数理解析研究所講究録
第 410 巻 1980 年 146-153

(ユニタリー)鏡映群に付随した,孤立特異点の変形.

埼玉大・理　矢野 環

A, D, E 型鏡映群の判別式が,ある種の孤立特異点の versal な変形の判別式と同一視されることはよく知られている。以下ではすべての Coxeter 群 (A, B, D, E, F, G, H, I_2) ならびに,多くのユニタリー鏡映群について,その判別式を自然な方法で,孤立特異点の変形の判別式として与える.

§1. 有限ユニタリー鏡映群 (u.g.g.r.)

記号.　$V \simeq \mathbb{C}^m$　m 次元ベクトル空間.

G : $GL(V)$ の有限部分群.

Def. 1. $g \in GL(V)$ が (unitary) reflection であるとは,

1. $\exists e \geq 1$, $g^e = I_V$, かつ 2. $\mathrm{rank}\,(I_V - g) = 1$ //

これより g は semi-simple で固有値は $(\overbrace{1, 1, \cdots, 1}^{m-1}, \rho)$ $\rho \in \mathbb{C}$ となり,ρ は 1 の巾根である. $\rho = -1$ の時 g を 単に reflection とよぶ. 又,g の固定する部分空間を H_g と記す.

$$H_g = \mathrm{Ker}\,(I_V - g).$$

Def. 2. $GL(V) \supset G$ が u.g.g.r. (unitary group generated by reflections) であるとは, G が unitary reflections で生成されていることをいう.//

特に reflection で生成されるものは, 有限 Coxeter 群である.

$S(V)$ を V の symmetric algebra ($S(V^*)$ は V^*(dual) の…)

$S(V)^G$, $S(V^*)^G$ を G-不変元のなす部分環とする.

Thm. 3. (Shephard-Todd) 次の3つは同値.

1. G は u.g.g.r. である.
2. $S(V)^G$ ($S(V^*)^G$) は多項式環である. (n変数)
3. G は分類表 ([C/J]) にあらわれる群の直積に同型.//

分類表は3つの無限系列 (No.1 $\simeq A_\ell$, No.2 $= G(r,p,\ell)$ $1 \le p \le r$, No.3 $\simeq$ (generated by $\exp(\frac{2\pi i}{r})$)) と34個の個別の群からなる.

Thm 3. の 2. より, 商写像 $\mathbb{C}^n \simeq V \to V/G \simeq \mathbb{C}^n$ を得る.

写像 $/G$ は $\#G$ 枚の ramified covering である.

$$\begin{array}{cccccc}
\bigcup_{g:\text{ref.}} H_g & \mathbb{C}^n & \simeq & V & & S(V^*) \\
\downarrow & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle /G} & & \uparrow \\
\{\Delta_G = 0\} & \mathbb{C}^n & \simeq & V/G & & S(V^*)^G
\end{array}$$

Def. 4. 写像 $/G$ の critical set ($\subset V/G$) ~~をG~~ は鏡映面の合併 $\bigcup_{g:\text{ref}} H_g$ の像である. これは超曲面であり, その定義式 ~~をあらわす~~ を G の判別式とよび, Δ_G とあらわす.//

H_g の定義方程式を h_g, H_g を不変にする G の部分群の位数 ~~(ho.)~~ を l_g とすれば, $\Delta_G = \prod h_g^{l_g}$.

又，Vの座標系を $(\xi_1, \cdots, \xi_m)$，$S(V^*)^G$の適当な homogeneous な
生成元を $P_1, \cdots, P_m$ とすれば，(i.e. $S(V^*)^G \simeq \mathbb{C}[P_1, \cdots, P_m]$)

$$\frac{\partial(P_1, \cdots, P_m)}{\partial(\xi_1, \cdots, \xi_m)} = \prod h_g^{\,l_g - 1}.$$

§2. 孤立特異点の変形．単純特異点の変形の判別式．

$(\mathbb{C}^{n+1}, 0) \ni (x_0, \cdots, x_n)$ $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+1}, 0}$　$S = (\mathbb{C}^m, 0) \ni (t_1, \cdots, t_m)$

$f : \mathbb{C}^{n+1}, 0 \longrightarrow \mathbb{C}, 0$ は原点を孤立特異点とするとする．

f の S を parameter space とする変形の族が与えられたとし，
その local な定義式を $F(x, t)$ とする．

$t' = (t_1, \cdots, t_{m-1})$

$F(x, 0) = f(x)$．　$F(x, t) = t_m + F_1(x, t')$ の形と仮定する．

$X = \{(x, t) \in \mathbb{C}^{n+1} \times S \mid F(x, t) = 0\}$ とおく．

$C = \{(x, t) \in X \mid \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0,\ 0 \leq i \leq n\}$．

C の像を D とする．

$$\begin{array}{ccccc} C & \subset & X^{n+m} & & (x, t) \\ \downarrow & & \downarrow \pi & & \downarrow \\ \{\Delta_F = 0\} = D & \subset & S^m & & (t', -F_1(x, t')) \end{array}$$

適当な条件のもとで，D は S の
hypersurface となる．($D = \{t \in S \mid \pi^{-1}(t) : \text{singular}\}$)

<u>Def. 5</u>　D の定義式 Δ_F を変形 F の判別式とよぶ．//

特別な F に対しては，$\{\Delta_F = 0\} \subset S^m$ は §1 の $\{\Delta_G = 0\} \subset V/G$
と同一視される．

<u>Def. 6</u>　$\underbrace{W = A_l, D_l, E_6, E_7, E_8}_{\text{略して A, D, E 型という}}$ とする．下記の函数
f_W は W 型の特異点とよばれる（原点で孤立特異点）

$f_{A_l} = x^{l+1} + yz$，$f_{D_l} = x^{l-1} - xy^2 + z^2$，$f_{E_6} = x^4 + y^3 + z^2$

$$f_{E_7} = x^3y + y^3 + z^2, \quad f_{E_8} = x^5 + y^3 + z^2.$$

これらの函数のversalな変形は下記の通り．

$$F_{A_\ell} = f_{A_\ell} + \sum_{i=2}^{\ell+1} t_i x^{\ell+1-i} \qquad F_{D_\ell} = f_{D_\ell} + \sum_{i=1}^{\ell-1} t_{2i} x^{\ell-1-i} + 2t'_\ell y$$

$$F_{E_6} = f_{E_6} + t_2x^2y + t_5xy + t_6x^2 + t_8y + t_9x + t_{12}$$

$$F_{E_7} = f_{E_7} + t_2xy^2 + t_6y^2 + t_8xy + t_{10}x^2 + t_{12}y + t_{14}x + t_{18}$$

$$F_{E_8} = f_{E_8} + t_2x^3y + t_8x^2y + t_{12}x^3 + t_{14}xy + t_{18}x^2 + t_{20}y + t_{24}x + t_{30} \quad //$$

Theorem 6 (Brieskorn, Arnold etc.)

A, D, E 型 Weyl 群の判別式 $V/W \supset \{\Delta_W = 0\}$ と

A, D, E 型孤立特異点のversalな変形の判別式

$S \supset \{\Delta_{F_W} = 0\}$ とは解析的に同形である．(global) //

(No. 2の一部)

u.g.g.r. の分類までは $A_\ell \simeq$ No. 1. $D_\ell \simeq G(2,2,\ell)$, $E_6 \simeq$ No. 35

$E_7 \simeq$ No. 36, $E_8 \simeq$ No. 37 である．さらに，Coxeter群であるものは他に B_ℓ (or C_ℓ) $\simeq G(2,1,\ell)$, $F_4 \simeq$ No. 30, $G_2 = G(6,6,2)$

$H_3 \simeq$ No. 23, $H_4 \simeq$ No. 28, $I_2(m) \simeq G(m,m,2)$ である．

Thm 7. (Arnold, Slodowy etc.) 下記の変形 F_W の判別式は W 型 Coxeter群の判別式に同型．$W = B_\ell, F_4, G_2, (C_\ell)$

$$F_{B_\ell} = f_{A_{2\ell-1}} + \sum_{i=1}^{\ell} t_{2i} x^{2\ell-2i}, \quad F_{C_\ell} = f_{D_{\ell+1}} + \sum_{i=1}^{\ell} t_{2i} x^{\ell-i}$$

$$F_{F_4} = f_{E_6} + t_2x^2y + t_6x^2 + t_8y + t_{12}$$

$$F_{G_2} = x^3 + y^3 + t_2xy + t_6 \quad /$$

§ 3. Coxeter 型 deformation

Th.6.7 では Coxeter 群 H_3, H_4, $I_2(m)$ が含まれていない。それらの群に対しても，標準的な方法によって，孤立特異点の変形の判別式と同一視しうる。

<u>Thm. 8</u> ([2]) $W = H_3, H_4, I_2(m)$ に対し，次の変形を考える。

$$F_{H_{3\pm}}(x,s) = f_{D_6}(x) + s_2 x^4 + \frac{7}{20} s_2^2 x^3 + \left(s_6 + \frac{1}{20} s_2^3\right) x^2$$
$$+ \left(\frac{3}{10} s_2 s_6 + \frac{1}{400} s_2^4\right) x + \left(s_{10} + \frac{1}{100} s_2^2 s_6 + \frac{1}{5\times 10^4} s_2^5\right)$$
$$\pm \frac{1}{\sqrt{5}} s_6 y, \qquad (f_{D_6} = x^5 - xy^2 + z^2)$$

$$F_{H_4}(x,s) = f_{E_8}(x) + (\cdots\cdots)$$

$F_{I_2(m)}$，下記のいくつかにわかれる。 $(\alpha,n) = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)$

$$F_{I_2(2k+1)}(x,s) = f_{A_{2k}} + \sum_{j=1}^{k} \frac{(2k+2-2j,\, j-1)}{j!\,(2k+1)^{j-1}} s_2^j x^{2k+1-2j} + s_{2k+1}$$

$$F_{I_2(2k)_A}(x,s) = f_{A_{2k-1}} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(2k+1-2j,\, j-1)}{j!\,(2k)^{j-1}} s_2^j x^{2k-2j} + s_{2k} + \frac{s_2^k}{k(2k)^{k-1}}$$

$$F_{I_2(2k)_D}(x,s) = f_{D_{k+1}} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(2k+1-2j,\, j-1)}{j!\,(2k)^{j-1}} s_2^j x^{k-j} + s_{2k} + \frac{s_2^k}{k(2k)^{k-1}}$$

$$F_{I_2(12)_E}(x,s) = f_{E_6} + s_2 x^2 y - \frac{1}{24} s_2^3 x^2 - \frac{1}{576} s_2^4 y + s_{12}$$

$$F_{I_2(18)_E}(x,s) = f_{E_7} + (\cdots)$$

$$F_{I_2(30)_E}(x,s) = f_{E_8} + (\cdots)$$

このとき，$F_{W_*}(x,s)$ の判別式は，W の判別式に等しい。F_{H_4}, $F_{I_2(18)_E}$, $F_{I_2(30)_E}$ の詳しい形は [3] 参照。//

この定理は，flat generator system の理論から得る。[3] [4].

さらに重要なことは, 上記の変形がすべて

$$F_{W_*} = f_G + (\cdots)$$

の形をしていることである。実は W は G を "fold" した部分群になっている. G の作用する空間を V', W のそれを V とするとき, flat generator system により自然な embedding $V'/G \hookrightarrow V/W$ が誘導される.

Thm. 9.

$$\begin{tikzcd}
V' \arrow[d, "G"] & \supset & V \arrow[d] & & X' = \{F_G = 0\} \arrow[d] & \supset & X = \{F_W = 0\} \arrow[d] \\
V'/G & \supset & V/W & \simeq & S' & \supset & S
\end{tikzcd}$$

1. V は V' の linear subspace.
2. embedding $V'/G \hookrightarrow V/W$ は linear subspace w.r.t. flat coordinate systems on V'/G and V/W. //

§4. Unitary ref groups と deformations

u.g.g.r. に対応する deformation を一覧表とする. Shephard-Todd の番号, 不変式のとり方, 変形, 判別式の形などをならべる。いくつかのものは Weyl 群の時と同じくある意味で Lie 環が対応する.

No.		変形	判別式の形	他
$G(r,1,\ell)$	$r \mid A_{r\ell-1}$	$x^{r\ell}+yz+t_r x^{r\ell-r}+t_{2r}x^{r\ell-2r}+\cdots+t_{\ell r}$	B_ℓ	
$[\ ]^r$	$r \mid A_{r-1}$	x^r+yz+t_r	A_1	
4	$\hat{3},\hat{6} \mid D_4$	$x^3+y^3+t_4x+t_6$	A_2	$D_4^{(3)}$
5	$6 \mid E_6$, $\hat{3} \mid E_6$ $3,6 \mid F_4$	$x^4+y^3+t_6x^2+t_{12}$	B_2	$F_4^{(1)}$
8	$4 \mid E_6$ $\hat{4} \mid E_6$ $4 \mid F_4$ $\hat{8} \mid F_4$	$x^4+y^3+t_8y+t_{12}$	A_2	
16	$5,10 \mid E_8, H_4$	$x^5+y^3+t_{20}y+t_{30}$	A_2	$E_8^{(1)}$
25	$3 \mid E_6$ $\hat{6} \mid E_6$	$x^4+y^3+t_6x^2+t_9x+t_{12}$	A_3	$E_6^{(1)}$
26	$3,6 \mid E_7$	$x^3y+y^3+t_6y^2+t_{12}y+t_{18}$	$(B_3=)\ C_3$	$E_7^{(1)} E_8^{(1)}$
32	$3,6 \mid E_8$	$x^5+y^3+t_{12}x^3+t_{18}x^2+t_{24}x+t_{30}$	A_4	$E_8^{(1)}$
20	$3,6 \mid H_4$	$x^5+y^3+t_{12}x^3+a\,t_{12}^2x+t_{30}$	$I_2(5)$	
9	$8 \mid E_8$	$x^5+y^3+t_8x^2y+t_{24}y$	G_2	
10	$12 \mid E_8$	$x^5+y^3+t_{12}x^3+t_{24}x$	B_2	
12	$\hat{4} \mid F_4$	$x^4+y^3+t_6x^2+t_8y+\frac{1}{8}t_6^2$	$(t_8/3)^3+(t_6/4)^4$	
22	$4 \mid H_4$	$x^5+y^3+t_{12}x^3+t_{20}y+a\,t_{12}^2x$	$A t_{20}^3+B t_{12}^5$	
31	$4 \mid E_8$	$x^5+y^3+t_8x^2y+t_{12}x^3+t_{20}y+t_{24}x$	次頁	$E_6^{(1)} E_7^{(1)} E_8^{(1)}$
13		$x^5+y^3+t_8x^2y+t_{12}x^3+(\cdots)$	$t_{12}(A t_{12}^2+B t_8^3)$	

ここで No.20 と No.22 における a は $\frac{9}{20}$ 又は $\frac{1}{5}$ のいずれか一方である (未決定).

No. 31 の判別式は $\det M(t)=0$ で与えられる.

$$M(t)=\begin{pmatrix} 2t_8 & 25t_{20}-12t_8t_{12} & 30t_{24}-9t_{12}^2+\frac{4}{3}t_8^3 & -3t_{12}t_{24}+\frac{4}{3}t_8^2t_{20} \\ 3t_{12} & 30t_{24}-9t_{12}^2+\frac{4}{3}t_8^3 & -35/3\,t_8t_{20} & \frac{2}{3}t_8^2t_{24}-\frac{25}{3}t_{20}^2+2t_8t_{12}t_{20}-\frac{13}{5}t_8^2t_{12}^2 \\ 5t_{20} & -2t_8t_{24} & -3t_{12}t_{24} & -6t_{24}^2 \\ 6t_{24} & -3t_{12}t_{24}+\frac{4}{3}t_8^2t_{20} & \frac{2}{3}t_8^2t_{24}-\frac{25}{3}t_{20}^2+2t_8t_{12}t_{20} & \frac{19}{3}t_8t_{20}t_{24}-5t_{12}t_{20}^2 \end{pmatrix}$$

このとき M の列は 判別式を相対的に不変にするベクトル場の free basis をなす.

尚，次のことが成立する.

G (u.g.g.r) generated by k reflections $\Leftrightarrow$ mult_0(判別式) $= k$.

---

flat coordinate は，Gauss-Manin connection の計算や，multiplicity の高い場合の b 函数の行列表示（これは文献がない．学会講演のみ）の表示を極めて明瞭な形で表示するのにも役立つ．これは東大の高崎氏も注意されており，氏はさらに色々な現象を見出した．これらのことは関係が深いが，今はふれない．

[1] Shephard-Todd, Can. J. Math. 6.

(2) Yano, Sci. Rep. Saitama Univ. IX-3, 1980.

(3) Yano, Finite unitary reflection groups and deformation of singularities, in prep.

(4) Saito-Yano-Sekiguchi, Comm. in Alg. 8(4), 1980.