数理解析研究所講究録
第 425 巻 1981 年 46-55

待ち行列の拡散近似について

京都大学大学院工学研究科
木 村 俊 一

1. はじめに

待ち行列問題の近似解法の一つである拡散近似(*diffusion approximation*)は、待ち行列理論の入門的教科書[8]で解説されるまでに一般的な手法になってきているが、十分な研究がなされているとは言い難い。拡散近似は、今のところ、比較的限られた狭い範囲の問題にしか適用されていないし、近似解の精度に関する数値的検討も不十分である。本稿では、複数窓口待ち行列の系内客数過程を例にとり、拡散近似の考え方について紹介する。

2. 重負荷極限定理

議論の見通しを良くするために、対象とする待ち行列系を $GI/G/s$ 系に限定する。より一般的な複数窓口待ち行列系、例えば、異種窓口を有する場合等に対しても、以下の議論は同

様に成立する。我々の GI/G/s 系は次の確率変数族によって特徴付けられているものとする。

定義1.　u_n：第$(n-1)$番目と第n番目の客の到着時間間隔

i.i.d.r.v.　$E[u_n]=\lambda^{-1}$, $Var[u_n]=\sigma_a^2<+\infty$

v_n：第n番目の客のサービス時間

i.i.d.r.v.　$E[v_n]=\mu^{-1}$, $Var[v_n]=\sigma_s^2<+\infty$

$\{u_n\}$と$\{v_n\}$は独立であると仮定する。

拡散近似とは簡単に言ってしまえば、この系の待ち行列特性量、例えば、系内客数$\{Q(t), t\geq 0\}$、仮りの待ち時間等の過程を適当な拡散過程で近似することに他ならない。GI/G/S 系においては、到着過程が再生過程であり、サービス過程も重負荷(heavy traffic)時には"おおよそ"再生過程とみなすことができることから、再生過程に対する中心極限定理の結果を拡散近似の正当化に結びつけることは、誰もが考えつくことである。この種の解説は邦訳も出版されている Newell の本[11]に詳しいので、ここでは確率測度の弱収束の概念を用いて、より精密な議論を行なうことにしよう。

まず、弱収束の概念を説明する。(より包括的な説明は、Billingsley[1]を参照)　近似の対象としている確率過程の見本関数は、客の到着あるいはサービス終了時点において、必ず何らかの不連続性を持っている。このような不連続点を持つ

確率過程を扱うために、関数空間 $D[0,1]\equiv D$ を導入しよう。$D[0,1]$ は、左極限値を持つ閉区間 $[0,1]$ 上のすべての右連続関数の作る空間で、対象とする確率過程は、適当な時間軸の変換によって、以下に定義する D における確率関数の系列として生成されるものと解釈できる。D は、Skorohod の距離の下で可分、完備な距離空間になっている。さらに、D の位相的ボレル集合体を $\mathcal{D}$ で表わすことにする。

<u>定義 2.</u>　$\mathcal{D}$ 上の確率測度 P_n と P が、D 上の任意の有界で連続な実数値関数 f に対して

$$\lim_{n\to\infty}\int_D f\,dP_n = \int_D f\,dP \tag{1}$$

を満たしているならば、$n\to\infty$ のとき、P_n は P に弱収束する（P_n converges weakly to P）といい、$P_n \Rightarrow P$ と書く。

<u>定義 3.</u>　確率関数（random function）* X とは、確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ から D への可測写像のことであり、$(D, \mathcal{D})$ 上に分布 $P=\mathbb{P}X^{-1}$ を持っている。

<u>定義 4.</u>　$\{X_n\}$ を確率関数の系列であるとする。X_n の分布 P_n が、ある確率関数 X の分布 P に弱収束するならば、X_n は X

---

* Kolmogorov[10] の定義した確率関数は、一価関数 X に対する分布 $\mathbb{P}X^{-1}$ をさし、この定義とは異なる。

に弱収束するといい、$X_n \Rightarrow X$ と書く。

系内客数過程 $Q(\cdot)$ に対応して、D の確率関数 Q_n を次式で定義する。

$$Q_n = \frac{Q(nt) - (\lambda - s\mu)nt}{a\sqrt{n}}, \qquad 0 \leqq t \leqq 1 \tag{2}$$

ただし、$a = \lambda^3 \sigma_a^2 + s\mu^3 \sigma_s^2$. (3)

また、標準ウィーナー過程を ξ で表わすことにする。このとき、次の二つの重負荷極限定理（heavy traffic limit theorems）が不安定な（unstable i.e., $\rho \geqq \lambda/s\mu \geqq 1$）系に対して成立する。(16)

<u>定理 1.</u> $\rho > 1$ ならば、$Q_n \Rightarrow \xi$.

<u>定理 2.</u> $\rho = 1$ ならば、$Q_n \Rightarrow f(\xi)$,

ただし、写像 $f: D \to D$ は次式で定義される。

$$f(x)(t) = x(t) - \inf\{x(u), 0 \geqq u \leqq t\}, \qquad 0 \leqq t \leqq 1 \tag{4}$$

容易に確かめられるように、(4)で定義される写像 f は、原点 $x(\cdot) = 0$ での通過できない境界の役割を果しているので、$f(\xi)$ は原点に反射壁を持つウィーナー過程を表わし、$|\xi|$ と同じ分布を持っている。これら二つの極限定理から、不安定な GI/G/s 系の系内客数過程は、無限小平均（infinitesimal mean）$\lambda - s\mu$、無限小分散（infinitesimal variance）a を持つ自由又は

反射ブラウン運動過程で近似できることがわかる。系内客数以外の特性量に対しても、緩やかな付加的条件の下で、類似の重負荷極限定理が成立することが知られている。[5,12]

安定な（stable, i.e., $\rho<1$）系に対しては、このような極限定理は望むべきもないが、重負荷時、つまり $\rho \leqq 1$ の時には上述の近似がかなりの精度をもたらしてくれることが期待できる。しかし、軽負荷（light traffic）時には、この近似が破綻を来たすのは、火を見るより明らかである。多くの研究者が拡散近似解の精度に関して危惧を抱く最大の原因は、まさにこの点にあるといえる。

3. 定式化の際の幾つかの問題点

安定な系の定常状態における特性量の挙動を調べることが、通常、解析の中心となっているため、本来不安定な系に対して有効な拡散近似を適用するにあたっては、幾つかの問題点を解決する必要がある。大きな問題点は次の二つである。

(i) 拡散パラメータの決め方

(ii) 境界条件の決め方

3.1. 拡散パラメータ

安定な系を対象としているので、極限定理の結果をそのまま用いることはあまりに無謀である。拡散パラメータを決め

る際には、軽負荷時での特性量の挙動を十分に考慮に入れる必要がある。GI/G/s系の系内客数過程に対しては、稼動中の窓口数を考慮して、無限小平均及び無限小分散を、夫々、

$$
\begin{aligned}
b(x) &= \lambda - \min(x, s)\mu \\
a(x) &= \lambda^3 \sigma_a^2 + \min(x, s)\mu^3 \sigma_s^2
\end{aligned}
\tag{5}
$$

のように補正する必要がある。[3] この決め方は自然ではあるが、必ずしも一意的なものではなく、便宜的なものにすぎないことに注意しよう。少くとも、極限定理の結果が妥当ではない $x \leqq s$ に対しては、別の決め方をしても構わないはずである。例えば、筆者は(5)の代わりに

$$
\begin{aligned}
b(x) &= \lambda - \min(\lceil x \rceil, s)\mu \\
a(x) &= \lambda^3 \sigma_a^2 + \min(\lceil x \rceil, s)\mu^3 \sigma_s^2
\end{aligned}
\tag{6}
$$

を提案している。[7, Chap. 6] ここで、$\lceil x \rceil$はxより小さくない最小の整数を表わす。しかし、一般には、状態に依存しない拡散パラメータは、Heymanの方法[4]を用いて、ほぼ一意に決定できると考えている。

3.2. 境界条件

極限定理によって示された反射壁は最も普通に用いられる境界だが、重負荷時を除いてはあまり適当でないことが、多くの研究者によって数値的に確かめられている。[7,9] これは境界での確率質量（probability mass）の大きさに起因しているた

めで、軽負荷時にはこの影響が無視できなくなってくる。これを解決する一般的な方法は未だにわかっていないが、客がポアソン到着する系に対しては、基本復帰（elementary return）境界が適当であることがわかっている。[2] この他、発見的な方法として、反射壁を原点での確率質量に応じて負の領域へ移動させる方法が知られている。筆者は、拡散過程の初通過時間（first passage time）に着目して、$s=1$ の場合には、反射壁の位置を

$$x_0 = \min\left(0,\ \frac{a}{2b}\log\left\{\frac{2b}{a}\ \frac{1-bE[T_0]}{1-\exp(-2b/a)}\right\}\right) \tag{7}$$

$$a = a(1) = \lambda^3\sigma_a^2 + \mu^3\sigma_s^2$$

$$b = b(1) = \lambda - \mu$$

に移動させればよいことを示した。[7, Chap3] ここで、T_0は窓口の休止期間の長さを表わしているが、(7)式中の$E[T_0]$は、到着分布が指数分布の時を除いて、陽な表現が未だに導かれていない。従って、実際の計算にあたっては、T_0を何か適当な確率変数で近似する必要がある。こういった場合よく用いられるのが$\{u_n\}$の定常残余寿命（stationary residual life time）で、この近似の下では

$$E[T_0] = \frac{\lambda^2\sigma_a^2+1}{2\lambda} \tag{8}$$

を(7)に代入すればよい。この反射壁を移動させる方法も、拡散パラメータが状態に依存する場合には解決すべき問題点が残っている。

3.3. その他

以上二つの問題点が片付けば、拡散過程は一意に決定でき、従って解も得られることになるわけだが、得られた解の解釈の仕方にまだ幾つかの自由度が残されている。これは、元の確率過程が何らかの意味で持っていた離散性を、近似解が失っていることに起因している。例えば、系内客数の過程で定常状態確率を求めるためには、拡散過程の連続な分布を離散化する必要があるが、これについてさえも満足のゆく方法はわかっていない。また、特性量のモーメントを如何に定義するかにも、かなりの議論の余地が残っている。

4. おわりに

待ち行列問題の近似解法である拡散近似の考え方とその問題点について述べたが、実際の計算手段としては、拡散方程式と呼ばれる偏微分方程式を想定していたため、確率微分方程式による定式化を考えておられた方には、多少理解しにくい点があったかもしれない。筆者の私見としては、拡散方程式による定式化の方が、待ち行列の挙動の特殊性を直接考慮

できるという意味で、確率微分方程式によるそれより優っていると思われる。しかし、解の定性的な研究を行なう上では、後者の方がより多くの情報を与えてくれるだろう。このことを含めて、確率微分方程式による定式化は今後の課題の一つである。

参考文献

[1] Billingsley, P., *Convergence of Probability Measures*, Wiley, New York, 1968.

[2] Feller, W., "Diffusion Processes in One Dimension," *Transactions of the American Mathematical Society*, 77, 1-31 (1954).

[3] Halachmi, B., and Franta, W. R., "A Diffusion Approximation to the Multi-Server Queue," *Management Science*, 24, 522-529 (1978).

[4] Heyman, D. P., "A Diffusion Model Approximation for the GI/G/1 Queue in Heavy Traffic," *The Bell System Technical Journal*, 54, 1637-1646 (1975).

[5] Iglehart, D. L., "Weak Convergence in Queueing Theory," *Advances in Applied Probability*, 5, 570-594 (1973).

[6] _______________, and Whitt, W., "Multiple Channel Queues in Heavy Traffic. I," *Advances in Applied Probability*, 2, 150-177 (1970).

[7] Kimura, T., Studies on Diffusion Approximation for Queueing Systems, Doctoral Dissertation, Department of Applied Mathematics and Physics, Faculty of Engineering, Kyoto University, December 1980.

[8] Kleinrock, L., *Queueing Systems, Vol. II: Computer Applications*, Wiely-Interscience, New York, 1975.

[9] Kobayashi, H., "Application of the Diffusion Approximation to Queueing Networks. I: Equilibrium Queue Distributions," *Journal of the Association for Computing Machinery*, 21, 316-328 (1974).

[10] Kolmogorov, A. N., 『確率論の基礎概念』第二版、東京図書、根本訳、1975.

[11] Newell, G. F., *Applications of Queueing Theory*, Chapman & Hall, London, 1971. (森村、森訳：『待ち行列理論の応用ーその新しい方法』サイエンス社、1973.

[12] Whitt, W., "Heavy Traffic Limit Theorems for Queues: A Survey," Mathematical Methods in Queueing Theory, pp. 307-350, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, No. 98, Springer-Verlag, New York, 1974.

Toshikazu Kimura:
Department of Applied Mathematics & Physics
Faculty of Engineering
Kyoto University
Yoshida-Honmachi, Sakyo-ku, Kyoto 606
Japan.