数理解析研究所講究録
第 414 巻 1981 年 143-160

Nonlinear Evolution Equations and Solitons in Spin Systems

京工繊大 工芸　　武野正三

古典的スピン系には色々なタイプのソリトン的非線型波動が存在する。ここでは，空間二次元，三次元の場合の等方ハイゼンベルグ模型におけるvortex解，kink解，同様な場合のXYスピン系におけるvortex解につきふれる。また空間一次元の場合のIsingスピン系，およびXYスピン系のmoving kink解にもふれる。Isingスピン系の場合,高次元も考察する。

§1. Introduction

ここでは，次の三つのスピン模型を考察する。

(i) $H \equiv H(\{\vec{S}_n\}) = -\sum_{nm} J(n,m)\,\vec{S}_n \cdot \vec{S}_m$　　等方ハイゼンベルグ模型

(ii) $H = -\epsilon \sum_n S_n^z - \sum_{nm} J(n,m)(S_n^x S_m^x + S_n^y S_m^y)$　　XY 模型

(iii) $H = -\epsilon \sum_n S_n^z - \sum_{nm} J(n,m)\, S_n^x S_m^x$　　Ising 模型

古典的スピン系は，各格子点で定義されているスピンベクトル$\vec{S}_n$の成分S_n^α $(\alpha=x,y,z)$が

$$(S_n^x)^2+(S_n^y)^2+(S_n^z)^2=S^2 \qquad S:\text{定数} \tag{1.1}$$

の関係をみたし，S_n^αの従ふ運動方程式が

$$\dot{S}_n^x=-\left\{S_n^y(\partial H/\partial S_n^z)-S_n^z(\partial H/\partial S_n^y)\right\} \quad etc. \tag{1.2}$$

で与えられることによりこの非線型波動の問題が数学的に導入される。ちなみに，量子力学的には，模型(i)，(ii)，(iii)は，空間一次元，最近接相互作用の場合，所謂Bethe ansatz および Jordan-Wigner変換により問題がexactに解ける例となっていることは，ソリトンの問題が注目をあびる遥か以前より知られていた事であるが，このようなexact solution とソリトンはどのような関係にあるかと云う問題は別の観点から興味のある所であるが，ここではふれる余裕はない。

(1.1)よりS_n^αは二つの回転角θ_n，φ_nによりparametrizeされる：

$$S_n^x=S\sin\theta_n\cos\varphi_n, \quad S_n^y=S\sin\theta_n\sin\varphi_n, \quad S_n^z=S\cos\theta_n. \tag{1.3}$$

また，問題に応じ，次のstereographic variable μ_nを導入することが便利である。

$$\mu_n=\tan(\theta_n/2)\,e^{i\varphi_n}. \tag{1.4}$$

(1.3)より運動方程式(1.2)は，次の形の θ_n, φ_n に対する運動方程式に reduce される

$$\dot{\theta}_n = (1/S\sin\theta_n)\,\partial H/\partial\varphi_n, \quad \dot{\varphi}_n = -(1/S\sin\theta_n)\,\partial H/\partial\theta_n \tag{1.5}$$

同様に μ_n について成り立つ式は

$$i\dot{\mu}_n = \left[(1+|\mu_n|^2)^2/2S\right]\,\partial H/\partial S_n^* \tag{1.6}$$

となる。以下では，模型(i),(ii),(iii)について，連続体近似を用いて，微差分方程式(1.5),(1.6)を微分方程式に reduce し，それ等の解のありましにつき論ずることにする。

§2. 二次元，三次元の場合の等方ハイゼンベルグ模型

このとき，θ, φ について成り立つ微分方程式は次の形をとる：

$$\dot{\theta} = -2\cos\theta\,\nabla\theta\cdot\nabla\varphi - \sin\theta\,\Delta\theta \tag{2.1a}$$

$$\sin\theta\,\dot{\varphi} = \Delta\theta - \sin\theta\cos\theta(\nabla\varphi)^2 \tag{2.1b}$$

あるいは

$$i\dot{\mu} = \left[2\mu^*/(1+|\mu|^2)\right](\nabla\mu)^2 - \Delta\mu. \tag{2.2}$$

(ただし，変数 x, y, z, t は適当に re-scale してある。)

空間一次元の場合，(2.1) or (2.2) は nonlinear Schrödinger eq. と同等であることが示されているので，[1] この場合にはふれない。空間二次元，三次元の場合，ここでは static eqs.，すなわち，(2.1),(2.2) において $\dot{\theta}=\dot{\varphi}=\dot{\mu}=0$ とおいた場合の解に

のみ注目する。この方程式は，$\partial H/\partial \varphi_n=0$，$\partial H/\partial \theta_n=0$ および $\partial H/\partial \rho_n^*=0$ より得られるものであり，エネルギーのlocal minimum stateを与えることに注目しよう。すると，staticな解として次の二つの型のものが興味あるものとして考えられる:

a) vortex解

$$\theta=\theta(r) \quad \text{and} \quad \varphi=\delta\phi \quad (\delta=\pm1,\pm2\dots) \tag{2.3}$$

b) uniform-flow 解

$$\vec{v}=\nabla\varphi=\text{const.}=\vec{v}_0 \qquad (\vec{v}:\text{速度ベクトル}) \tag{2.4}$$

ここに，r,ϕは二次元の場合の極座標，r,ϕ,zは三次元の場合の円柱座標である．以下，a)，b)の場合につき別々に論ずることにする。

a) vortex 解

(2.1b)は次の形をとる．

$$r(d/dr)(r\,d\theta/dr)-\delta^2\sin\theta\cos\theta=0. \tag{2.5}$$

$r=\ln R$ とおけば，(2.5)は一次元のstatic sine-Gordon eq.となり，その一般的な周期解は

$$\cos\theta=k\,\mathrm{sn}(\ln r^{\delta};k) \quad \text{with} \quad \varphi=\delta\phi \tag{2.6}$$

となる．modulus kは $k=(1+C)^{1/2}$ により積分定数 C と関係づけられる。$k=1$，$k=0$ の場合(2.6)は

$$\theta=2\tan^{-1}(r^{\delta}) \ (k\to1), \qquad \theta=\pi/2 \text{ or } 3\pi/2 \ (k\to0)\cdot \tag{2.7}$$

となり，最初のものが sine-Gordon eq. の kink 解に対応することに注意しよう。

空間二次元の場合，(2.1) に対してもっと一般的な vortex 解が存在する。(2.1a) with $\dot{\theta}=0$ に対して

$$\Delta\varphi = 0 \qquad (2.8)$$

を要求しよう。すると $\theta_x\varphi_x + \theta_y\varphi_y = 0$ ($\theta_x \equiv \partial\theta/\partial x$ etc.) だから

$$\theta_x = -f\varphi_y, \qquad \theta_y = f\varphi_x \qquad (2.9)$$

とおくことができる。f は θ のみの関数とみなし，(2.1b) with $\dot{\varphi}=0$ に代入すると

$$f = (\sin^2\theta + C)^{1/2}, \quad (C：積分定数) \qquad (2.10)$$

が得られる。複素数 $z = x+iy$ を導入すると，(2.8) の解 (mod 2π) は

$$\varphi = \sum_i g_i \tan^{-1}[(y-y_i)/(x-x_i)] = \sum_i g_i \arg(z-z_i) \qquad (2.11)$$

で与えられる。ここに $g_i = \pm1, \pm2, \cdots$，x_i, y_i は定数であり，vortex の位置を与える。いま，流体力学との対応から

$$\varphi_x = \psi_y, \qquad \varphi_y = -\psi_x \qquad (2.12)$$

により流れの関数 ψ を導入すると θ についての解は

$$\cos\theta = k\,\mathrm{sn}(\psi ; k) \qquad (2\text{-}13)$$

で与えられることを示すことができる。kは前と同様に、$k=(1+c)^{1/2}$ で与えられる。(2.11), (2.13) は (2.1) の static vortex 解を与える。これは (2-6) の拡張であり、multi-vortex 解である。(2-13) は $k=1, 0$ の特別な場合に対して

$$\theta = \begin{cases} 2\tan^{-1}\psi & \text{for } k=1 \qquad (2.14a) \\ \pi/2 \text{ or } 3\pi/2 & \text{for } k=0 \qquad (2.14b) \end{cases}$$

となり、(1.4) で定義される stereographic variable で表わすと

$$\mu = \begin{cases} \prod_i (z-z_i)^{\delta_i} & \text{for } k=1 \qquad (2.15a) \\ \prod_i \left[(z-z_i)/(z^* - z_i^*)\right]^{\delta_i/2} & \text{for } k=0 \qquad (2.15b) \end{cases}$$

となる。このようにして与えられる multi-vortex 解は、通常の非線型波動の場合の multi-soliton solution と異なった形をしていることに注目しよう。また、(2-15) で $\delta_i = \pm 1$ のものは、エネルギーの最も低い渦の励起に対応し、このようなものが物理的観点から興味がある。この時、このような解は、色量子力学 (quantum chromodynamics or QCD) における instanton 解とある種の対応があり、そのような解は場の理論でも最近注目されている。尚、系のエネルギー密度 (Hamiltonian functional) を

$$H/S = \int d\vec{r}\, \bar{H}(\vec{r}) \qquad (2.16)$$

で定義すると，(2.11)，(2.13) で与えられる解は

$$\bar{H}(\vec{r}) = 2\,\mathrm{dn}^2(\psi;k)(\nabla\psi)^2 \tag{2.17}$$

で与えられ，

$$\bar{H}(\vec{r}) = \begin{cases} [2\,\mathrm{sech}^2\psi](\nabla\psi)^2 & \text{for } k=1 \quad (2.18a) \\ 2(\nabla\psi)^2 & \text{for } k=0 \quad (2.18b) \end{cases}$$

となり，$k=1$ の場合，(2.14a) からも分かるように，vortex 解は空間的にエネルギーの局在した状態に対応し，"広い意味で" ソリトンと呼べるものと考えてよいであろう。

b) uniform-flow 解

(2.4) における constant vector $\vec{v}_0$ を次の形にとる：

$$\vec{v}_0 = v_0\hat{z} \qquad (v_0\text{：定数}) \tag{2.19}$$

ここに，$\hat{z}$ は z 軸方向の単位ベクトルである。すると (2.1a) より $\theta_z = 0$ となり，(2.16) with $\dot{\varphi} = 0$ は

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = v_0^2 \sin\phi\,, \quad \phi = 2\theta \tag{2.20}$$

となり，static な二次元の sine-Gordon eq. に reduce される。空間が二次元でスピンが yz-面内に配列していると すると，(2.20) は一次元の sine-Gordon eq. であり，

$$\theta = 2\tan^{-1}(e^{\pm v_0 y}) \quad \text{with } \varphi = v_0 z + \varphi_0 \quad (2.21)$$
$$\varphi_0\text{：定数}$$

となる。空間三次元の場合，(2.20) そのものの特解を求めるのであるが、これは既に広田により得られている。[2] いま，

$$\theta = 2\tan^{-1}(g/f) \qquad \text{with} \quad \varphi = v_0 z + \varphi_0 \tag{2.22}$$

とおくと，その解は 3-soliton solution まで求められて，

$$f = 1 + a_{23}e^{\eta_2+\eta_3} + a_{31}e^{\eta_3+\eta_1} + a_{12}e^{\eta_1+\eta_2} \tag{2.23a}$$

$$g = e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_3} + a_{23}a_{31}a_{12}e^{\eta_1+\eta_2+\eta_3} \tag{2.23b}$$

となる。ここに

$$\eta_i = v_0(k_i x + l_i y), \quad a_{ij} = \frac{(k_i-k_j)^2+(l_i-l_j)^2}{(k_i+k_j)^2+(l_i+l_j)^2} \tag{2.24a}$$

$$\text{with} \qquad k_i^2 + l_i^2 = 1 \tag{2.24b}$$

で与えられる。

尚§2を終えるに当り，(2.2)の static form は軸対称重力場を記述する Ernst eq.[3]

$$(|\xi|^2 - 1)\Delta\xi = 2\xi^*(\nabla\xi)^2 \tag{2.25}$$

と analogous な形をしていることに注意しておく。

§3 XY-模型

この場合は，便利な場の量として

$$\psi_n \equiv (S_n^x + i S_n^y)/S \tag{3.1}$$

を導入する。連続体近似の下では、ψのみたす微分方程式は一般に

$$i\dot{\psi}(1-|\psi|^2)^{-1/2} = (2/S)\,\delta H/\delta\psi^* \tag{3.2}$$

で表わされる。(3.2)に対応して次式を導入する：

$$i\dot{\psi} = (2/S)\,\delta H/\delta\psi^*. \tag{3.3}$$

(3.3)で記述される場を analogous な complex scalar field と呼ぶことにしよう。すると、XY-模型の場合、(3.2), (3.3) はそれぞれ変数を適当に rescale すると、

$$i\dot{\psi}(1-|\psi|^2)^{-1/2} = \psi(1-|\psi|^2)^{-1/2}(1/\lambda) - \psi - \Delta\psi \tag{3.4a}$$

$$i\dot{\psi} = (1/\lambda)\,\psi(1-|\psi|^2)^{-1/2} - \psi - \Delta\psi \tag{3.4b}$$

with $\lambda = 2S\sum_m J(n,m)/\epsilon$ (3.5)

の形をとる。(3.4b) は $(1-|\psi|^2)^{-1/2}$ を $|\psi|^2$ につき展開すると

$$i\dot{\psi} + [1-(1/\lambda)]\psi + \Delta\psi - (1/2\lambda)|\psi|^2\psi = 0 \tag{3.6}$$

となり nonlinear Schrödinger eq. に reduce する。$\lambda > 1$ のとき、(3.6) は

$$\psi = [1-(1/\lambda^2)]^{1/2}\, e^{i\varphi_0} \quad (\varphi_0 : \text{定数}) \qquad (3.7)$$

$$\lambda > 1$$

で与えられる nontrivial な解を持つ。このとき、場は"対称性の破れた基底状態"を持ち、(3.6) は一次元の場合、dark-soliton 解を与える非線型 Schrödinger eq. となる。(3.4), (3.5) は、(3.6) と異なり $\psi(1-|\psi|^2)^{-1/2}$ で与えられる非線型性を持つ新しいタイプの非線型発展方程式である。

空間一次元の場合、(3.4), (3.5) 式は、θ, φ につき

$$\gamma \dot{\theta} = -2\cos\theta\, \theta_x \varphi_x - \sin\theta\, \varphi_{xx} \qquad (3.8a)$$

$$\gamma \sin\theta\, \dot{\varphi} = -(1/\lambda)\sin\theta + \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta\, \theta_{xx} - \sin\theta\cos\theta\,(\varphi_x^2 + \theta_x^2) \qquad (3.8b)$$

with

$$\gamma = \begin{cases} 1 & \text{for Eq. (3.4a)} \quad (3.9a) \\ \cos\theta & \text{for Eq. (3.4b)} \quad (3.9b) \end{cases}$$

の形をとる。

$$\theta = \theta(x-vt) \equiv \theta(\xi), \quad \varphi = \varphi(x-vt) \equiv \varphi(\xi) \qquad (3.10)$$

$$v : \text{定数}$$

の形の特解を求めると、それは

$$\cos\theta = A\cos\Theta \quad \text{with} \quad A = \begin{cases} (1-v^2)^{1/2} & \text{for Eq. (3.4a)} \\ 1 & \text{for Eq. (3.4b)} \end{cases} \qquad (3.11)$$

で定義される Θ について

$$\Theta + 2\cot\Theta_0 \tanh^{-1}\left[\cot(\Theta_0/2)\tan(\Theta/2)\right] = \pm(x - vt) \tag{3.12}$$

$$\varphi = \begin{cases} vA \displaystyle\int \frac{\cos\Theta_0 - \cos\Theta(\xi)}{1 - A^2\sin^2\Theta(\xi)}\, d\xi + \varphi_0 & \text{for Eq.(3.4a)} \quad (3.13a) \\ (v/2)(x - vt) + \varphi_0 & \text{for Eq.(3.4b)} \quad (3.13b) \end{cases}$$

で与えられる。ここに

$$\begin{cases} A\cos\Theta_0 = 1/\lambda, & \text{for Eq.(3.4a)} \\ \cos\Theta_0 = 1/[1+(v/2)^2] & \text{for Eq.(3.4b)} \end{cases} \tag{3.14}$$

で与えられる。(3.12), (3.13) は symmetry-breaking solution に $x = \pm\infty$ で reduce する one-kink solution である。two-soliton or multi-soliton solution があるか否かは、未だよく分からない。

空間 2 次元, 3 次元の場合、我々は static solution のみに着目する。このとき、(3.4a), (3.4b) は同一の形になり

$$\Delta\psi + \psi - (1/\lambda)\psi(1 - |\psi|^2)^{-1/2} = 0 \tag{3.15}$$

に reduce される。(2.3) の場合と全く同じ形の解, 即ち one-vortex 解を考察する。このとき,

$$\psi = \sin\theta(r)\, e^{i\delta\phi} \equiv F(r)\, e^{i\delta\phi} \tag{3.16}$$

とおくと，$F(r)$につき成り立つ式は

$$(1/r)(d/dr)(r\,d/dr)F - \{1-(\delta^2/r^2)\}F - (1/\lambda)F/(1-F^2)^{1/2} = 0 \tag{3.17}$$

となる。この式は解析的に解くことは出来ないが，次の境界條件

$$F(r) = \begin{cases} 0 & \text{for } r=0 \quad (3.18a) \\ [1-(1/\lambda^2)]^{1/2} & \text{for } r=\infty \quad (3.18b) \end{cases}$$

をみたす解の$r\to 0$と$r\to\infty$における漸近形は

$$F(r) = \begin{cases} c\, r^{|\delta|} & \text{for } r\to 0 \quad (3.19a) \\ [1-(1/\lambda^2)]^{1/2} - (\delta^2/\lambda)(\lambda^2-1)^{-1/2}(1/r^2) & \text{for } r\to\infty \quad (3.19b) \end{cases}$$

となる。

$$\varphi = \delta\phi \tag{3.20}$$

と共に(3.19)は one-vortex 解を与える。模型(II)の場合と同様に，(3.15)式に対して multi-vortex 解を求めることは興味あることであるが，まだ成功していない。

§4. Ising 模型

この場合, 便利な場の量として

$$\rho_n \equiv S_n^x / S \tag{4.1}$$

を選ぶのがよいことが分かる。すると，前の場合と同様，連續体近似の下で, (1.2) 式は(1.3) は次の形の微分方程式をみたす：

$$\Delta\rho - (1/\lambda)[(\ddot{\rho}/\epsilon^2)+\rho][1-\rho^2-\dot{\rho}^2/\epsilon^2]^{-1/2} = -\rho \tag{4.2}$$

(4.2) に対して

$$\Delta\rho - (1/c^2)\ddot{\rho} = -\rho + (1/\lambda)\rho(1-\rho^2)^{-1/2} \tag{4.3}$$

$$c = \lambda\epsilon^2$$

を考察する. (3.2) と(3.3) 式は (3.4a) と(3.4b) の場合と同様に, (4.3) で記述される場を (4.2) に対する real scalar field と呼ぶことにする. static な場合, 即ち $\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$ の場合, (4.2) と nonlinear Klein-Gordon eq. の形を持つ (4.3) は同一の形の式

$$\Delta\rho + \rho - (1/\lambda)\rho(1-\rho^2)^{-1/2} = 0 \tag{4.4}$$

に reduce されることに注意する。ρ は空間座標の実関数であるが, (3.15) と全く同一の形をしていることに注意する。

空間一次元の場合, (3.7) と同様 nontrivial uniform

solution

$$\rho = \pm\left[1-(1/\lambda^2)\right]^{1/2} \equiv \pm\rho_0, \qquad \lambda > 1 \tag{4.5}$$

について，次の境界条件

$$\rho = \pm\rho_0 \ \text{for}\ x \to \pm\infty \ \text{or}\ \rho = \mp\rho_0 \ \text{for}\ x = \pm\infty \tag{4.6}$$

をみたす解は，$\rho(x, t) = \rho(x - vt)$ （v:定数）の形を仮定すると

$$\phi = \sin^{-1}(\rho/A), \qquad \phi_0 = \sin^{-1}(\rho_0/A) \tag{4.7}$$

with

について．

$$A = \begin{cases} (1 - v^2/\lambda c^2)^{1/2} & \text{for Eq. (4.2)} \quad (4.8a) \\ 1 & \text{for Eq. (4.3)} \quad (4.8b) \end{cases}$$

$$\phi + 2\cot\phi_0 \tanh^{-1}\left[\cot(\phi_0/2)\tan(\phi/2)\right] = \pm\gamma(x - vt) \tag{4.9}$$

の形をとる。ここに

$$\gamma = \begin{cases} 1 & \text{for Eq. (4.2)} \quad (4.10a) \\ \left[1-(v^2/c^2)\right]^{-1/2} & \text{for Eq. (4.3)} \quad (4.10b) \end{cases}$$

は"Lorentz contraction factor"である。(4.9)は縮退した対称性の破れた基底状態 $\rho = \pm\rho_0$ の間を結ぶ kink 解である。(4.2)，(4.3)の場合との相違は，前者の場合，(4.8)，(4.7)から分かるように，スピンの縮みが起り，後者の場合，長さの縮みが起ることである。尚，(4.9)は(3.12)と全く同一形をなし

ていることに注目しよう。一次元の場合,(4.2)式は(4.3)の two-soliton 解, multi-soliton 解があるか否かは興味ある問題の一つである。また,(3.6)の場合と同様に,(4.3),(4.4)における非線型項 $(1/\lambda)\rho(1-\rho^2)^{-1/2}$ を $(1/\lambda)\{\rho+(1/2)\rho^2\}$ と近似すると,例えば(4.3)は

$$\Delta\rho-(1/c^2)\ddot{\rho}=-[1-(1/\lambda)]\rho+(1/2\lambda)\rho^3 \qquad (4.11)$$

$$\lambda>1$$

となり,これは φ^4-field theory に現われる式となっている。

Ising 模型に analogous な real scalar field equation (4.3)は,空間二次元以上の場合も,共鳴ソリトン的多ソリトン解を持っていることを示すことができる(勿論,これは普通の意味での多ソリトン解ではなく,このような解については,通常の逆散乱手法が使えるものに対応している)。(4.3)を次の形の一般的な nonlinear Klein-Gordon equation に書き直す:

$$\Delta\rho-\rho_{tt}=dV(\rho)/d\rho \qquad (4.12)$$

$$V(\rho)=-(1/2)\rho^2-(1/\lambda)(1-\rho^2)^{1/2} \qquad (4.13)$$

ただし,前と同様,変数は適当に rescale してある。$\rho=\rho(x,y,z;t)$ が次の式をみたす g のみの関数とする。

$$\Box g=g \qquad \text{and} \qquad (\tilde{\nabla}g)^2=g^2 \qquad (4.14)$$

ここに，

$$\Box = \Delta - (\partial^2/\partial t^2), \qquad (4.15)$$

$$(\tilde{\nabla} g)^2 = (\partial g/\partial x)^2 + (\partial g/\partial y)^2 + (\partial g/\partial z)^2 - (\partial g/\partial t)^2 \qquad (4.16)$$

すると (4.12) は

$$(d\rho/dg)g + (d^2\rho/dg^2)^2 = dV/d\rho \qquad (4.17)$$

となる。

$$f = \ln g \sim g = e^f \qquad (4.18)$$

とおけば，(4.17) を1回積分すると

$$(d\rho/df)^2 = 2V(\rho) + c \qquad (4.19)$$

となる。ここに，c は積分定数である．一方，(4.14) より g は

$$g \Box g - (\tilde{\nabla} g)^2 = 0 \sim (D_x^2 + D_y^2 + D_z^2 - D_t^2) g \cdot g = 0 \qquad (4.20)$$

をみたす。ここに，$D_x^n F \cdot F$ は

$$D_x^n F \cdot F = [(\partial/\partial x) - (\partial/\partial x')]^n F(x) F(x') \Big|_{x=x'} \qquad (4.21)$$

で定義される広田の D-operator である。(4.20) は

$$g = \sum_{i=1}^{\sim} \exp(\theta_i) \qquad (4.22)$$

$$\theta_i = k_i x + l_i y + m_i z - \omega_i t \tag{4.23}$$

$$(k_i,\ l_i,\ m_i,\ \omega_i：定数)$$

の形の解を

$$k_i^2 + l_i^2 + m_i^2 - \omega_i^2 = 1 \tag{4.24}$$

$$(k_i - k_j)^2 + (l_i - l_j)^2 + (m_i - m_j)^2 - (\omega_i - \omega_j)^2 = 0 \tag{4.25}$$

の条件の下で持つことを示すことができる。(4.13)を(4.19)に代入すると、(4.9)にanalogousな特解は

$$\phi + 2\cot\phi_0 \tanh^{-1}\left[\cot(\phi_0/2)\tan(\phi/2)\right] = \ln\left(\sum_{i=1}^{N} e^{i\theta_i}\right) \tag{4.26}$$

となる。$N=1$の場合、(4.26)は(4.9)にreduceする。(4.24), (4.25)より、(4.26)は共鳴ソリトン解と呼んでよいであろう。勿論このような解は、空間2次元以上の場合でのみ実現される。

§5 結論

古典的スピン系は、一次元における通常のソリトン的励起の外に、空間二次元、三次元の場合、vortex解を持ち、多岐にわたる非線型波動が存在することを示した。尚、模型(i)の外に、次の系

$$H = -\sum_{nm} J(n,m)\,\vec{S}_n \cdot \vec{S}_m - \sum_n \left\{ K_1 (S_n^x)^2 + K_2 (S_n^y)^2 + K_3 (S_n^z)^2 \right\} \tag{5.1}$$

$K_1 < K_2 < K_3$ は定数

の示す系も，空間一次元の場合，完全積分系となることが示されている。空間二，三次元の場合，別な型の非線型波動が存在することは，模型(i)，(ii)，(iii)との類推から予想されるであろう。模型(i)，(ii)，(iii)および(5.1)で示される系等は，元来，物理における磁性の問題において現われて来るが，数学的には，他の問題，例えば，色々な場を記述する方程式と対応を持っている。このような意味で，古典的スピン系における各種の非線型波動が，他のfieldにおける場の方程式のソリトン解とどのように関連するか，また，問題を量子力学的面からみて，量子系における一次元の場合の厳密解と古典的なソリトン解との関連等を調べることは興味あることの一つであるように思われる。

References

1) M. Lakshmanan, Phys. Letters 61A(1977)53;
V. E. Zakharov and L. A. Takhtajan, Theor. and Math. Phys. 38(1979), 17.

2) R. Hirota, J. Phys. Soc. Japan 35(1973), 1566.

3) F. J. Ernst, Phys. Rev. 167(1968), 1175.