{i=1}^{n} x^i(p)$ も連続である。一般均衡解とは．

$$(2) \qquad x(p) \leqq \sum_{i=1}^{m} w^i(p)$$

即ち．需要が供給によってカバーされるような価格 p^* と．その時の需要 $x(p)^*$ の組のことである．経済では

$$z(p) = x(p) - \sum_{i=1}^{m} w^i(p)$$

を用いて．(2)の均衡条件を

$$(3) \qquad z(p) \leqq 0$$

と表わすことが多い。他に重要なことは，(1) から明らかなように，$x^i(p)=x^i(tp)$ $t>0$ が成り立っていて，超過需要関数も

(4)　　$z(t(p))=z(p)$　$t>0$　(ゼロ次同次性)

という性質をもっている。又，各個人の消費する財の量が多ければ，その効用も大きくなると仮定することによって，(1) の解は，

$$px^i(p)=pw^i(p)$$

を満たしていることが保証され，従って，

$$p\sum_i x^i(p)=p\sum w^i(p)$$

すなわち

(5)　　$pz(p)=0$　　(ワルラス法則)

が導かれる。以上をまとめると

$$z(tp)=z(p),\quad t>0$$

$$pz(p)=0$$

という性質をもつ連続関数 $z:R^l_{++}\to R^l$ が

$$z(p)\leqq 0$$

を満たす均衡価格 p をもつかどうかというのが，一般均衡解の存在問題ということになる。

3．均衡解の一意性

ゼロ次同次性によって，R^l_{++} 全体の代りに

$$\bar{S} = \{ p \in R^{\ell}_{++} \mid \sum_{j=1}^{\ell} p_j^2 = 1 \}$$

の上での．超過需要関数の一般均衡解の存在問題を考えるだけで十分である。Sは．微分可能多様体であり．その閉包$\bar{S}$は．角のある多様体（Manifold with corner）になっている．

いま．$z : S \to R^{\ell}$が．C^2級であると仮定し．便宜上微分可能な$\bar{S}$全体への拡張が存在すると仮定しよう。$\bar{S}$上の均衡価格の集合は．Eとすることにする．次のような条件が　均衡の一意性を保証するものとして知られていた。

(i)　粗代替性（G.S）（根岸［15］）

$$a_{ii} < 0 \qquad i = 1, \cdots, n$$

$$a_{ij} > 0 \qquad i, j = 1, \cdots, n \quad i \neq j$$

(ii)　負優対角性（D.D）（マッケンジー［13］）

$$z_{ii} < 0 \qquad i = 1, \cdots, n$$

かつ適当な$d_1, \cdots d_n$に対して

$$d_i |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} d_j |a_{ij}| \qquad i = 1, \cdots, n$$

(iii)　ゲール・二階堂条件（G.N）（［10］）

$$|a_{i_1 i_1}| < 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{i_1, i_1} & a_{i_1, i_2} \\ a_{i_2, i_1} & a_{i_2, i_2} \end{vmatrix} \qquad i_1 \neq i_2$$

$$(-1)^{l-1}\begin{vmatrix} a_{i_1,i_1} & \cdots\cdots & a_{i_1,i_n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_n,i_1} & \cdots\cdots & a_{i_n,i_n} \end{vmatrix} \quad \{i_1,\cdots,i_n\}=\{1,\cdots,n\}$$

いま．$z_{ij}=\dfrac{\partial z_i}{\partial p_j}$ とおいて．

$$(6) \qquad A=\begin{bmatrix} z_{11} & \cdots\cdots & z_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ z_{n1} & \cdots\cdots & z_{nn} \end{bmatrix}$$

という行列を考えると．これはゼロ次同次性から 退化行列になっている。そこで Aから K列，K行を除いた行列

$$(7) \quad A_K = \begin{array}{c} \qquad\quad K \\ \left[\begin{array}{c|c} z_{11} \cdots & \cdots z_{1n} \\ \vdots & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots \\ z_{n1} \cdots & \cdots z_{nn} \end{array}\right] \end{array} < K$$

を考えよう。すると．(i)，(ii)，(iii)の間には．次のような関係が存在する。

Aが(G.S)行列 ⇒ A_Kが(D.D.)行列 ⇒ A_Kが(G.N)行列

以上のアプローチによる．均衡解の一意性の十分条件の最も弱いものとしては．アロウ・ハーン〔2〕による

(8)　全てのAk $k=1,\cdots,n$が．Eの上で
　　(G.N)行列である．

が知られていた．彼らの証明は．誤っていたが．西村〔17〕によって訂正され，更に

(iv)　全てのAk $k=1,\cdots,n$が　Eの上で非退化でかつ
　　各 $\det A_k$ が．Eの上で符号を変えない

という条件に弱められた．

一方．ディアカー〔8〕，ヴァリアン〔20〕による一意性の条件は．次のようにまとめられる．

(v)　(a)　$P\in\bar{S}$に対し．$z_i(P)>0$　if $P_i=0$
　　(b)　$\det Jz(P)$は．Eの上で決してゼロにならず．その符号は一定である．

この証明は．$\bar{S}$の上で．ベクトル場 $\dot{P}=z(P)$を定義する時．(a)から$\bar{S}$の境界に制限したときの特性数が$(-1)^{\ell}$であることから．特性数と．特異点（S上の均衡価格）の指数の間の

$$(9)\qquad \sum_{E}\det Jz(P)=(-1)^{\ell}$$

という関係（ミルナー〔14〕，P.36）と．条件（b）を用いて．均衡が一定であることが丸まる。特性数は．特異点がS上に現われないように．ベクトん場の連続的な変化によっても保たれる（ホモトピー不変）ことから．西村〔18〕は．(v)の

条件 (a) を、次のように一般化した。

$$(\mathrm{vi})\quad \begin{array}{ll} (a) & E \cap \partial \bar{S} = \phi \\ (b) & (\mathrm{v})\text{ の }(b)\text{ と同じ} \end{array}$$

均衡が、境界上に存在しないという条件は、均衡条件

$$\dot{p} = z(p) \leqq 0$$

を調べることによって、多様体 $\bar{S}$ の境界上で、特定の方向 (outward normal direction) を向かないということを意味している。このことが、ベクトル場 $\dot{p} = z(p)$ と境界上で、内側を向き、特性数 $(-1)^{l}$ をもつ、別なベクトル場とのホモトピーの構成を可能にする。従って、(9) の公式が適用され、一意性が来する。

さて最後に、(i) − (iv) の条件が、(vi) を意味していることを 証明することによって、この節のストーリーを完結させよう。いま、(iv) が成り立つとしよう。もし、均衡解 $\bar{p}$ が境界上にあり、$\bar{p}_1 = 0$ であるとすると

$$z_i(k\bar{p}) = z_i(\bar{p}) = 0 \qquad k>0,\ i=2,\cdots,n$$

ここで、$k\bar{p}_1 = \bar{p}_1 = 0$、また、$\bar{p} \in \bar{S}$ なので、ある $i \geqq 2$ について、$k\bar{p}_i \neq \bar{p}_i$ のはずである。従って、$(z_2,\cdots,z_n)$ を $(p_2\cdots p_n)$ の関数とみなした時、$\bar{p}$ の近傍での 1 対 1 対応は、満たされていない。従って、$\det A_1 = 0$ でなければならない。これは、(iv) に矛盾する。

3. 横断性条件の応用

第2節で紹介した条件は、全て$\bar{S}$上の任意の均衡価格で

(R)　ヤコビアン$J(P)$が、正則行列である

ということを、仮定している。この仮定と、境界条件(V)-(a)を用いて、デブリューは、次のような結果を証明した。いま経済の初期保有財のベクトルを、$w=(w^1,\cdots,w^m)\in R^{ml}_{++}$ とすると、超過需要関数が　初期保有量に影響されることを明示して、$z_w(P)$と表わすことにする。$w\in R^{ml}_{++}$に対応して、z_wが決まる。R^{ml}_{++}で　z_wが

(10)　　$P\in E \Rightarrow \det Jz_w(P)\neq 0$

を、満たすような、(i) wの集合は、開集合をなし、(ii) (10)を満たさないようなwの集合は、測度ゼロである。開集合という部分は、超過需要関数z_w　仮定(R)を満たさなくても、(R)を満たす$\{z_{w^n}(P)\}$によって近似できるという意味をもち、又(ii)の部分は、仮定(R)を満たすようなwの集合が　十分大きいということを意味している。サードの定理を用いて、デブリューによって証明された以上の結果は、ディアカー〔9〕、スメール〔19〕によって、超過需要関数を、C^2-級の関数空間の元としてとらえ、横断性の定理を用いて一般化された。

注意しなければならないのは、(R)を満たさないような、

wの集合が測度ゼロであるという事が、その集合が重要でないという事を意味してはいないという点である。このシンポジウムで野口広教授がしばしば指摘されたように、(R)を満たさないようなwの集合が、wをwからw'へ連続的に変化するpathが必ず交差するような集合（図1のll'）であるということもあり得るからである。また、(R)を満たすよ

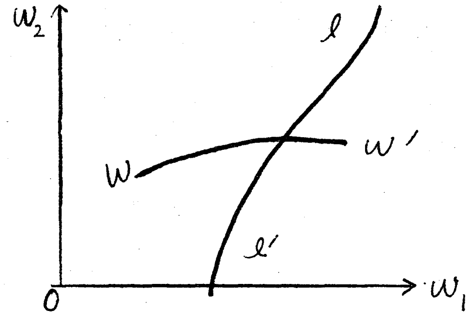

図1

うなwの集合が開集合であるという結果も、余り空間を一般化してゆくと、経済的な意味を失うことになりかねない。この点に関しては、グラモン、カーマン、ニューフィールド[redacted]による、4月1日に提出され、1974年のRewiew of Economic Studies P.289-290に掲載された、次のようなジョークは、示唆的である。いま、Eを経済全体の集合、E^uを一意的な均衡価格をもつ経済の集合とする。δ位相を、

$$\{E, E^u, \phi\}$$

と定義しよう。このとき、一意均衡解をもつ経済は、δ位相に関し、開集合（定義から）になっている。

4. ホップ バイファケーションの応用

数理経済学の最適成長理論といわれる分野では、代表的(平均的)個人の効用の時間を通じた流れの総和を、最大にするという問題、即ち、単一資本財のモデルでは

$$(11)\qquad \int_0^\infty e^{-\rho t} u(c)\,dt \quad \text{s.t.} \quad c = f(k) - gk - \dot{k}$$

という問題を解く。ここでcは、一人当りの消費財、kは、一人当りの資本財である。gは、資本の減価償却率、ρは、個人の時間選好率で、正である。(11)は、

$$(12)\qquad \int_0^\infty e^{-\rho t} u(f(k) - gk - \dot{k})\,dt$$

とまとめることができる。この問題は、ハミルトニアンを、

$$(13)\qquad H(p,k,\dot{k}) = e^{-\rho t} u(f(k) - g(k) - \dot{k}) + p\dot{k}$$

として、最大値原理を適用すると、非自律系の微分方程式が得られるので、

$$(14)\qquad \begin{aligned} H^*(q,k,\dot{k}) &= u(f(k) - gk - \dot{k}) + q\dot{k} \\ q &= e^{\rho} + p \end{aligned}$$

というハミルトニアンを修正して、

$$
(15)\quad
\begin{aligned}
\dot{q} &= \rho q - \frac{\partial \hat{H}^{\nu}}{\partial k} \\
\dot{k} &= \frac{\partial \hat{H}^{\nu}}{\partial q} \\
\hat{H}^{\nu}(q, k) &= \underset{\dot{k}}{\mathrm{Max}}\ H^{\nu}(q, k, \dot{k})
\end{aligned}
$$

という微分方程式を得る。(15) の均衡点 $(\bar{k}(\rho), \bar{q}(k))$

$$
(16)\quad
\begin{aligned}
0 &= \rho q - \frac{\partial \hat{H}^{\nu}}{\partial k} \\
0 &= \frac{\partial \hat{H}^{\nu}}{\partial q}
\end{aligned}
$$

によって定義され、斉一成長解と呼ばれる。単一資本財のモデルで効用関数 u, 生産関数 f が強い凹関数であれば、任意の $\rho > 0$ に対して斉一成長解は一意的で、(15)の解としては鞍点になっていることがキャス〔6〕によって証明された(図2)。

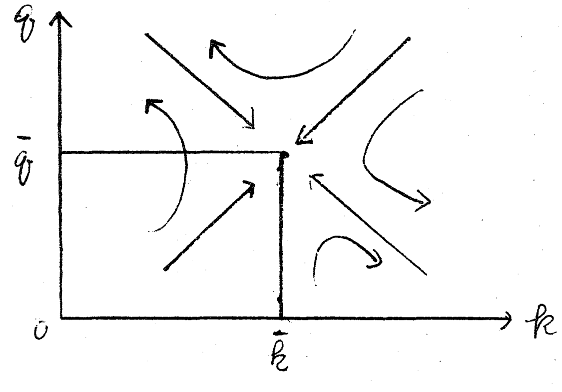

図2

最近のこの分野の研究は、以上の結果を、多数資本財に拡

表することに、力がそそがれてきた。このとき、(15)式の g, k は、各々 n 次元ベクトルとみなされる。斉一成長解の一意性の十分条件は、ブロック〔5〕によって得られた。この結果は、ベンハビブー西村〔3〕によって、時間選好率 ρ が、(15)のホモトピーパラメーターと解釈できることを用いる微分トポロジーの応用によって一般化された。

斉一成長解の安定性については、Journal of Economic Theory 1976年12巻第1号で、多数の経済学者が、鞍点安定の十分条件を与えることに成功した。そこで残された問題は、"ρ が正の時、斉一成長解が一意的、かつ鞍点にもならず全不安定になることがあるかどうか！閉軌道が現われることがあるかどうか！"ということであった。この問題は、ベンハビブー西村〔4〕によって、資本財が二つの時に、一意的で不安定な斉一成長解をもつような経済の例を作ることによって、又、ホップ・バイファケーション〔11〕の存在を証明することによって、閉軌道の現われることが証明された。

最適成長理論は、力学系の理論が最も自然に応用できる分野であるように思える。これからも、数学者と経済学者の手による、この分野の一層の発展を期待したい。

参照文献

1. Arrow, Kenneth, J., and Gerard Debreu, "Existence of and Equilibrium for a Competitive Economy," Econometrica 22, 1954, pp.265-290.

2. ____, F. Hahn, General Competitive Analysis, Holden Day 1971.

3. Benhabib, J., and K. Nishimura, "On the Uniqueness of Steady States in an Economy with Heterogeneous Capital Goods," International Economic Review 20, 1979 February, pp.59-82.

4. ____, and ____, "The Hopf Bifurcation and the Existence and Stability of Closed Orbits in Multi-Sector Models of Optimal Economic Growth," Journal of Economic Theory, 1979 December.

5. Brock, W.A., "Some Results on the Uniqueness of Steady States in Multi-Sector Models of Optimum Economic Growth when Future Utilities are Discounted," International Economic Review 14, 1973 October, pp.535-556

6. Cass, D., "Aggregative Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation," Review of Economic Studies 32, 1965, pp.233-240.

7. Debreu, G., "Economics with a Finite Set of Equilibria," Econometrica 38, 1970 May, pp.387-392.

8. Dierker, E., "Two Remarks on the Number of Equilibria of an Economy," Econometrica 40, 1972 September, pp.951-953.

9. ____, and H, Dierker, "On the Local Uniqueness of Equilibria," Econometrica 40, 1972, pp.867-881.

10. Gale, D., and F.Nikaido, "The Jacobian Matrix and Global Univalance of Mapping," Mathematische Annalen 1965, pp81-93.

11. Hopf. E., Bifurcation of a periodic solution from a stationary solution of a system of differential equations, translated by L.N. Howard and N. Kopell, in "The Hopf Bifurcation and Its Applications" (J.E. Marsden and M. McCracken, Eds.) pp. 163-194, Springer-Verlag, New York, 1976.

12. McKenzie, L., "On Equilibrium in Graham's Model of World Trade and the Competitive Systems," Econometrica 22, 1954.

13. ____, "Matrices with Dominant Diagonal and Economic Theory," in Mathematical Methods in the Social Sciences, ed. by K.J. Arrow, S. Karlin and P. Suppes, Stanford University Press, 1959.

14. Milnor, J., Topology from the Differentiable Viewpoint, The University Press of Virginia, 1965.

15. Negishi, T., "The Stability of a Competitive Economy: A Survey Article," Econometrica 30, 1962 October.

16. Nishimura, K., "A Further Remark on the Number of Equilibria," International Economic Review 19, 1978 October, pp.679-685.

17. ____, "On the Uniqueness Theorems by Arrow and Hahn," Journal of Economic Theory 21, 1979, pp.348-352.

18. von Neumann, J., "Uber ein okonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes," Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums 8, 1937, pp.73-83. Translated in Review of Economic Studies 13, 1945, pp.1-9.

19. Smale, S., "Global Analysis and Economics IIA," Journal of Economic Theory.

20. Varian, H., "A Third Remark on the Number of Equilibria of an Economy," Econometrica 43, 1975 September, pp.985-986.