数理解析研究所講究録
第 407 巻 1980 年 87-89

ある種のDifferential-Delay Equationの周期解の存在

早大　数育　伊藤隆一

Nussbaum [3] にならって，Differential-Delay Equationの周期解の存在を調べる。[3] では

$$y'(t) = af(y(t-1)) \qquad (*)$$

の形の方程式は，仮定 $yf(y) < 0$ for $\forall y \neq 0$, $f'(0) < 0$ $\sup_{y \in R} f(y) < \infty$ のもとで，$a > \frac{\pi}{2}|f'(0)|^{-1}$ ならば，非自明な周期解をもつことを示している。証明は，一種のBifurcation Theoremを用いる。ここでは，(*)を少し一般化して，

$$y'(t) = af(y(t), y(t-1)) \qquad (**)$$

の形の方程式の非自明な周期解の存在を次のような仮定(H)のもとで調べる。

(H) (1) $f: R \times R \longrightarrow R$ は連続的偏微分可能

(2) $\dfrac{\partial f(u,v)}{\partial u} > 0$, $\dfrac{\partial f(u,v)}{\partial v} < 0$

(3) $f(0,0) = 0$

(4) $\sup f(u,v) < \infty$

(5) $a > 0$

(6) $f(u,v)=0$ は (2),(3) より $v=g(u)$, $g(0)=0$
と一意に解けるが，この $g(u)$ は連続で単調増大である。
$g'(0)=m$ とおき，ある $p\geq 2$ に対して，$0<m\leq e^{-p}$ とする。

(7) $u\neq 0$ のとき，$\dfrac{g(u)}{u}<m$

(8) $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial v}=-b$ とおくと，$uv>0$ のとき，
$$\left|\frac{f(u,v)}{u}\right|<bmp$$

定理. f, a, m が (H) をみたすとする。
$$\frac{\cos^{-1}m}{b\sqrt{1-m^2}}<a\leq -\frac{1}{bmp}\log m$$
ならば，(＊＊) は非自明な周期解をもつ。

Kaplan－Yorke [2] は (H) の (2) の式の代りに，$\frac{\partial f}{\partial u}<0$, $\frac{\partial f}{\partial v}<0$ を仮定し，(6),(7),(8) なし位の条件のもとで (＊＊) の周期解の存在と安定性を調べている。

(H) の (1),(2) をみたす方程式 (＊＊) は数理経済学の Kalecki モデル [1] の方程式を非線型にしたものである。その他のモデルでも，(＊＊) の形の方程式が出てくると考えられる。

[1] Kalecki, M: A Macrodynamic Theory of Business cycles, Econometrica Vol 3. (1935) July No.3

[2] Kaplan L & Yorke, J.: On the Nonlinear Diff Delay Equation $x'(t) = -f(x(t), x(t-1))$
J. Diff Eq. 23, 293-314 (1977)

[3] Nussbaum, R.D.: A Global Bifurcation Theorem with Application to Functional Diff. equ.
J. Functional Analysis 19, 319-338 (1975)