数理解析研究所講究録
第410巻 1980年 99-107

超可微分多様体の局所理論

東京大学理学部　　小松彦三郎

可微分多様体，実解析多様体および複素多様体の局所理論はEuclid空間の開集合で定義されたそれぞれの族の写像の結合が同じ族の写像になること，陰函数の定理，および常微分方程式の解の存在定理に基づいて作られている．正数列 M_p が適当な条件をみたすならば，$\{M_p\}$ 族および (M_p) 族の超可微分函数の族においても以上の三定理が成立し，これによって超可微分多様体の局所理論が作られることを示す．

$\mathbb{R}^n$ の開集合 U で定義された無限回可微分函数 $f(x)$ は

$$\forall K \subset\subset U \ \exists h \ \exists C \quad (\forall h > 0 \ \exists C)$$

$$\sup_{x \in K} |\partial^\alpha f(x)| \leqq C h^{|\alpha|} M_{|\alpha|}, \quad \forall \alpha,$$

となるとき $\{M_p\}$ 族（(M_p) 族）の超可微分函数という．

$*$ でもって $\{M_p\}$ または (M_p) を表わすことにする．

$f = (f_1, \cdots, f_m) : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ は各成分 f_i が

$*$ 族の超可微分函数であるとき，$*$ 族の超可微分写像という．

M_p は次の条件をみたすとする：

(M. 0) $\qquad M_0 = M_1 = 1$;

(M. 4)′ $\quad \exists H \quad \left(\dfrac{M_q}{q!}\right)^{1/(q-1)} \leqq H\left(\dfrac{M_p}{p!}\right)^{1/(p-1)}, \quad 2 \leqq q \leqq p.$

$* = (M_p)$ のときは更に次を仮定する：

(M. 3)″ $\qquad \dfrac{M_p}{p M_{p-1}} \to \infty, \qquad p \to \infty.$

このとき次の三定理が成立する．

定理 1. $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$, $W \subset \mathbb{R}^l$ を開集合とする．$f: U \to V$, $g: V \to W$ が $*$ 族の超可微分写像ならば，$g \circ f: U \to W$ も $*$ 族の超可微分写像である．

定理 2. $U, V \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とする．$f: U \to V$ が $*$ 族の超可微分写像，かつ $\mathring{x} \in U$ において Jacobi 行列式が 0 でなければ，$\mathring{x}$ の開近傍 $U_0 \subset U$ および $\mathring{y} = f(\mathring{x})$ の開近傍 $V_0 \subset V$ が存在し，$f: U_0 \to V_0$ は位相同型かつ逆写像 $f^{-1}: V_0 \to U_0$ も $*$ 族の超可微分写像である．

定理 3. $U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合，$f(t, x) = (f_1, \cdots, f_n)$ を $(-T, T) \times U$ 上の $*$ 族の超可微分函数の n 組，$U_1 \subset U$ を相対コンパクト開部分集合とする．このとき，$0 < T_1 \leqq T$ が存在し，常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t, x), \\ x(0) = y \end{cases}$$

は $(-T_1, T_1) \times U_1$ 上の $*$ 族の超可微分函数の n 組となる唯一つの解 $x(t, y)$ をもつ.

これらの定理は超分布の理論を多様体の上で展開するためにも，またもっと単純に超分布の変数変換を論ずるためにも不可欠な基本定理である.

また条件 (M. 4)′ (および (M. 3)″) が定理の成立のためほとんど必要であることを注意しておく. ($p!$) 族の超可微分函数は整函数であるが，この族に対しては定理 2, 3 は成立しない.

W. Rudin [6] は M_p が

(M. 1) $\qquad M_p^{\,2} \leqq M_{p-1} M_{p+1}, \quad p = 1, 2, \cdots,$

および Denjoy - Carleman の条件

(M. 3)′ $\qquad \displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{M_p}{M_{p-1}} < \infty$

をみたすとき，(M. 4)′ よりわずかに弱い条件

(M. 4)″ $\qquad \exists H \quad \left(\dfrac{M_q}{q!}\right)^{1/q} \leqq H \left(\dfrac{M_p}{p!}\right)^{1/p}, \quad 1 \leqq q \leqq p,$

と，$\mathbb{R}$ 上の $\{M_p\}$ 族の超可微分函数 $f(x)$ が $\inf|f(x)|>0$ をみたすとき常に $1/f(x)$ も $\{M_p\}$ 族の超可微分函数になることが同等であることを証明した．(M.1)，(M.3)′ の下では $g(x)=1/x$ は $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ において $\{M_p\}$ 族の超可微分函数となるから，(M.4)′ は定理1が成立するためにほゞ必要である．

C. Roumieu [5] は (M.4)′ より強い条件

$$(\mathrm{M}.4)\qquad \left(\frac{M_p}{p!}\right)^2 \leqq \frac{M_{p-1}}{(p-1)!}\,\frac{M_{p+1}}{(p+1)!},\quad p=1,2,\cdots,$$

の下で定理1のタイプの定理を証明している．M. Gevrey は Gevrey 族 $\{p!^s\}$，$s>1$，に対して陰函数定理を得ているそうであるが詳しいことは知らない．

定理の証明には優級数の方法を用いる．$f(x)$ を開集合 $U\subset\mathbb{R}^n$ 上の無限回可微分函数，

$$F(X)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{F_p}{p!}X^p$$

を不定元 X に関する形式的巾級数とする．$K\subset U$ に対し

$$f(x)\underset{K}{\ll}F(X)$$

とは

$$\sup_{x\in K} |\partial^\alpha f(x)| \leqq F_\alpha, \quad {}^\forall\alpha,$$

と定義する．これは K の各点 $\mathring{x}$ を中心とする $f(x)$ の形式的 Taylor 展開

$$\sum_\alpha \partial^\alpha f(\mathring{x}) \frac{(x-\mathring{x})^\alpha}{\alpha!}$$

が n 個の不定元 $x_1-\mathring{x}_1, \cdots, x_n-\mathring{x}_n$ の形式的巾級数として $F((x_1-\mathring{x}_1)+\cdots+(x_n-\mathring{x}_n))$ を優級数にもつことと同等である．これより

$$f(x) \underset{K}{\ll} F(X), \quad g(x) \underset{K}{\ll} G(X)$$

ならば，

$$f(x)+g(x) \underset{K}{\ll} F(X)+G(X),$$

$$f(x)g(x) \underset{K}{\ll} F(X)G(X),$$

$$\partial^\alpha f(x) \underset{K}{\ll} \partial^{|\alpha|}F(X)$$

となることがわかる．もっと一般に $f=(f_1,\cdots,f_m)$: $U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ が無限回可微分写像のとき，

$$f(x) \underset{K}{\ll} F(X)$$

とは

$$\sup_{x\in K}\sum_{j=1}^{m}|\partial^\alpha f_j(x)| \leqq F_{|\alpha|}, \quad \forall\alpha,$$

と定義する．更に

$$g(y) \underset{L}{\ll} G(Y) = \sum_{q=0}^{\infty}\frac{G_q}{q!}Y^q$$

としたとき，$L \supset f(K)$ ならば

$$g\circ f(x) \underset{K}{\ll} \overline{G\circ F}(X) := \sum_{q=0}^{\infty}\frac{G_q}{q!}(F(X)-F(0))^q$$

がなりたつ．

$\{M_p\}$族，(M_p)族の函数を扱うときは，形式的巾級数

$$\theta(X) = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{M_p}{p!}X^p$$

が解析函数を扱うときの $(1-X)^{-1}$ と同じ役割を果たす．$U \subset \mathbb{R}^n$ 上の無限回可微分函数 $f(x)$ が $\{M_p\}$ 族（(M_p) 族）の超可微分函数であるための必要十分条件は

$$\forall K \Subset U\ \exists h\ \exists C \quad (\forall h>0\ \exists C)$$

$$f(x) \underset{K}{\ll} C\theta(hX)$$

と書ける．

<u>定理1の証明</u>　$f(x) \underset{K}{\ll} C\theta(hX)$，$g(y) \underset{L}{\ll}$

$B\,\theta(kY)$, $L \supset f(K)$ とするとき,

$$g\circ f(x) \underset{K}{\ll} B\sum_{q=0}^{\infty}\frac{M_q}{q!}\Big(Ck\sum_{p=1}^{\infty}\frac{M_p}{p!}(hX)^p\Big)^q$$

の右辺を $B\sum L_r X^r/r!$ と書けば, $r \geqq 1$ に対して

$$L_r = r!\,h^r\sum_{q=1}^{r}\frac{M_q}{q!}(Ck)^q\sum_{\substack{p_1+\cdots+p_q=r\\ p_i\geqq 1}}\frac{M_{p_1}}{p_1!}\cdots\frac{M_{p_q}}{p_q!}.$$

M_p は (M. 4)' をみたすから

$$\sum\frac{M_{p_1}}{p_1!}\cdots\frac{M_{p_q}}{p_q!}$$

$$\leqq \sum\Big(H\Big(\frac{M_{r-q+1}}{(r-q+1)!}\Big)^{\frac{1}{r-q}}\Big)^{p_1-1}\cdots\Big(H\Big(\frac{M_{r-q+1}}{(r-q+1)!}\Big)^{\frac{1}{r-q}}\Big)^{p_q-1}$$

$$=\binom{r-1}{q-1}H^{r-q}\,\frac{M_{r-q+1}}{(r-q+1)!}.$$

故に

$$L_r \leqq r!\,h^r\sum_{q=1}^{r}\binom{r-1}{q-1}\frac{M_q}{q!}\,\frac{M_{r-q+1}}{(r-q+1)!}\,(Ck)^q H^{r-q}$$

$$\leqq M_r H^{r-1}h^r\sum_{q=1}^{r}\binom{r-1}{q-1}(Ck)^q H^{r-q}$$

$$= M_r\,Ck\,H^{r-1}h^r\,(Ck+H)^{r-1}.$$

定理2, 3も似たような計算を行って証明する．詳しくはそれぞれ[1], [2]を見られたい．そこでは(M.4)′よりいくらか強い仮定の下で証明しているが，それを(M.4)′のみを用いた証明に改良することは容易である．

定理3についていえば，常微分方程式は双曲型方程式であるから Leray-Ohya [4] の方法で，初期値 y に関する超可微分性を証明し，次いで [3] の Cauchy-Kowalevsky の定理の非線型版で (t, y) に関する超可微分性を証明する．

文献

[1] H. Komatsu, The implicit function theorem for ultradifferentiable mappings, Proc. Japan Acad., 55 A(1979), 69-72.

[2] H. Komatsu, Ultradifferentiability of solutions of ordinary differential equations, Proc. Japan Acad., 56 A(1980), 137-142.

[3] H. Komatsu, An analogue of the Cauchy-Kowalevsky theorem for ultradifferentiable functions and a division theorem of Ultradistributions as its dual, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA, 26 (1979), 239-254.

[4] J. Leray- Y.Ohya, Équations et systèmes non-linéaires, hyperboliques non-stricts, Math. Ann. 170 (1967), 167-205.

[5] C. Roumieu, Ultra-distributions definiés sur R^n et sur certaines classes de variétés differentiables, J. Anal. Math., 10 (1962-63), 153-192.

[6] W. Rudin, Division in algebras of infinitely differentiable functions, J. Math. Mech., 11 (1962), 797-809.