数理解析研究所講究録
第410巻 1980年 1-17

$\mathcal{D}_X$-加群の比較定理について
― 代数的局所コホモロジーと形式完備化 ―

上智大　理工　野海正俊

Xを複素多様体，Yをその解析的閉部分集合とする。このとき，Y及びYの補集合 $U=X\setminus Y$ の de Rham コホモロジーに関連して，幾つかの比較定理が知られている。簡単の為，Yが局所的には一個の方程式で定義されていると仮定して，次の三つの比較定理をとりあげる。$\Omega_X^{\cdot}$ で正則微分形式の de Rham 複体を表わす。

(i) 形式的な Poincaré の補題 ― $\Omega_X^{\cdot}$ のYに沿う形式完備化 $\Omega_X^{\cdot}\hat{|}_Y=\varprojlim_k \Omega_X^{\cdot}/\mathcal{J}_Y^{k+1}$ は，Y上で定数層 $\mathbb{C}_Y$ の分解を与える。ここに，$\mathcal{J}_Y$ は，$\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}_Y)=Y$ なる，$\mathcal{O}_X$ の任意の連接イデアル。（R. Hartshorne [2] 等。）

(ii) Grothendieck の比較定理 ― 高々Yに極をもつ有理型微分形式の de Rham 複体を $[j]_*(\Omega_U^{\cdot})=\varinjlim_k \underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{J}_Y^{k+1},\Omega_X^{\cdot})$ とするとき，$[j]_*(\Omega_U^{\cdot})\longrightarrow j_*(\Omega_U^{\cdot})$ は，各次数のコホモ

ロジーの層に同型を誘導する。ここに j は包含写像 $U \hookrightarrow X$.（Grothendieck [1]。）

(iii) 多重層の生成 — 局所コホモロジー，或いは代数的局所コホモロジーとして定まる，Y に台をもつ多重層の層を夫々，$\mathcal{B}^{an}_{X|Y} = \underline{H}^1_Y(\mathcal{O}_X)$，$\mathcal{B}^{alg}_{X|Y} = \underline{H}^1_{[Y]}(\mathcal{O}_X)$ と書くとき，$\mathcal{D}^\infty_X \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} \mathcal{B}^{alg}_{X|Y} \longrightarrow \mathcal{B}^{an}_{X|Y}$ は同型である。ここに，$\mathcal{D}_X$（$\mathcal{D}^\infty_X$）は，$\mathcal{O}_X$-係数の有限階（無限階）の線型偏微分作用素の環の層。（Z. Mebkhout [5]。）

微分方程式論の立場から，この種の比較定理は，de Rham 系 $\mathcal{O}_X$ が《確定特異点型》であることの反映と見做される。これらの比較定理は，$\mathcal{D}_X$-加群に対する比較として定式化され，ホロノミー系の場合には，同値な確定性の条件となる。（M. Kashiwara - T. Kawai [4] は，任意の解析的閉部分集合 Y に対してこの種の比較定理が成立することによって，《確定特異点をもつホロノミー系》を特徴づけている。）

この稿では，それら三つの比較の相互関係を明白にし，ホロノミー系の場合に，解の複体と de Rham 複体の双対性，及び [4] で示された《再構成の定理》を用いた，三つの比較の同値性の定理の証明を与える。ここで述べる方法は，構成可能（constructible）な $\mathbb{C}_X$-加群に関する J.-L. Verdier の結果を

組織的に用いる[4]の論法に基いている。(同値性の定理は，J.-P. Ramis [7], Z. Mebkhout [6]で扱われているが，ここで述べる方法とは，やや趣きを異にする。)

§1で，ホロノミー系に関する双対性の定理について，§2で$\mathcal{D}_X$-加群の代数的局所コホモロジーについて復習したあと，§3で，三つの比較を定式化し，ホロノミー系の場合の同値性の定理を証明する。

§1. ホロノミー系に対する双対性の定理

Mを左$\mathcal{D}_X$-加群(の複体で，有限個の次数を除いてコホモロジーの層が0となるもの，$\in D^b(\mathcal{D}_X)$)とする。このとき，Mの解の複体，及びde Rham複体を夫々，

$$Sol(M) = \mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathcal{D}_X}(M, \mathcal{O}_X), \quad DR(M) = \mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, M)$$

と定義する。de Rham複体は$D(\mathbb{C}_X)$の対象として$\Omega_X^{\cdot} \otimes_{\mathcal{O}_X} M$(積分可能な接続としてのde Rham複体)または，$\Omega_X^n \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} M[-n]$に同型であって，$M$の双対な方程式系の解の複体と見做される。($n = \dim X$。)

M, Nを左$\mathcal{D}_X$-加群とすると，各$\underline{Ext}^i_{\mathcal{D}_X}(M, N)$は構成可能な$\mathbb{C}_X$-加群となる(即ち，解析的部分集合による$X$のストラティフィケーションがあって，各ストラタの上で，有限次元ベクトル空間の局所系となる；柏原の有限性定理。)

このことから，ホロノミー系 M に対する次の形の双対定理が従う：$\mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, M)_x \xrightarrow{\sim} Hom_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathcal{D}_X}(M, \mathcal{B}^{an}_{\{x\}|X})_x, \mathbb{C})[-n]$。ここに $\mathcal{B}^{an}_{\{x\}|X}$ は点 $x \in X$ に台をもつ佐藤超函数の層。この結果は，構成可能な $\mathbb{C}_X$-加群に対する次の Verdier の双対定理を用いて，M の解の複体と de Rham 複体の双対定理の形に翻訳される。（[4].）

<u>定理(1.1)</u>（構成可能な $\mathbb{C}_X$-加群の双対性，Verdier）

$F^{\cdot}$ を $\mathbb{C}_X$-加群の複体とし，各次数のコホモロジーの層は構成可能で有限個を除いて 0 とする（$\in D^b_c(\mathbb{C}_X)$）。このとき，

a) $F^{\cdot} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathbb{C}_X}(\mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathbb{C}_X}(F^{\cdot}, \mathbb{C}_X), \mathbb{C}_X)$.

b) 任意の解析的閉部分集合 Y に対して

$$\mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathbb{C}_X}(\mathbb{R}\Gamma_Y(F^{\cdot}), \mathbb{C}_X) = \mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathbb{C}_X}(F^{\cdot}, \mathbb{C}_X)_{X|Y}.$$

ここに，$\cdot_{X|Y}$ は，Y 上へ制限し Y の外へ 0 で延長した層を表わす。 [8]

<u>定理(1.2)</u>（ホロノミー系の解の複体と de Rham 複体の双対性） $M^{\cdot}$ を左 $\mathcal{D}_X$-加群の複体とし，各次数のコホモロジーの層がホロノミー系で有限個を除いて 0 とする（$\in D^b_h(\mathcal{D}_X)$）。このとき，

$$DR(M^{\cdot}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathbb{C}_X}(Sol(M^{\cdot}), \mathbb{C}_X)$$

$$Sol(M^{\cdot}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathbb{C}_X}(DR(M^{\cdot}), \mathbb{C}_X).$$

F を $\mathbb{C}_X$-加群とすると，$\underline{\mathcal{H}om}_{\mathbb{C}_X}(F,\mathcal{O}_X)$ は，$\mathcal{O}_X$ の構造から定まる自然な $\mathcal{D}_X^\infty$-加群の構造をもつ。そこで $F^\cdot \in D^-(\mathbb{C}_X)$ に対して，$F^\cdot$ の《再構成された方程式系》を

$$Rec(F^\cdot) = \mathbb{R}\underline{\mathcal{H}om}_{\mathbb{C}_X}(F^\cdot, \mathcal{O}_X) \qquad \in D(\mathcal{D}_X^\infty)$$

によって定義する。（$\mathcal{D}_X^\infty$ が $\mathcal{D}_X$ 上平坦なので，$\underline{\mathcal{H}om}_{\mathbb{C}_X}(\cdot,\mathcal{O}_X)$ を $\mathcal{D}_X$-加群の圏への函手として《微分》したものは，上の Rec で $\mathcal{D}_X^\infty$ 上の構造を忘れて $D(\mathcal{D}_X)$ への函手と見たものに一致する。） $M^\cdot \in D^b(\mathcal{D}_X)$ に対して，自然に $\mathcal{D}_X^\infty \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} M^\cdot \longrightarrow Rec\circ Sol(M^\cdot)$ なる射が定まるが，$M^\cdot$ の各次数のコホモロジーがホロノミー系の時には同型となることが，次の構成可能な $\mathbb{C}_X$-加群に対する核定理を用いて示される。（[4]。）

<u>定理 (1.3)</u>（構成可能な $\mathbb{C}_X$-加群に対する核定理）

$F^\cdot \in D^b_c(\mathbb{C}_X)$，$L^\cdot \in D^b(\mathbb{C}_X)$ に対して，

$$\Delta^{-1}\mathbb{R}\Gamma_\Delta\big(pr_1^{-1}(L^\cdot)\underset{\mathbb{C}_{X\times X}}{\otimes} pr_2^{-1}(\mathbb{R}\underline{\mathcal{H}om}_{\mathbb{C}_X}(F^\cdot,\mathbb{C}_X))\big)$$
$$= \mathbb{R}\underline{\mathcal{H}om}_{\mathbb{C}_X}(F^\cdot, L^\cdot)$$

ここに Δ は対角線（写像）。

$$\begin{tikzcd}
 & X \\
X \arrow[ur, "id"] \arrow[r, "\Delta"] \arrow[dr, "id"'] & X\times X \arrow[u, "pr_2"'] \arrow[d, "pr_1"] \\
 & X
\end{tikzcd}$$

<u>定理 (1.4)</u>（ホロノミー系に対する再構成の定理）

$M^\cdot \in D^b_h(\mathcal{D}_X)$ に対して，$\mathcal{D}_X^\infty \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} M^\cdot \xrightarrow{\sim} Rec\circ Sol(M^\cdot)$.

ホロノミー系に対する二つの双対定理(1.2),(1.4)を用いて，de Rham 複体が，$\mathcal{D}_X^\infty$ への係数拡大に関して不変性をもつことが示せる。

定理(1.5) $M^\cdot \in D^b_h(\mathcal{D}_X)$ ならば，

$$DR(M^\cdot) \xrightarrow{\sim} DR(\mathcal{D}_X^\infty \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} M^\cdot).$$

補題 $N^\cdot \in D^-(\mathcal{D}_X)$, $F^\cdot \in D^-(\mathbb{C}_X)$ に対して

$$\mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathcal{D}_X}(N^\cdot, Rec(F^\cdot)) = \mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathbb{C}_X}(F^\cdot, Sol(N^\cdot))$$

この補題は，$\mathcal{D}_X$-加群 K, N と $\mathbb{C}_X$-加群 F に対する随伴公式

$$\underline{Hom}_{\mathcal{D}_X}(N, \underline{Hom}_{\mathbb{C}_X}(F, K)) = Hom_{\mathbb{C}_X}(F, \underline{Hom}_{\mathcal{D}_X}(N, K))$$

から，導来函手の標準的な手続で導ける。

定理(1.5)の証明) $M^\cdot \in D^b_h(\mathcal{D}_X)$ とすると

$$DR(\mathcal{D}_X^\infty \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} M^\cdot) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, Rec \circ Sol(M^\cdot)) \quad (\text{再構成}(1.4))$$

$$= \mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathbb{C}_X}(Sol(M), Sol(\mathcal{O}_X)) \quad (\text{補題}$$

$$= \mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathbb{C}_X}(Sol(M), \mathbb{C}_X).$$

従って，$DR(\mathcal{D}_X^\infty \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} M^\cdot) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathbb{C}_X}(Sol(M), \mathbb{C}_X)$ となる。これと，定理(1.2)の二番目の同型と比較すれば，定理を得る。

(証明終)

§2. 代数的局所コホモロジーと形式完備化

Yを X の解析的閉部分集合とし，$\mathcal{J}_Y$ を，$Supp(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}_Y)=Y$ なる，$\mathcal{O}_X$ の任意の連接イデアルとする。$j: U=X\setminus Y \hookrightarrow X$ で包含写像を表わす。

M を左 $\mathcal{D}_X$-加群とするとき，

$$[j]_*(M|U)=\varinjlim_k \underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{J}_Y^{k+1}, M),\quad \underline{\Gamma}_{[Y]}(M)=\varinjlim_k \underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}_Y^{k+1}, M)$$

とおくと，$[j]_*(M|U)$, $\underline{\Gamma}_{[Y]}(M)$ は，自然な左 $\mathcal{D}_X$-加群の構造をもつ。$[j]_*(\cdot|U)$, $\underline{\Gamma}_{[Y]}$ の右導来函手を夫々，$\mathbb{R}[j]_*(\cdot|U)$, $\mathbb{R}\underline{\Gamma}_{[Y]}$ と書く。このとき，$M^\cdot\in D^+(\mathcal{D}_X)$ に対して右の $D(\mathcal{D}_X)$ における三角形が存在する。

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R}[j]_*(M^\cdot|U) \arrow[dl, "+1"'] & \\
\mathbb{R}\underline{\Gamma}_{[Y]}(M^\cdot) \arrow[rr] & & M^\cdot \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

M をホロノミー系とすると，各 i で，$R^i[j]_*(M|U)$, $\underline{H}^i_{[Y]}(M)=R^i\underline{\Gamma}_{[Y]}(M)$ が再びホロノミー系となることが知られている。(M. Kashiwara [3]。) 即ち，

<u>定理 (2.1)</u>　$M^\cdot\in D^b_h(\mathcal{D}_X)$ ならば $\mathbb{R}[j]_*(M|U)$, $\mathbb{R}\underline{\Gamma}_{[Y]}(M)\in D^b_h(\mathcal{D}_X)$.

比較定理の相互関係を論じる上で一つの鍵となるのは，次の，代数的局所コホモロジーと形式完備化の随伴関係である。

<u>定理 (2.2)</u>　$M^\cdot\in D^b(\mathcal{D}_X)$ に対して

$$\mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathbb{R}\underline{\Gamma}_{[Y]}(M^\cdot), \mathcal{O}_X) = \mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathcal{D}_X}(M^\cdot, \mathcal{O}_{X\hat{|}Y}).$$

この定理は，$M^\cdot$ のコホモロジーの層が $\mathcal{D}_X$ 上連接という仮

定の下で，J.-P. Ramis [7] に与えられている。より一般な随伴関係については，§3 の後に，補遺として触れる。

§3. 三つの比較と，同値性の定理

以上の準備の下で，冒頭にとりあげた三つの比較定理に対応する $\mathcal{D}_X$-加群に関する比較を定式化し，それらの相互関係を論じる。

以下，Y を X の解析的閉部分集合とし，$j: U = X \setminus Y \hookrightarrow X$ を包含写像とする。

(i) 正則函数解と形式解の比較：

M を左 $\mathcal{D}_X$-加群（の有界な複体）とするとき，形式完備化 $\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_{X\hat{|}Y}$ から誘導されて $D(\mathbb{C}_X)$ の射

$$\alpha : \mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathcal{D}_X}(M, \mathcal{O}_X)_{X|Y} \longrightarrow \mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathcal{D}_X}(M, \mathcal{O}_{X\hat{|}Y})$$

が定まる。$\cdot_{X|Y}$ は，Y 上へ制限し，Y の外へは 0 で延長した層。定理 (2.2) の随伴関係を用いると，α は，

$$\alpha : \quad Sol(M)_{X|Y} \longrightarrow Sol(\mathbb{R}\Gamma_{[Y]}(M))$$

となる。（$M = \mathcal{O}_X$ のときは，$\alpha : \Omega^{\cdot}_{X|Y} \to \Omega^{\cdot}_{X\hat{|}Y}$ で，α の同型性が形式的な Poincaré の補題に対応する。）

§2 で注意した代数的局所コホモロジーの三角形に Sol を施すと，次の三角形が得られるので

$$\alpha \text{が同型} \iff Sol(\mathbb{R}[j]_*(M|U))_{X|Y} = 0$$

となる。

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathrm{Sol}(\mathbb{R}[j]_*(M|U)) \arrow[dl] & \\ \mathrm{Sol}(M) \arrow[rr] & & \mathrm{Sol}(\mathbb{R}\Gamma_{[Y]}(M)) \arrow[ul, "+1"'] \end{tikzcd}$$

(ii) de Rham 複体の局所化に関する比較:

自然に定まる $\mathbb{R}[j]_*(M|U) \to \mathbb{R}j_*(M|U)$, $\mathbb{R}\Gamma_{[Y]}(M) \to \mathbb{R}\Gamma_Y(M)$ から

$$\beta' : \mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \mathbb{R}[j]_*(M|U)) \to \mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \mathbb{R}j_*(M|U))$$

$$\beta : \mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \mathbb{R}\Gamma_{[Y]}(M)) \to \mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \mathbb{R}\Gamma_Y(M))$$

が $D(\mathbb{C}_X)$ の射として定まる。これを、

$$\beta' : DR(\mathbb{R}[j]_*(M|U)) \longrightarrow DR(\mathbb{R}j_*(M|U)) = \mathbb{R}j_*(DR(M)|U)$$

$$\beta : DR(\mathbb{R}\Gamma_{[Y]}(M)) \longrightarrow DR(\mathbb{R}\Gamma_Y(M)) = \mathbb{R}\Gamma_Y(DR(M))$$

の形に書いておく。後者は、前者で正則な部分を法としたものに外ならない。三角形の射

$$DR\left(\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathbb{R}[j]_*(M|U) \arrow[dl, "+1"'] & \\ \mathbb{R}\Gamma_{[Y]}(M) \arrow[rr] & & M \arrow[ul] \end{tikzcd}\right) \longrightarrow DR\left(\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathbb{R}j_*(M|U) \arrow[dl, "+1"'] & \\ \mathbb{R}\Gamma_Y(M) \arrow[rr] & & M \arrow[ul] \end{tikzcd}\right)$$

に注意すると、β' が同型となることと、β が同型となることは同値である。

$M = \mathcal{O}_X$ のとき、$\beta' : \mathbb{R}[j]_*(\Omega^{\cdot}_U) \longrightarrow \mathbb{R}j_*(\Omega^{\cdot}_U)$ である。とくに、Y が局所的に一個の方程式から定義されているときには、両辺のコホモロジーの層について、$R^q[j]_*(\Omega^p_U) = R^q j_*(\Omega^p_U) = 0$ $(q \neq 0,\ p \in \mathbb{Z})$ となるので、$\beta' : [j]_*(\Omega^{\cdot}_U) \longrightarrow j_*(\Omega^{\cdot}_U)$ に外ならない。

$$\beta\ (\beta')\text{ が同型} \iff \mathbb{R}\Gamma_Y DR(\mathbb{R}j_*(M|U)) = 0$$

も前と同様にしてわかる。

(iii) 方程式の局所化に関する比較:

自然な射 $\mathbb{R}\Gamma_{[Y]}(M) \longrightarrow M$ を $\mathcal{D}_X^\infty$ へ係数拡大し，$\mathbb{R}\Gamma_Y$ を施すと，

$$\gamma:\ \mathcal{D}_X^\infty \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} \mathbb{R}\Gamma_{[Y]}(M) \longrightarrow \mathbb{R}\Gamma_Y(\mathcal{D}_X^\infty \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} M)$$

が得られる。$M = \mathcal{O}_X$ のときは，$\gamma: \mathcal{D}_X^\infty \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} \mathbb{R}\Gamma_{[Y]}(\mathcal{O}_X) \to \mathbb{R}\Gamma_Y(\mathcal{O}_X)$.

前と同様に，

$$\gamma\text{ が同型} \iff \mathbb{R}\Gamma_Y(\mathcal{D}_X^\infty \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} \mathbb{R}j_*(M|U)) = 0.$$

そこで，三つの比較の射 α, β, γ の関係を明らかにする。以下，M がホロノミー系（または，$\in D^b_h(\mathcal{D}_X)$）と仮定する。

このとき，柏原の有限性定理によって，$Sol(M)$, $DR(M)$ ともに $\in D^b_c(\mathbb{C}_X)$。また，$\mathbb{R}\Gamma_{[Y]}(M) \in D^b_h(\mathcal{D}_X)$（定理(2.1)）。

Verdier の定理 (1.1) b) から

$$\mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathbb{C}_X}(DR(M), \mathbb{C}_X)_{X|Y} = \mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathbb{C}_X}(\mathbb{R}\Gamma_Y DR(M), \mathbb{C}_X).$$

従って，双対定理 (1.2) から次の可換図式を得る。

$$\text{(i)} \Leftarrow \text{(ii)} \qquad \begin{array}{ccc} Sol(M)_{X|Y} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathbb{C}_X}(\mathbb{R}\Gamma_Y DR(M), \mathbb{C}_X) \\ {\scriptstyle \alpha}\downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathbb{C}_X}(\beta, \mathbb{C}_X)} \\ Sol(\mathbb{R}\Gamma_{[Y]}(M)) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathbb{C}_X}(DR(\mathbb{R}\Gamma_{[Y]}(M)), \mathbb{C}_X) \end{array}.$$

DR の係数拡大に関する不変性の定理 (1.5) から，

（ $\mathbb{R}\Gamma_Y \circ DR = DR \circ \mathbb{R}\Gamma_Y$ を用いて ）

$$
(\mathrm{ii}) \Leftarrow (\mathrm{iii}) \qquad
\begin{array}{ccc}
DR(\mathbb{R}\underline{\Gamma}_{[Y]}(\mathcal{M})) & \xrightarrow{\sim} & DR(\mathcal{D}_X^{\infty} \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} \mathbb{R}\underline{\Gamma}_{[Y]}(\mathcal{M})) \\
\beta \big\downarrow & & \big\downarrow DR(\gamma) \\
\mathbb{R}\underline{\Gamma}_Y DR(\mathcal{M}) & \xrightarrow{\sim} & DR(\mathbb{R}\underline{\Gamma}_Y(\mathcal{D}_X^{\infty} \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} \mathcal{M}))
\end{array}
$$

再構成の定理(1.4)から($\mathbb{R}\underline{\Gamma}_Y \circ Rec = Rec(\cdot\ X|Y)$と合わせて)

$$
(\mathrm{iii}) \Leftarrow (\mathrm{i}) \qquad
\begin{array}{ccc}
\mathcal{D}_X^{\infty} \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} \mathbb{R}\underline{\Gamma}_{[Y]}(\mathcal{M}) & \xrightarrow{\sim} & Rec(Sol(\mathbb{R}\underline{\Gamma}_{[Y]}(\mathcal{M}))) \\
\gamma \big\downarrow & & \big\downarrow Rec(\alpha) \\
\mathbb{R}\underline{\Gamma}_Y(\mathcal{D}_X^{\infty} \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} \mathcal{M}) & \xrightarrow{\sim} & Rec(Sol(\mathcal{M})_{X|Y}) .
\end{array}
$$

以上の可換図式から次の定理が従う。

> <u>定理(3.1)</u> $\mathcal{M}$を左$\mathcal{D}_X$-加群のホロノミー系(または$\in D^b_{h}(\mathcal{D}_X)$)とし,$Y$を$X$の解析的閉部分集合とするとき,次の条件は同値である:
>
> (i) $\alpha : \mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)_{X|Y} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{X\hat{|}Y})$.
>
> (ii) $\beta : \mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \mathbb{R}\underline{\Gamma}_{[Y]}(\mathcal{M})) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \mathbb{R}\underline{\Gamma}_Y(\mathcal{M}))$.
>
> (ii′) $\beta' : \mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \mathbb{R}[j]_*(\mathcal{M}|U)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \mathbb{R}j_*(\mathcal{M}|U))$.
>
> (iii) $\gamma : \mathcal{D}_X^{\infty} \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} \mathbb{R}\underline{\Gamma}_{[Y]}(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\underline{\Gamma}_Y(\mathcal{D}_X^{\infty} \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} \mathcal{M})$.

$\mathcal{M}$が de Rham 系$\mathcal{O}_X$の場合は次の比較定理が成立する。

(i) $\Omega^{\cdot}_{X\hat{|}Y}$は$Y$上で定数層$\mathbb{C}_Y$の分解を与える。

(ii) $\mathbb{R}^i[j]_*(\Omega^{\cdot}_U) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^i j_*(\Omega^{\cdot}_U) \quad (i \in \mathbb{Z})$.

(iii) $\mathcal{D}_X^{\infty} \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} \underline{H}^i_{[Y]}(\mathcal{O}_X) \xrightarrow{\sim} \underline{H}^i_Y(\mathcal{O}_X) \quad (i \in \mathbb{Z})$.

これは,Mayer-Vietoris 型の議論でYが超曲面の場合に帰す。

補遺：代数的局所コホモロジーと形式完備化の随伴性

Y を X の解析的閉部分集合とするとき，左 $\mathcal{D}_X$-加群 N に対して，《導来函手》としての形式完備化 $N_{X\hat{|}Y}^{\mathbb{D}}$ を考え，それと代数的局所コホモロジーとの随伴公式を与える。

まず，N に対して $N_{X\hat{|}Y} = \varprojlim_k N/\mathcal{J}_Y^{k+1}N$ は，自然な左 $\mathcal{D}_X$-加群の構造をもつ。これに対して，$N_{X\hat{|}Y}^{\mathbb{D}} \in D^b(\mathcal{D}_X)$ を，次の性質をもつものとして構成できる：

1) $D(\mathcal{O}_X)$ において，$N_{X\hat{|}Y}^{\mathbb{D}} = \mathbb{R}\varprojlim_k (\mathcal{O}_X/\mathcal{J}_Y^{k+1} \overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{O}_X}{\otimes}} N)$

2) N が $\mathcal{D}_X$ 上連接ならば $N_{X\hat{|}Y}^{\mathbb{D}} \cong \mathcal{D}_{X\hat{|}Y} \overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{D}_X}{\otimes}} N$．さらに $\mathcal{O}_X$ 上平坦ならば，$N_{X\hat{|}Y}^{\mathbb{D}} = N_{X\hat{|}Y} \cong \mathcal{D}_{X\hat{|}Y} \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} N$．

この $\cdot_{X\hat{|}Y}^{\mathbb{D}}$ について，

定理　M，N を左 $\mathcal{D}_X$-加群（の有界な複体）とするとき $D(\mathcal{D}_X)$ における次の随伴公式が存在する：

$$\mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathbb{R}\underline{\Gamma}_{[Y]}(M), N) = \mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathcal{D}_X}(M, N_{X\hat{|}Y}^{\mathbb{D}}).$$

（注意）$\mathcal{D}_{X\hat{|}Y}$ は一般に，$\mathcal{D}_X$ 上平坦でない。例えば，$X = \mathbb{C}$，$Y = \{0\}$ のとき，

$$\mathcal{D}_{X\hat{|}Y,0} = \{ \sum_{k=0}^{\infty} x^k P_k(D_x) \ (\text{形式和})\ ;\ P_k \in \mathbb{C}[D_x] \}$$

であり，$N = \mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X x$ について，

$$\underline{Tor}_1^{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_{X\hat{|}Y}, N) = \{ \sum_{k=0}^{\infty} x^k P_k\ ;\ P_k' = -P_{k-1} \}$$

となる。

以下において，定理の証明の概略を述べる。

M, N を左 $\mathcal{D}_X$-加群とするとき，$\underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(M, N)$ は，ベクトル場 $\xi \in \mathcal{D}er_X$ の次の作用によって，左 $\mathcal{D}_X$-加群となる：
$u \in \underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(M, N)$ に対して，

$$(\xi \cdot u)(s) = \xi \cdot u(s) - u(\xi \cdot s) \quad , \qquad s \in M.$$

これについて，

$$\underline{Hom}_{\mathcal{D}_X}(M, N) = \underline{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(M, N)).$$

さらに，次が成立する：

命題 $M \in D^-(\mathcal{D}_X)$, $N \in D^+(\mathcal{D}_X)$ に

$$\mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathcal{D}_X}(M, N) = \mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(M, N)).$$

これによって，定理は，次に帰着される。

定理' $D(\mathcal{D}_X)$ において，

$$\mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathbb{R}\underline{\Gamma}_{[Y]}(M), N) = \mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(M, N_{X\hat{|}Y}^{\mathcal{D}}).$$

今，$\mathcal{D}_X$上の構造を忘れて次の様に考えてみる。

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathbb{R}\underline{\Gamma}_{[Y]}(M), N) &= \mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\varinjlim_k \mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}_Y^{k+1}, M), N) \\
&= \mathbb{R}\varprojlim_k \mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}_Y^{k+1}, M), N), \\
\mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(M, N_{X\hat{|}Y}^{\mathcal{D}}) &= \mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(M, \mathbb{R}\varprojlim_k (\mathcal{O}_X/\mathcal{J}_Y^{k+1} \overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{O}_X}{\otimes}} N)) \\
&= \mathbb{R}\varprojlim_k \mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(M, \mathcal{O}_X/\mathcal{J}_Y^{k+1} \overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{O}_X}{\otimes}} N).
\end{aligned}$$

$\mathcal{J}_Y$ の $\mathcal{O}_X$ 上の連接性から，

$$\mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}_Y^{k+1}, M), N)$$
$$\rightleftarrows \mathcal{O}_X/\mathcal{J}_Y^{k+1} \overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{O}_X}{\otimes}} \mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(M, N)$$
$$\xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(M, \mathcal{O}_X/\mathcal{J}_Y^{k+1} \overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{O}_X}{\otimes}} N).$$

$\mathbb{R}\varprojlim_k$ へ移行して

$$\mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathbb{R}\Gamma_{[Y]}(M), N) \rightleftarrows \mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(M, N) \overset{\mathcal{D}}{\underset{X}{\hat{|}}} Y$$
$$\xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(M, N \overset{\mathcal{D}}{\underset{X}{\hat{|}}} Y)$$

を得る。

この様な式変形で，どの様に $\mathcal{D}_X$ 上の構造を統制するかが問題である。（$\xi \in \mathcal{D}er_X$ のとき，$\xi \cdot \mathcal{J}_Y^{k+1} \subset \mathcal{J}_Y^{k}$ だから，$\mathcal{O}_X/\mathcal{J}_Y^{k+1}$ 自身は $\mathcal{D}_X$ の作用を許さない。）そこで，次の様な対象を考える。

$\mathcal{F} = (\mathcal{F}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ を $\mathcal{O}_X$-加群の射影系（$\mathcal{F}_k \leftarrow \mathcal{F}_{k+1}$）とする。$\mathcal{O}_X$-加群の射影系の準同型 $\phi_* : \mathcal{D}er_X \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{F}_{*+1} \longrightarrow \mathcal{F}_*$ について次の条件 1) 2) が満たされるとき，ϕ_* を，射影系 $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ の上の積分可能な接続（次数 1 の）という：

$$\phi_k(\xi \otimes s) = \xi \cdot s \quad , \quad \xi \in \mathcal{D}er_X, \ s \in \mathcal{F}_{k+1}$$

と書くとき

1)（Leibniz の規則）$\xi(f) \cdot s|_k = \xi \cdot (fs) - f(\xi \cdot s)$; $f \in \mathcal{O}_X$)

2)（積分可能性）$[\xi, \eta] \cdot s|_k = \xi \cdot (\eta \cdot s) - \eta \cdot (\xi \cdot s)$;

$$(\ s \in \mathcal{F}_{k+2} \ ; \ \xi, \eta \in \mathcal{D}er_X \ )$$

（ここに $\cdot|_k$ は $\mathcal{F}_l \longrightarrow \mathcal{F}_k$ ($l \geqq k$) による像を表わす。）

$\mathcal{F}=(\mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ が，積分可能な接続をもつとき，$\varprojlim_k \mathcal{F}_k$ は，自然な左 $\mathcal{D}_X$-加群の構造をもつ。上の概念は，$\mathcal{D}_X$ の作用を射影系に分解したものにほかならない。

そこで，$\mathcal{O}_X$-加群の射影系 $\mathcal{F}=(\mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ で，上の意味の積分可能な接続をもつものの圏 $\mathcal{D}_X\text{-}pro(\mathbb{N},\mathcal{O}_X)$ を設定する。

$\mathcal{F}=(\mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ に，積分可能な接続 $\phi_k : \mathcal{D}er_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{F}_{k+1}\longrightarrow\mathcal{F}_k$ が与えられたとする。このとき

$$\phi_k^{(0)} : \mathcal{D}_X^{(0)}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{F}_k\longrightarrow\mathcal{F}_k \quad ; \quad f\otimes s\longmapsto fs$$

$$\phi_k^{(1)} ; \mathcal{D}_X^{(1)}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{F}_{k+1}\longrightarrow\mathcal{F}_k \quad ; \quad (\xi+f)\otimes s\longmapsto \xi s + fs|_k$$

が定まる。（$\mathcal{D}_X^{(m)}$ は，m 階以下の微分作用素の層。）ϕ_k の積分可能性から，順次，高階の作用素の作用

$$\phi_k^{(m)} ; \quad \mathcal{D}_X^{(m)}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{F}_{k+m}\longrightarrow\mathcal{F}_k$$

が定まる。このことに注意して次の構成を行なう。

$\mathcal{G}=(\mathcal{G}_k)_{k\in\mathbb{N}}\in pro(\mathbb{N},\mathcal{O}_X)$ （$\mathcal{O}_X$-加群の射影系）に対して，$\mathcal{L}(\mathcal{G})\in\mathcal{D}_X\text{-}pro(\mathbb{N},\mathcal{O}_X)$ を次の形に自然に定義する。

$$\mathcal{L}(\mathcal{G})_k = \bigoplus_{m\geq 0}\mathcal{D}_X^{(m)}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{G}_{k+m} .$$

$\mathcal{L}(\mathcal{G})$ には自然な接続が定まり，

命題　$\mathcal{F}\in\mathcal{D}_X\text{-}pro(\mathbb{N},\mathcal{O}_X)$，$\mathcal{G}\in pro(\mathbb{N},\mathcal{O}_X)$ に対し

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X\text{-}pro(\mathbb{N},\mathcal{O}_X)}(\mathcal{L}(\mathcal{G}),\mathcal{F}) = \mathrm{Hom}_{pro(\mathbb{N},\mathcal{O}_X)}(\mathcal{G},\mathcal{F})$$

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{L}(\mathcal{G}) \arrow[d, dashed, "\exists_1 u^{\#}"] \\ \mathcal{G} \arrow[ur] \arrow[r, "u"'] & \mathcal{F} \end{tikzcd}$$

この命題を用いて，$\mathcal{D}_X$-pro$(\mathcal{N},\mathcal{O}_X)$が，十分多くの単射的対象をもつ等，前に掲げた形式的な式変形を正当化するのに必要な事柄を導くことができるのである。$\mathcal{D}_X$-pro$(\mathcal{N},\mathcal{O}_X)$の導来圏を考えることによって，

$$N_{X\hat{\uparrow}Y}^{\mathcal{D}} = \mathbb{R}\varprojlim_{k} \left(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}_Y^{\,k+1} \overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{O}_X}{\otimes}} N\right)$$

が，$D(\mathcal{D}_X)$の対象として意義づけられ，この枠組で定理の証明が遂行できる。

$N_{X\hat{\uparrow}Y}^{\mathcal{D}} \simeq \mathcal{D}_{X\hat{\uparrow}Y} \overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{D}}{\otimes}} N$　等は，連接な$\mathcal{D}_X$-加群が，局所的には連接な$\mathcal{O}_X$-加群の帰納極限として表わせることを用いて証明される。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（以上）

文献

[1] Grothendieck, A: On the de Rham Cohomology of Algebraic Varieties, Publ. Math. I.H.E.S. n°29, 95-103 (1966)

[2] Hartshorne, R; On the de Rham Cohomology of Algebraic Varieties, Publ. Math. I.H.E.S. n°45, 6-99 (1975)

[3] Kashiwara, M; On the Holonomic Systems of Linear Differential Equations II. Inv. Math. 49, 121-135 (1978)

[4] Kashiwara, M and Kawai, T: On holonomic systems of microdifferential equations III — Systems with regular singularities (preprint, RIMS-293, 1979)

[5] Mebkhout, Z : La Cohomologie Locale d'une Hypersurface, (Fonctions de Plusieurs Variables Complexes III) Lec. Notes in Math. n°670, 89-113, Springer (1977).

[6] Mebkhout, Z : The Poincaré-Serre-Verdier Duality, (Algebraic Geometry) Lec. Notes in Math. n° 732, 396-416, Springer (1979)

[7] Ramis, J.-P. : Variations sur le Thème "GAGA", Lec. Notes in Math. n° 694, 228-289, Springer (1978)

[8] Verdier, J.-L. : Classe d'homologie associée à un cycle. Séminaire de Géométrie Analytique (Douady, A., Verdier, J.-L.) Astérisque 36-37. Exposé VI, 101-151 (1976).