数理解析研究所講究録
第414巻 1981年 212-223

クリフォード演算子とリーマンの問題

京大数理研　三輪哲二

本稿では，不確定特異点も含めた，モノドロミーに関するリーマンの問題を，クリフォード演算子を使って記述する方法を紹介する。基本的なアイディアのみ述べるので，詳細は次のプレ・プリントを見ていただきたい。

RIMS－342
Clifford operators and Riemann's monodromy problem.

RIMS－343
Painlevé property of monodromy preserving deformation equations and the analyticity of τ functions.

出発点となったのは Wu, McCoy, Tracy, Barouch による次の結果である。

2次元 Ising 模型の2点相関函数のスケール極限を $\tau_-(t)$（$T\uparrow T_c$）および $\tau_+(t)$（$T\downarrow T_c$）とする。$\eta(t)$ を適当な境界条件のもとでの次の非線型方程式の解

とする。

$$\eta'' = \frac{1}{\eta}(\eta')^2 - \frac{1}{t}\eta' - \frac{1}{\eta} + \eta^3$$

このとき

$$\tau_{\pm}(t) = \mathrm{const.}\ t^{\frac{1}{4}}(1 \mp \eta(t))\,\eta(t)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\times \exp\left(\int_t^{\infty} \frac{s\{(1-\eta(s)^2)^2 - \eta'(s)^2\}}{4\eta(s)^2}\,ds\right)$$

ここに現われる非線型方程式は Painlevé 方程式と呼ばれるもののひとつである。Sato, Miwa, Jimbo は相関函数とPainlevé方程式の対応を 以下のような枠組で定式化した。

Step 1. 相関函数を，クリフォード演算子の積の真空期待値 の形に表わす。

$$\tau = \langle \varphi_1 \cdots \varphi_n \rangle$$

φ が クリフォード演算子であるとは，自由(フェルミ)場 $\psi(x)$ を使って

$$\varphi = :\exp\left(\iint dx\,dx'\,R(x,x')\psi(x)\psi(x')\right):$$

の形に書けることを言う。

Step 2. 波動函数

$$\frac{\langle \psi(x_0)\psi(x)\varphi_1 \cdots \varphi_n \rangle}{\langle \varphi_1 \cdots \varphi_n \rangle}$$

を考える。これは，xの函数としてモノドロミー性質を満たし，そのモノドロミー性質は $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ に含まれるパラメタ $t_1, t_2, \cdots$ に依らない。

Step 3　モノドロミー性質から，$x, t_1, t_2, \cdots$ に対する線型方程式系が導かれる。その係数は，xに関し有理函数となる。有理函数を，部分分数展開した時の係数は $t_1, t_2, \cdots$ の難しい函数である。

Step 4　この線型方程式系の可解条件は，上記の未知の係数に対する非線型方程式となる。これを変形方程式と呼ぶ。

Step 5　相関函数の対数微分を，変形方程式の解を使って表わす。

Fuchs, Garnier 等の研究により，確定特異点4つの2階線型常微分方程式およびそれの合流型の変形方程式として Painlevé方程式が得られる事が知られていた。確定特異点ばかりの場合の一般論としては，Schlesingerの理論があった。これらは，いずれも Step 3 と Step 4 に対応するものであり，Schlesinger理論においては

Step 3は

$$\frac{\partial Y(x)}{\partial x} = \left(\sum_{\mu=1}^{n} \frac{A_\mu}{x-a_\mu}\right) Y(x)$$

$$\frac{\partial Y(x)}{\partial a_\mu} = -\frac{A_\mu}{x-a_\mu} Y(x)$$

Step 4 は

$$dA_\mu = -\sum_{\nu(\neq\mu)} [A_\mu, A_\nu]\, d\log(a_\mu - a_\nu)$$

で知られた。この場合の Step 1, 2 および Step5 は, Sato, Miwa, Jimbo により与えられた。特に, 相関函数の対数微分 $\omega = d \log \tau$ を与える公式は

$$\omega = \frac{1}{2}\,\mathrm{trace} \sum_{\nu\neq\mu} A_\mu A_\nu\, d\log(a_\mu - a_\nu)$$

となる。

当然, 上記の各Stepを不確定特異点を含む場合にまで拡張する事が問題になった。Sato, Miwa, Jimbo が扱ったいくつかの物理的な模型においても, 1級の不確定特異点が現われていた。Ueno および Flashka, Newell は, Stokes係数の保存という観点から一般的な定式化を示した。(但し, 計算的な複雑さの故に, 彼らの論文はいく

つかの簡単な場合のみ考察している。) 一般論を更に展開するための動機づけは, Okamoto によって与えられた。彼は, Painlevé 方程式が非自律的なハミルトン系の形に書ける事, 相関函数 τ がハミルトニアン H を使って

$$\tau(t) = \exp \int^t H(s)\,ds$$

と定義する時, 不動特異点を除き正則になる事を示した。

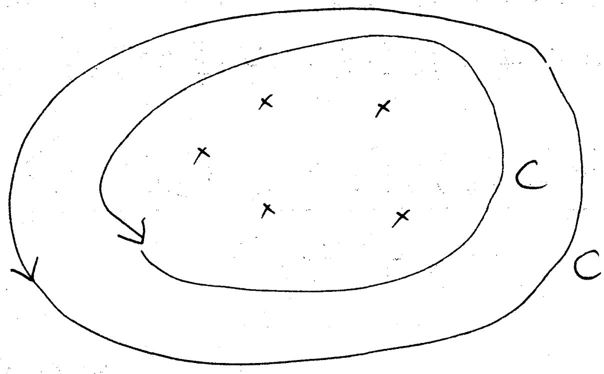
もともと Painlevé は, 動く分岐点を持たない2階代数的常微分方程式を分類する事によって, Painlevé 方程式を得たのであって, この性質を Painlevé 性質と呼ぶ。言い換えると, 方程式の形から決まる(従って個々の解に依らない)特異点以外は, 解の特異点として pole しか持たないものを, Painlevé 性質を持つ方程式と呼ぶ。Okamoto の研究は, pole すら持たない新しい函数 τ が導入できる事を示した。

τ 函数を基礎におく変形方程式の研究は, Jimbo, Miwa, Ueno [redacted] により展開された。彼らは分数級の不確定特異点と, 整数差の固有値を持つ確定特異点を持たないという制限のもとで, 変形方程式の完全積分可能性を証明し, τ 函数の定義を与えた。

そこで 彼らの扱った場合に対応して Step 1, 2 および Step 5 を完成させる事と，変形方程式の Painlevé 性質とその正則性を示す事が問題になる。これに対する解答を与えるのが，上記 2論文の目的である。

モノドロミーの問題を考える際，何故クリフォード演算子が有効か。この問に答える事から始めよう

$Y(x)$ が モノドロミー性質を持った $m\times m$ 行列としよう。$Y(x)$ のすべての特異点を囲む curve C と C' を考えよう.



クリフォード演算子 φ を

$$\varphi = :\exp\left\{\int_C dx \int_{C'} dx' \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{x-x'}\left(Y(x)^{-1}Y(x')\right)_{\alpha\beta}\psi_\alpha(x)\psi^*_\beta(x')\right\}:$$

と定義する。但し $\psi_\alpha(x)$, $\psi^*_\beta(x')$ は自由場で

$$\langle \psi^*_\alpha(x)\psi_\beta(x')\rangle = \frac{1}{2\pi}\frac{i}{x-x'}\delta_{\alpha\beta}$$

なる期待値を持つとする。この時 x_0, x を C' の外側に取ると

$$2\pi i(x-x_0)\langle \psi^*_\alpha(x_0)\,\varphi\,\psi_\beta(x)\rangle$$
$$= \left(Y(x_0)^{-1}Y(x)\right)_{\alpha\beta}$$

が成り立つ。

これは，殆んど tautology（$\underset{?}{=}$ て tology）であるが，次の合成原理が機能する事が重要である。

$Y_j(x)$ ，φ_j $(j=1,2)$ を，2組の，モノドロミーを持った行列と対応するクリフォード演算子とする。この時 合成されたモノドロミーを持つ行列 は

$$2\pi i(x-x_0)\frac{\langle \psi^*_\alpha(x_0)\,\varphi_1\,\varphi_2\,\psi_\beta(x)\rangle}{\langle \varphi_1\,\varphi_2\rangle}$$

で与えられる。

そこで，与えられたモノドロミー性質を持つ$\overbrace{\text{行列}}^{Y(x)}$を作るためには，$Y(x)$ の持つ特異性を最も簡単なものに分解して，それに対応するクリフォード演算子を作り，それを合成するという手順になる。

$Y(x)$の特異性は，特異点を a_μ とすると，a_μを中心とするある sector で，適当な定数行列

$$C^{(\mu)},\ S_1^{(\mu)},\ S_2^{(\mu)},\ \cdots\cdots$$

を使って調節してやると，次の形に漸近展開されるという事である。

$$\left(Y(x)C^{(\mu)-1}S_1^{(\mu)}\cdots S_{l-1}^{(\mu)}\right)_{\alpha\beta}$$

$$\sim\left(G_{\alpha\beta}^{(\mu)}+O(x-a_\mu)\right)e_\beta^{(\mu)}(x)$$

$$e_\beta^{(\mu)}(x)=\exp\left(\sum_{j=1}^{r_\mu}t_{-j,\beta}^{(\mu)}\frac{(x-a_\mu)^{-j}}{-j}+t_{0,\beta}^{(\mu)}\log(x-a_\mu)\right)$$

少し説明しておく。$e_\beta^{(\mu)}(x)$ は $x=a_\mu$ に，パラメタ $t_{-r_\mu,\beta}^{(\mu)},\cdots,t_{0,\beta}^{(\mu)}$ で決まる特異性を持った函数である。$Y(x)$ が1行1列の時は $C^{(\mu)},S_1^{(\mu)},S_2^{(\mu)},\cdots$ は全く不要である。一般に $m\times m$ 行列の時は（特異点ごとに）m 個の特異性 $e_1^{(\mu)}(x),\cdots,e_m^{(\mu)}(x)$ がそれぞれ第1列，… 第 m 列に対応するように，列を線型変換してやる必要がある。このための定数行列が $C^{(\mu)}$ であり，さらに不確定特異点においては，sector を移るごとに，調節が必要になる。これが Stokes 係数 $S_l^{(\mu)}$ である。

さて，特異性を分解するに当たって基本的なアイデアは次の2点である。

1) クリフォード演算子は，mn 個（m は行列の

大きさ，nは特異点の数）用意し，ひとつひとつが $e^{(\mu)}_{\alpha}(x)$ $(\mu=1,\cdots,n\,;\,\alpha=1,\cdots,m)$ に対応するようにする。

2）特異点とsectorの数に応じた，複数の自由場を用意し，$C^{(\mu)}, S^{(\mu)}_1, S^{(\mu)}_2, \cdots$ などのデータを，自由場の間の真空期待値としてinputする。

詳細は略するが，上記のアイデアのもとに，既知の例を見直してみると正しいやり方は容易に想像がつき，求める行列の演算子表示

$$Y(x)_{\alpha\beta} = 2\pi i(x-x_0)\frac{\langle \psi^*_\alpha(x_0)\,\varphi^{(1)}_1\cdots\ \varphi^{(n)}_m\,\psi_\beta(x)\rangle}{\langle \varphi^{(1)}_1\cdots\ \varphi^{(n)}_m\rangle}$$

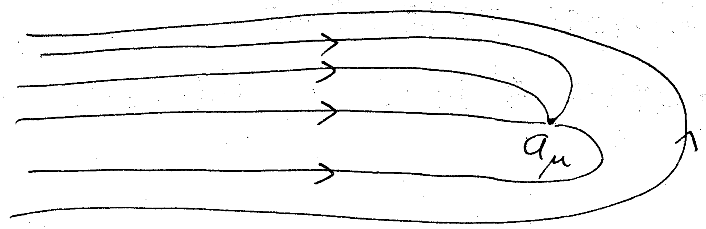
が得られる。

この表示からWickの定理を使って計算すると，$Y(x)_{\alpha\beta}$に対するNeumann級数型の無限級数表示が得られる。

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left(j\text{重積分}\right)$$

という形である。ここに現われる積分は，クリフォード演算子φにはいっている$\int_C dx \int_{C'} dx'$に対応している，但し今の場合，$e^{(\mu)}_{\alpha}(x)$が$x=\infty$にも特異性を持つことと，

不確定特異点での Stokes 現象に対応して 次のような積分路が必要となる。



$t^{(\mu)}_{-j,\alpha}$ および $(S^{(\mu)}_{l} - 1)_{\alpha\beta}$ が 小さければ，上記の無限和の収束が言えて，$Y(x)$ のモノドロミー性質および $\omega = d\log\langle\varphi^{(1)}_{1}\cdots\varphi^{(n)}_{m}\rangle$ となる事が示せる。しかし，一般には収束は期待できない。なぜなら，$\langle\varphi^{(1)}_{1}\cdots\varphi^{(n)}_{m}\rangle$ は 正則（と期待される）とはいえ，零点は持つはずで，そこでは

比 $\langle\psi^{*}_{\alpha}(x_0)\,\varphi^{(1)}_{1}\cdots\varphi^{(n)}_{m}\,\psi_{\beta}(x)\rangle \big/ \langle\varphi^{(1)}_{1}\cdots\varphi^{(n)}_{m}\rangle$

はpoleを持つ。

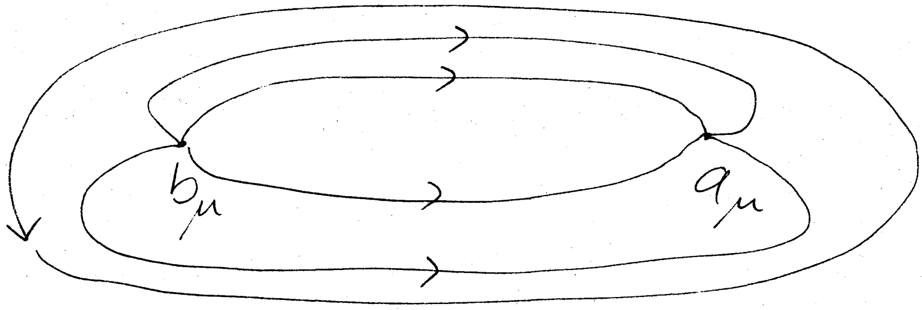
実は，Wickの定理を $\langle\varphi^{(1)}_{1}\cdots\varphi^{(n)}_{m}\rangle$ に適用すると Fredholm 行列式 の形の無限級数表示を得る。同様に $\langle\psi^{*}_{\alpha}(x_0)\,\varphi^{(1)}_{1}\cdots\varphi^{(n)}_{m}\,\psi_{\beta}(x)\rangle$ は Fredholm 小行列式 の形をしている。従って，おのおのが 正則になる事がいえればもっとも都合がよい。しかし，ひとつの困難は，上記のように 積分区間が non compact である事である。

この点を切り抜けるため，次の二つのトリックを使う。

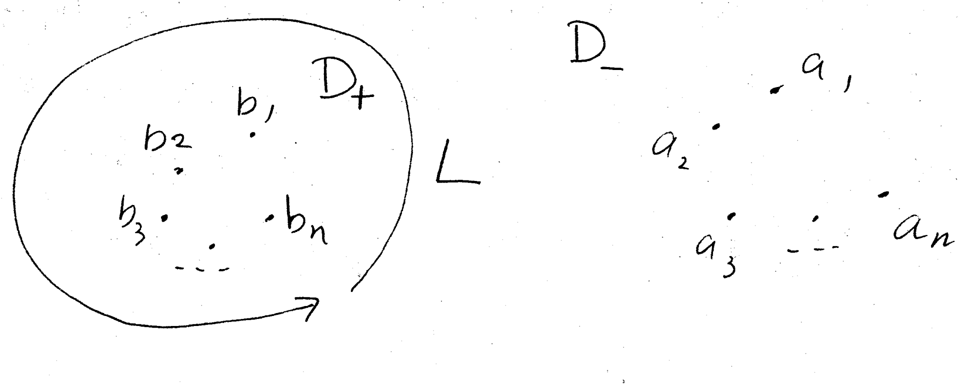
1) 与えられた問題の代わりに，特異点の数を2倍にした問題を，compact な積分路だけを使って解く。

2) 次に，余分な特異点を，Hilbert - Plemelj の方法で消し去る。

少し説明する。積分路が無限までのびた理由は，$e_{\alpha}^{(\mu)}(x)$ の特異点が a_μ と ∞ であったからである。そこで，∞ の代わりに有限な点 b_μ を用意してやり，積分路を閉じさせる。



これが 1) のアイデアである。こうして特異点 $a_1, \cdots, a_n$ と $b_1, \cdots, b_n$ に対応する解 $Z(x)$ が作れたとしよう。$b_1, \cdots, b_n$ を囲む閉曲線を L としよう。



Lの外側 D_- で正則な行列 $R_-(x)$ と L の内側 D_+ で正則な行列 $R_+(x)$ で

$$R_-(x)Z(x) = R_+(x) \qquad x \in L$$

を満たすものは，Hilbert - Plemelj 型の積分方程式を解いて得られる。この時求むる解 $Y(x)$ は

$$Y(x) = \begin{cases} R_-(x)Z(x) & x \in D_- \\ R_+(x) & x \in D_+ \end{cases}$$

で与えられる。

以上の構成法から，$Y(x)$ が すべてのパラメタについて有理型になる事がわかり，変形方程式の Painlevé 性質が確められる。さらに Fredholm 行列式の正則性から τ 函数の正則性が従う。