数理解析研究所講究録
第 408 巻 1980 年 67-78

空間形内の平行部分多様体の分類とその応用

大阪大学 教養部 竹内 勝

§1 平行部分多様体

正整数 m と $c\in\mathbb{R}$ に対して Riemann 多様体 $M^m(c)$ を以下のように定義する．$c=0$ のときは，$M^m(c)$ は m 次元 Euclid 空間，すなわち $\mathbb{R}^m$ に標準的 Riemann 計量を入れたもの，$c>0$ のときは，$M^m(c)=\{x\in\mathbb{R}^{m+1}\,;\,\sum x_i^2=\frac{1}{c}\}$ に Euclid 空間 $\mathbb{R}^{m+1}$ の Riemann 計量から誘導された Riemann 計量を入れたもの，$c<0$ のときは，$M^m(c)=\{x\in\mathbb{R}^{m+1}\,;\,-x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{m+1}^2=\frac{1}{c},\ x_1>0\}$ に $\mathbb{R}^{m+1}$ の Lorentz 計量 $-x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{m+1}^2$ から誘導された Riemann 計量を入れたものとする．$m\geq 2$ のとき $M^m(c)$ を空間形と呼ぶ．

以下多様体は断らない限り連結であるとする．M を空間形 $M^m(c)$ 内の部分多様体(または等長にはめ込まれた Riemann 多様体)とし，その第 2 基本形式を α，平均曲率ベクトルを η で表わす．M の法接続を $\nabla^\perp$ とし，M 上のベクトル場 X, Y, Z に対して

$$(\nabla^*\alpha)(X, Y, Z) = \nabla_X^{\perp}\alpha(Y, Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z)$$

と定義する．M は (1) $\eta \neq 0$; (2) $\nabla^{\perp}\eta = 0$; (3) $\alpha(X, Y) = \langle X, Y\rangle\eta$ を満たすとき，全臍的であるといわれ，$\nabla^*\alpha = 0$ を満たすとき，平行であるといわれる．以下，$M_i \subset M^{m_i}(c_i) \subset \mathbb{R}^{m_i+1}$, $c_i > 0$, は標準的に埋め込まれた既約対称R空間(§2を参照)を表わす．

定理（竹内[13]）空間形 $M^m(c)$ 内の完備で充満な平行部分多様体 M は以下のものに合同である．

(A) M が $M^m(c)$ 内の完備な全臍的超曲面に含まれていない場合

(i) $c > 0$ のとき　$M_1 \times \cdots \times M_s \subset M^{m_1}(c_1) \times \cdots \times M^{m_s}(c_s) \subset M^m(c)$.
ここで，$s \geqq 1$, $\sum m_i + s - 1 = m$, $\sum \frac{1}{c_i} = \frac{1}{c}$.

(ii) $c = 0$ のとき　$\mathbb{R}^{m_0} \times M_1 \times \cdots \times M_s \subset \mathbb{R}^{m_0} \times \mathbb{R}^{m_1+1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{m_s+1} = M^m(c)$.
ここで，$s \geqq 0$, $m_0 \geqq 1$, $m_0 + \sum m_i + s = m$.

(iii) $c < 0$ のとき　$M^{m_0}(c_0) \times M_1 \times \cdots \times M_s \subset M^{m_0}(c_0) \times M^{m'}(c') \subset M^m(c)$.
ここで，$s \geqq 0$, $m_0 \geqq 1$, $m_0 + m' + 1 = m$, $c_0 < 0$, $c' > 0$, $\frac{1}{c_0} + \frac{1}{c'} = \frac{1}{c}$,
$M_1 \times \cdots \times M_s \subset M^{m'}(c')$ は (i) の部分多様体．

(B) M が $M^m(c)$ 内の完備な全臍的超曲面 N に含まれている場合

N の平均曲率ベクトルの長さを k とすれば，N は $M^{m-1}(c')$, $c' = c + k^2$, に等長同相で，$M \subset N$ は (A) のような部分多様体に合同である．

§2　対称R空間

$\mathfrak{g}$を非コンパクト型実半単純Lie代数とする．さらに，$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$をその一つのCartan分解とするとき，$\mathfrak{p}$の元$e$で$\mathrm{ad}\,e$の固有値が$0, 1, -1$であるものが存在すると仮定する．このような$(\mathfrak{g}, e)$はすべて分類されている（小林−長野[5]，竹内[12]）．Gを$\mathfrak{g}$の随伴群，Kを$\mathfrak{k}$で生成されたGの連結なLie部分群，$K_0=\{k\in K\ ;\ ke=e\}$とし，コンパクトな多様体$M=K/K_0$を考える．$\mathfrak{g}$のKilling形式をBとし，K_0のLie代数$\mathfrak{k}_0$のBに関する直交補空間を$\mathfrak{m}$とすれば，$\mathfrak{m}$はMの原点K_0における接空間と同一視される．M上のK不変なRiemann計量で$\mathfrak{m}$上で$-B$に一致するものをg_0とすれば，(M, g_0)はコンパクト対称空間になる．$n=\dim M$，$m=\dim\mathfrak{p}-1$とおく．このとき，$f_0(kK_0)=ke$ $(k\in K)$によって定義される写像 $f_0:(M, g_0)\longrightarrow(\mathfrak{p}, B)=\mathbb{R}^{m+1}$ は充満で平行な等長埋め込みで，$f_0(M)\subset M^m(\frac{1}{2n})$を満たす．そこで，任意の$c>0$に対して，$g=(1/2nc)g_0$，$f=(1/\sqrt{2nc})f_0$とおけば，写像$f:(M, g)\longrightarrow M^m(c)$が誘導され，$f$は充満で平行な極小等長埋め込みとなる（竹内−小林[14]，Ferus[3]）．(M, g_0)に相似なRiemann多様体(M, g)を対称R空間，fを標準的埋め込みと呼ぶ．また$\mathfrak{g}$が単純であるとき(M, g)を既約という．逆に，完備なRiemann多様体の$M^m(c)$, $c>0$, への充満で平行な極小等

長はめ込み f は，標準的に埋め込まれたある対称R空間への等長被覆写像である（Ferus [4]）．

例1　$\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{R})$ $(n\geq 2)$，$\mathfrak{k}=\mathfrak{o}(n+1)$，$\mathfrak{p}=\{X\in M_{n+1}(\mathbb{R});\ {}^tX=X,\ \mathrm{Tr}\,X=0\}$ とする．このとき，$m+1=\dim\mathfrak{p}=\frac{1}{2}n(n+3)$ で，$e=\mathrm{diag}(1,0,\cdots,0)-\frac{1}{n+1}I\in\mathfrak{p}$ は上記の条件を満たす．この $(\mathfrak{g},e)$ から構成された M は n 次元実射影空間 $P_n(\mathbb{R})=S^n/\{\pm I\}$ と同一視されて，$f_0([x])=\left(x_ix_j-\frac{1}{n+1}\delta_{ij}\right)_{1\leq i,j\leq n+1}$ $(x\in S^n\subset\mathbb{R}^{n+1})$ となる．このとき，標準的埋め込み f は，定曲率 $nc/2(n+1)$ の n 次元実射影空間 $P_n(nc/2(n+1))$ の Laplace 作用素 Δ の才1固有空間を用いた極小埋め込みにほかならない．この f は <u>Veronese の埋め込み</u>と呼ばれる．とくに $n=2$ のとき，$P_2(\frac{c}{3})\subset M^4(c)$ は <u>Veronese 曲面</u>と呼ばれている．

例2　ほかの射影空間 $M=P_n(\mathbb{C})$ $(n\geq 2)$，$P_n(\mathbb{H})$ $(n\geq 2)$，$P_2(\mathbb{O})$ の Laplace 作用素の才1固有空間を用いた極小埋め込み $f:(M,g)\longrightarrow M^m(c)$ も対称R空間の標準的埋め込みとして得られる．これらも <u>Veronese の埋め込み</u>と呼ばれている．一般に，$M\subsetneq M^m(c)$ が階数1の対称R空間であるためには，$M\hookrightarrow M^m(c)$ が Veronese の埋め込みであることが必要十分である．

例3　自然な埋め込み $M^n=M^{m_1}(c_1)\times\cdots\times M^{m_s}(c_s)\subset M^m(c)$ （$n=\sum m_i$，$n+s-1=m$，$c_i>0$，$\sum\frac{1}{c_i}=\frac{1}{c}$，ただし，各

i に対して $c_i m_i = cn$ とする）は対称R空間の標準的埋め込みである. とくに, (イ) $s=1$ のとき, $M = M^m(c) \hookrightarrow M^m(c)$ は恒等写像; (ロ) $s=2$ のとき, $M = M^{m_1}(c_1) \times M^{m_2}(c_2) \subset M^m(c)$ は一般 Clifford トーラスと呼ばれている; (ハ) 各 i に対して $m_i = 1$ のとき, $M = \underbrace{M^1(nc) \times \cdots \times M^1}_{n}(nc) \hookrightarrow M^{2n-1}(c)$ は平坦なトーラスの極小埋め込みである.

§3 応用

(I) (Chern-do Carmo-Kobayashi [2]) $M^{n+p}(c)$, $c>0$, $p \geq 1$, 内のコンパクトな n 次元極小部分多様体 M で, その才2基本形式 α が $\|\alpha\|^2 = nc/(2-\frac{1}{p})$ を満たすものの決定

Simons [11] の不等式より, $\|\alpha\|^2 < nc/(2-\frac{1}{p})$ ならば M は全測地的であるが, Chern 等は上の等式がなりたつときには M は (イ) Veronese 曲面または (ロ) 一般 Clifford トーラスに限ることを証明した. 彼等はさらに, このとき $M \subset M^{n+p}(c)$ は充満, 平行で $p \leq 2$ となることも示している. §1 の定理より, このようなものは (イ) Veronese 曲面 $(p=2)$, (ロ) 一般 Clifford トーラス $(p=1)$, または (ハ) 例3で $s=3$ のもの $(p=2)$ に限ることがわかる. ところが, (イ), (ロ) の場合には $\|\alpha\|^2 = nc/(2-\frac{1}{p})$ となるが, (ハ) の場合には $\|\alpha\|^2 > nc/(2-\frac{1}{p})$ となるので, [2] の別証明が得られた.

(Ⅱ)(阪本[10])空間形内の平面測地的部分多様体の分類

$M^m(c)$ 内の次元 $\geqq 2$ の部分多様体 M は，全測地的でなくて，M の各測地線に対してそれを含む $M^m(c)$ の2次元全測地的部分多様体が存在するとき，平面測地的であるといわれる．このためには，M が平行で，等方的，すなわち M の各単位ベクトル x に対して $\|\alpha(x,x)\|$ が正の定数であることが必要十分である．阪本[10]によれば，完備で充満な平面測地的部分多様体 $M \subset M^m(c)$ は以下のものに限る．

(イ) $M^m(c)$ の完備な全臍的超曲面；

(ロ) $M^m(c)$, $c>0$, 内の Veronese 部分多様体（例2,3を参照）；

(ハ) $M^m(c)$ 内の完備な正曲率全臍的超曲面 $M^{m-1}(c')$, $c'>0$, $c'>c$, のなかの Veronese 部分多様体．

これを示すには，§1の定理の部分多様体 M のなかから等方的なものをえらび出せばよい．まず，M が等方的であるためには M の分解の因子の数が1でなければならないことが容易にわかる．また，対称R空間 $M \subsetneqq M^m(c)$, $c>0$, が等方的であるためには M の階数が1であることが必要十分であることが示される．これらと例2の最後に述べたことから，M は(イ)，(ロ)，(ハ)のいずれかであることがわかる．

(Ⅲ)(内藤[8])正則断面曲率 $c>0$ の n 次元複素射影空間 $\mathbb{P}_n(c)$ 内の完備な n 次元全実平行部分多様体の分類

内藤[8]は上記の部分多様体の分類をあるn変数3次形式の分類に帰着させ，とくにEuclid因子をもたないものを完全に分類した．ここでは，§1の定理を用いることによって，上記の分類が管型の対称有界領域の分類にも帰着されることを説明しよう．(内藤－竹内[9]を参照)

$D \subset \mathbb{C}^{n+1}$をHarish-Chandraの埋め込みによって実現された管型の対称有界領域とする．Killing形式から定まる標準的なHermite計量によって$\mathbb{C}^{n+1}$を$(2n+2)$次元Euclid空間とみなす．$S \subset \partial D$をDのShilov境界とする．$D = D_1 \times \cdots \times D_s$を$D$の既約成分への分解とすれば，$S$は各$D_i$のShilov境界$S_i$の直積$S = S_1 \times \cdots \times S_s$となる．ここで，$\sum \frac{1}{c_i} = \frac{1}{c}$を満たす$c_1, \cdots, c_s > 0$をとって，$a_i = 1/\sqrt{2c_i \dim_{\mathbb{C}} D_i}$，$\hat{M} = a_1 S_1 \times \cdots \times a_s S_s$とおけば，$\hat{M}$は$M^{2n+1}(\frac{c}{4})$のコンパクトな平行部分多様体になる．さらにHopfの束化写像$\pi : M^{2n+1}(\frac{c}{4}) \longrightarrow \mathbb{P}_n(c)$を用いて$M = \pi(\hat{M}) \subset \mathbb{P}_n(c)$とおく．このとき，Korányi-Wolf[6]の結果を用いて，Mが$\mathbb{P}_n(c)$内の完備なn次元全実平行部分多様体になることが示される．逆に，このような部分多様体はある管型の対称有界領域から上のようにして得られる．

逆の証明のためには，まず，上記の部分多様体Mに対して$\hat{M} = \pi^{-1}(M)$とおけば，$\hat{M}$は$M^{2n+1}(\frac{c}{4})$内の完備で充満な平行部分多様体であって，$M^{2n+1}(\frac{c}{4})$のどの完備な全測地的超曲面にも含

まれないことを示す．したがって $\hat{M}$ は定理の(A),(i)のものになるが，$\hat{M}$ が $\mathbb{P}_n(c)$ の部分多様体Mより $\hat{M}=\pi^{-1}(M)$ として得られることより，それが管型対称有界領域の *Shilov* 境界から得られることを証明することができる．

<u>例4</u>　Dが次元 $n+1$ $(n\geq 2)$ の(IV)型の既約対称有界領域であるとき，対応するMは $\mathbb{P}_n(c)$ に自然に全測地的に埋め込まれた $\mathbb{P}_n(\frac{c}{4})$ である．

(IV)（内藤－竹内［9］）$\mathbb{P}_n(c)$ 内のコンパクトな n 次元全実極小部分多様体で，その才2基本形式 α の長さ $\|\alpha\|$ が $\|\alpha\|^2 = n(n+1)c/4(2n-1)$ を満たすものの決定．

応用(I)の場合と同様に，$\|\alpha\|^2 < n(n+1)c/4(2n-1)$ ならばMは全測地的である（*Chen-Ogiue*［1］）．上記の等式がなりたつようなMは，例3(ハ)の平坦な3次元極小トーラス $\hat{M} \subset M^5(\frac{c}{4})$ から $M=\pi(\hat{M}) \subset \mathbb{P}_2(c)$ として得られる曲面に限る．証明は，応用(III)を用いて応用(I)と同様になされる．じつは，この $M \subset \mathbb{P}_2(c)$ は内藤［7］において構成された平坦な等方的平行部分多様体にほかならない．

§4 定理の証明の概略

じつは，定理よりもう少し一般に，「完備な *Riemann* 多様体Mの平行な等長はめ込み $f: M \longrightarrow M^m(c)$ は定理に述べ

た部分多様体への等長被覆写像である」ことが証明される．このことの証明には M が単連結であると仮定しても一般性を失わない．また(B)の場合は(A)の場合から得られるので，さらに(A)の条件を仮定してもさしつかえない．さて，$c=0$, $c>0$, $c<0$ に応じて，Euclid空間 $\mathbb{R}^m$, Euclid空間 $\mathbb{R}^{m+1}$, Lorenz空間 $\mathbb{R}^{m+1}$ を F で表わし，$\iota : M^m(c) \longrightarrow F$ によって恒等写像または包含写像を表わす．等長はめ込み $f' : M \longrightarrow F$ を $f' = \iota \circ f$ によって定義する．f' は平行で，実質的である，すなわち $f'(M)$ は F のどの超平面にも含まれない．まず以下の3つの補題が証明される．

補題1　f' は以下の性質をもつ積はめ込み $f' = f_1 \times \cdots \times f_s$ $: M = M_1 \times \cdots \times M_s \longrightarrow F_1 \times \cdots \times F_s = F$ である．ここで，各 i に対して，M_i は完備で，$f_i : M_i \longrightarrow F_i$ は平行で実質的な等長はめ込みであり，その平均曲率ベクトル η_i に関する Weingarten 写像 A_{η_i} は定数スカラー作用素 $\lambda_i I$ である．ただし，$i \neq j$ ならば $\lambda_i \neq \lambda_j$ である．

補題2　F を $(m+1)$ 次元の Euclid 空間（または Lorenz 空間），$f : M \longrightarrow F$ を Riemann 多様体 M の実質的な等長はめ込みで $\nabla^{\perp}\eta = 0$, $A_\eta = \lambda I$ を満たし，$f(M) \subset M^m(c)$, $c>0$（または $c<0$），となるものとする．このとき，$f : M \longrightarrow M^m(c)$ は極小はめ込みで，$\lambda = c$ がなりたつ．

補題3　$f: M \longrightarrow M^m(c)$, $c \leq 0$, を平行な極小等長はめ込みとすれば，fは全測地的である．

(i) $c>0$の場合　補題1の各F_iはEuclid空間$\mathbb{R}^{m_i+1}$であるから，ある$c_i>0$が存在して$f_i(M_i) \subset M^{m_i}(c_i)$となる．ゆえに補題2より各$f_i: M_i \longrightarrow M^{m_i}(c_i)$は充満で平行な極小等長はめ込みである．したがってFerusの定理（§2を参照）より各f_iは対称R空間への等長被覆写像である．これから，fは(A), (i)の部分多様体への等長被覆写像であることがわかる．

(ii) $c=0$の場合　やはり各F_iはEuclid空間$\mathbb{R}^{m_i}$である．$\lambda_1=0$と仮定しよう．このとき$f_1: M_1 \longrightarrow \mathbb{R}^{m_1}$は平行な極小等長はめ込みだから，補題3より$f_1$は全測地的である．$f_1$は充満であるから$f_1$は等長同相である．$i \geq 2$については，$\lambda_i \neq 0$だからE. Cartanの定理よりある$c_i>0$が存在して$f_i(M_i) \subset M^{m_i-1}(c_i)$（平行移動を除いて）となる．(i)の場合と同様に$f_i$は対称R空間への等長被覆写像である．また，条件(A)より$m_1 \geq 1$でなければならない．したがって，fは(A), (ii)の部分多様体への等長被覆写像である．

(iii) $c<0$の場合　例えばF_1はLorentz空間$\mathbb{R}^{m_1+1}$，F_i, $i \geq 2$, はEuclid空間であるから，ある$c_1<0$と$c_i>0$, $i \geq 2$, が存在して$f_1(M_1) \subset M^{m_1}(c_1)$, $f_i(M_i) \subset M^{m_i}(c_i)$, $i \geq 2$, となる．補題2より$f_1: M_1 \longrightarrow M^{m_1}(c_1)$は極小はめ込みである．した

がって (ii) の f_1 の場合と同様に f_1 は等長同相であることがわかる． $f_i : M_i \longrightarrow M^{m_i}(c_i)$, $i \geqq 2$, については，(i) の場合と同様に対称R空間への等長被覆写像になる．したがって，f は (A), (iii) の部分多様体への等長被覆写像である．

文献

[1] B.Y. Chen - K. Ogiue ; On totally real submanifolds, Trans. A.M.S. 193 (1974), 257-266.

[2] S.S. Chern - M. do Carmo - S. Kobayashi ; Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length, Functional Analysis and Related Fields, ed. by F.E. Browder, Springer, 1970, 59-75.

[3] D. Ferus ; Immersionen mit paralleler zweiter Fundamentalform: Beispiele und Nicht-Beispiele, Manus. Math. 12 (1974), 153-162.

[4] ———— ; Immersions with parallel second fundamental form, Math. Z. 140 (1974), 87-93.

[5] S. Kobayashi - T. Nagano ; On filtered Lie algebras and geometric structures I, J. Math. Mech. 13 (1964), 875-908.

[6] A. Korányi - J.A. Wolf ; Realization of hermitian symmetric spaces as generalized half-planes, Ann. Math. 81 (1965),

265 — 288.

[7] H. Naitoh ; Isotropic submanifolds with parallel second fundamental forms in $P^m(c)$, プレプリント.

[8] ———— ; Totally real parallel submanifolds in $P^n(C)$, プレプリント.

[9] H. Naitoh - M. Takeuchi ; Totally real submanifolds and symmetric bounded domains, プレプリント.

[10] K. Sakamoto ; Planar geodesic immersions, Tôhoku Math. J. 29 (1977), 25 — 56.

[11] J. Simons ; Minimal varieties in riemannian manifolds, Ann. Math. 88 (1968), 62 — 105.

[12] M. Takeuchi ; Cell decompositions and Morse equalities on certain symmetric spaces, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 12 (1965), 81 — 192.

[13] ———— ; Parallel submanifolds of space forms, プレプリント.

[14] M. Takeuchi - S. Kobayashi ; Minimal imbeddings of R-spaces, J. Diff. Geom. 2 (1968), 203 — 215.