数理解析研究所講究録
第 431 巻 1981 年 119-128

On the singularities of the solution of the Cauchy problem with meromorphic data for an operator with involutive characteristics

都立大 理. 小林 隆夫

$a(x,\frac{\partial}{\partial x})$ $(x=(x_0,x')=(x_0,x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{C}^{n+1})$ を $\mathbb{C}^{n+1}$ の原点の近傍で正則な関数を係数とする線型微分作用素で，$(\frac{\partial}{\partial x_0})^m$ の係数 $\equiv 1$ とします。$w_d(x')$, $d=0,1\cdots m-1$, を $x_1=0$ に極をもつ（それ以外では正則）$x'=0$ の近傍の関数とする時 次の Cauchy 問題を考えます。

$$(1)\quad \begin{cases} a(x,\frac{\partial}{\partial x})\,u(x)=0 \\ (\frac{\partial}{\partial x_0})^d u(x)\big|_{x_0=0}=w_d(x'),\quad d=0,1\cdots,m-1. \end{cases}$$

問題は 解 $u(x)$ の特異性を調べる事です。

特性根の重複度が一定の場合には，「$u(x)$ の特異性は $x_1=0$ を出る特性曲面に沿って伝播する」事が示されています。
(Hamada-Leray-Wagschal [4], Hamada [3], -----)

重複度が変わる場合については，Hamada-Nakamura [5] が 特性根について (i) 正則 (ii) 包合的 (iii) 重複度 $\leqq 2$ を仮定

して考察しています。この小論では (i), (ii) は仮定し, (iii) の重複度の制限をはずして議論します。つまり 次の (C-1), (C-2) を仮定します。

$a(x, \partial_x)$ の特性多項式 $p(x,\xi)$ を $p(x,\xi)=\prod_{i=1}^{m}(\xi_0-\lambda_i(x,\xi'))$ と分解したとき

(C-1) $\lambda_i(x,\xi')$, $i=1,\cdots m$, は $(x,\xi')=(0,\mathring{\xi}')$ ($\mathring{\xi}'=(1,0\cdots0)\in\mathbb{C}^n$) の近傍で正則。

λ_i を $(0,\mathring{\xi}')$ における値で並べ変えて, $\lambda_1^\sigma(0,\mathring{\xi}')=\cdots\cdots=\lambda_{m_\sigma}^\sigma(0,\mathring{\xi}')(\equiv\lambda^\sigma)$ $\sigma=1,2\cdots\bar{\sigma}$, $m_\sigma\geqq1$, $m=m_1+\cdots+m_{\bar{\sigma}}$, $\{\lambda^1,\cdots\lambda^{\bar{\sigma}}\}$ は互いに異なるようにしたとき, $m_\sigma\geqq2$ なる各σに対して

(C-2) $(0,\mathring{\xi}')$ の近傍で正則な関数の集合 $\{C_{ij}^\sigma(x,\xi'),\ 1\leqq i,j\leqq m_\sigma\}$ が存在して $\xi_0-\lambda_i^\sigma$ と $\xi_0-\lambda_j^\sigma$ の Poisson bracket が

$$\{\xi_0-\lambda_i^\sigma(x,\xi'),\ \xi_0-\lambda_j^\sigma(x,\xi')\}=C_{ij}^\sigma(x,\xi')(\lambda_j^\sigma(x,\xi')-\lambda_i^\sigma(x,\xi'))$$

となる。

(注) [5] では Poisson bracket が恒等的に消える事を仮定している。

(C-1)より次の eiconal 方程式の解が次々と正則関数として求まります。

$$
(2)\quad
\begin{cases}
\dfrac{\partial \varphi_\sigma^i}{\partial x_0} - \lambda_i^\sigma(x; d_{x'}\varphi_\sigma^i) = 0 \\
\varphi(x)\big|_{x_0=0} = x_1
\end{cases}
\qquad \vdots \qquad
\begin{cases}
\dfrac{\partial \varphi_\sigma^{(i)_\ell}}{\partial x_0} - \lambda_{i_\ell}^\sigma(x, d_{x'}\varphi_\sigma^{(i)_\ell}) = 0 \\
\varphi_\sigma^{(i)_\ell}(t_1\cdots t_{\ell-1}, x)\big|_{x_0=t_{\ell-1}} = \varphi_\sigma^{(i)_{\ell-1}}(t_1\cdots t_{\ell-2}, x)\big|_{x_0=t_{\ell-1}}
\end{cases}
$$

ただし　$(i)_\ell$ は $(i_1\cdots, i_\ell)$, $1\leqq i_* \leqq m_\sigma$ の略記で，$(i)_{\ell-1}=(i_1\cdots i_{\ell-1}) = (i_1,\cdots,i_{\ell-1})$。(2) の解　$\varphi_\sigma^{(i)_\ell}$ を多重相関数と呼ぶことにします。

<u>定理Ⅰ</u>　　十分小さな開近傍，$T_0\subset\mathbb{C}$，$X'\subset\mathbb{C}^n$ をとれば，$(0,\mathring{x}')\in X \equiv T_0\times X'$，$\mathring{x}_1 \neq 0$ $(\mathring{x}'=(\mathring{x}_1\cdots\mathring{x}_n))$ なる任意の点 $(0,\mathring{x}')$ における (1) の解 $u(x)$ は

$$
(3)\quad u(x) = \sum_{\sigma=1}^{\bar\sigma}\left\{ \Phi_\sigma^1(x) + \sum_{\ell=1}^{m_\sigma-1}\int_0^{x_0} dt_\ell \int_0^{t_\ell} dt_{\ell-1}\cdots\int_0^{t_2} dt_1\ \Phi_1^{\ell+1}(t_1\cdots t_\ell, x)\right\} + H(x)
$$

と表示される。ただし $\Phi_\sigma^i = \Phi_\sigma^i(t_1,\cdots,t_{i-1},x)$ は次の形をしている:

$$
(4)\quad \Phi_\sigma^i = \left[\frac{e_\sigma^i(t_1\cdots t_{i-1},x)}{(\varphi_\sigma^{12\cdots i})^{p_\sigma^i}} + g_\sigma^i(\cdot)\log\varphi_\sigma^{12\cdots i}\right](t_1\cdots t_{i-1},x),\quad 1\leqq i\leqq m_\sigma-1 \text{ or } i=m_\sigma=1
$$

$$
(5)\quad \Phi_\sigma^{m_\sigma} = \left[\sum_{j=0}^{\infty}\frac{f_{\sigma,j}(t_1\cdots t_{m_\sigma-1},x)}{(\varphi_\sigma^{12\cdots m_\sigma})^j} + g_\sigma^{m_\sigma}(\cdot)\log\varphi_\sigma^{12\cdots m_\sigma}\right](t_1\cdots t_{m_\sigma-1},x),\quad m_\sigma\geqq 2
$$

ここで $p_\sigma^i \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $H\in\mathcal{O}(X)$, e_σ^i, g_σ^i, $\varphi_\sigma^{12\cdots i} \in \mathcal{O}(T_0^i\times X')$ ($T_0^i = \overbrace{T_0\times\cdots\times T_0}^{i} \subset \mathbb{C}^i$) , $f_{\sigma,j}\in\mathcal{O}(T_0^{m_\sigma}\times X')$ は $(0,\mathring{x}')\in X$ に依存しない。無限和は広義一様収束して，さらに次の評価をもつ。

$$(6)\qquad \sum_{j=0}^{\infty}\left|\frac{f_{\sigma,j}}{(\varphi_\sigma^{12\cdots m_\sigma})^j}(t_1\cdots t_{m_\sigma-1},x)\right| \leq B\exp C\left|\varphi_\sigma^{12\cdots m_\sigma}(\cdot)\right|^{-\left(\frac{1}{s-1}\right)},\quad s=\frac{m_\sigma}{m_\sigma-1}$$

(B, C は $(t_1\cdots t_{m_\sigma-1},x)\in T_0^{m_\sigma}\times X'\setminus\{\varphi_\sigma^{12\cdots m_\sigma}=0\}$ に依らない定数)

(注) (3) において $m_\sigma=1$ なる σ については積分項はなく，Φ_σ^1 の特異性は高々 log-pole 型 である。$m_\sigma\geq 2$ の時は Φ_σ^i, $1\leq i\leq m_\sigma-1$, についてはやはり高々 log-pole 型であり，$\Phi_\sigma^{m_\sigma}$ は無限和であるが，$\varphi_\sigma^{12\cdots m_\sigma}=0$ に近ずくとき 高々示度 $s=\frac{m_\sigma}{m_\sigma-1}$ の増大度である。

証明は [5] と同様に，形式解を構成し，次にその収束を示して行ないます。しかし輸送方程式を導びく時，[5] では微分作用素だけですましていた計算を，擬微分作用素まで拡張する必要があります。結果として，輸送方程式は Goursat 問題を次々に解いていく形になります。詳しくは Kobayashi [6] を参照して下さい。

§ 積分表示された解の解析接続

さて、(3) は $(0,\mathring{x}')\in X$, $\mathring{x}_1\neq 0$ なる点において確かに正則関数の芽を定めます。実際 $\varphi_\sigma^{i}(0\cdots 0,\mathring{x}')=\mathring{x}_1\neq 0$ ですから $(t_1\cdots t_{\ell-1},x_0,x')=(0\cdots 0,0,\mathring{x}')$ を中心とする polydisc を十分小さく取れば, Φ_σ^{i} はそこで正則であり ($\because$ $\varphi_\sigma^{i}\neq 0$), 累次積分を行なうことにより $(0,\mathring{x}')$ における正則関数の芽が定まります。この芽がどこまで解析接続できるかを次に述べます。まず記号を導入します。

- $J(k)=\bigcup_{\ell=1}^{k}\{(i)_\ell=(i_1,\cdots,i_\ell)\in \mathbb{N}^\ell;\ 1\leqq i_1<\cdots<i_\ell\leqq k\}$

- $$\Sigma_\sigma^{(i)_\ell}=\{x\in X;\ \exists (t_1\cdots t_{\ell-1})\in T_0^{\ell-1},\ \varphi_\sigma^{(i)_\ell}(t_1\cdots t_{\ell-1},x)=\frac{\partial\varphi_\sigma^{(i)_\ell}}{\partial t_1}(t_1\cdots t_{\ell-1},x)=\cdots\cdots=\frac{\partial\varphi_\sigma^{(i)_\ell}}{\partial t_{\ell-1}}(t_1\cdots t_{\ell-1},x)=0\},\quad (i)_\ell\in J(m_\sigma)$$

($\ell=1$ のときは $\Sigma_\sigma^{i_1}=\{x\in X;\ \varphi_\sigma^{i_1}(x)=0\}$)

- $\Sigma_{\sigma,0}=\bigcup_{(i)_\ell\in J(m_\sigma)}\overline{\Sigma_\sigma^{(i)_\ell}}$ ($\Sigma_\sigma^{(i)_\ell}$ の閉包).

$x\in X\setminus\Sigma_{\sigma,0}$ に対して

- $S_\sigma^{(i)_\ell}(x)=\{(t_1,\cdots t_{\ell-1})\in T_0^{\ell-1};\ \varphi_\sigma^{(i)_\ell}(t_1\cdots t_{\ell-1},x)=0\}$

これは $x\notin\Sigma_\sigma^{(i)_\ell}$ ですから $T_0^{\ell-1}$ の複素部分多様体となります。 $\rho: T_0^{m_\sigma-1}\longrightarrow \mathbb{R}$ を下に有界かつ proper な C^∞-関数とするとき $\rho_x^{(i)_\ell}: T_0^{\ell-1}\longrightarrow\mathbb{R}$ $(x=(x_0,x')\in T_0\times X'(=X),\ (i)_\ell\in J(m_\sigma),\ \ell\geqq 2)$ を

- $\rho_x^{(i)_\ell}(t_1\cdots t_{\ell-1})=\rho(0\cdots 0\overset{i_1}{t_1}\cdots t_1,\overset{i_2}{t_2}\cdots t_2,\overset{i_3}{t_3}\cdots\cdots,\overset{i_{\ell-1}}{t_{\ell-1}}\cdots t_{\ell-1},\overset{i_\ell}{x_0}\cdots\cdots x_0)$

で定めます。($i_\ell = m_\sigma$ のときは x_0 の項はない。) このとき $x \in X \setminus \Sigma_{\sigma,0}$ に対して

- $D_\sigma^{(i)_\ell}(x) = \{\text{critical values of } \rho_x^{(i)_\ell}\} \cup \{\text{critical values of } \rho_x^{(i)_\ell}|_{S_\sigma^{(i)_\ell}(x)}\}$
- $D_{\rho,\sigma}(x) \,(= D_\sigma(x)) = \bigcup_{\substack{(i)_\ell \in J(m_\sigma) \\ \ell \geqq 2}} D_\sigma^{(i)_\ell}(x) \subset \mathbb{R}$

(注) Sard の定理により $D_{\rho,\sigma}(x)$ の測度は零。

<u>定義</u> $X \setminus \Sigma_{\sigma,0}$ の内部分集合 $\Sigma_{\sigma,\infty}$ を次で定める。

$x \in X \setminus \Sigma_{\sigma,0}$ が $x \notin \Sigma_{\sigma,\infty}$

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^\exists \rho : T_0^{m_\sigma - 1} \to \mathbb{R}$ 下に有界かつ proper な C^∞ 関数 と x の内近傍 ${}^\exists U \subset X \setminus \Sigma_{\sigma,0}$ が存在して, 任意の $R_0 \gg 1$ に対して ${}^\exists R > R_0$ が存在して $R \notin D_{\rho,\sigma}(y)$, $y \in U$ となる。

<u>定理 II</u> $\Sigma_0 = \bigcup_{\sigma=1}^{\bar{\sigma}} \Sigma_{\sigma,0}$, $\Sigma_\infty = \bigcup_{\sigma=1}^{\bar{\sigma}} \Sigma_{\sigma,\infty}$ とおく。(3) によって定まる $(0, \mathring{x}') \in X$, $\mathring{x}_1 \neq 0$ における正則関数の芽は $X \setminus (\Sigma_0 \cup \Sigma_\infty)$ の $(0, \mathring{x}')$ を含む連結成分上自由に解析接続できる。

§ 定理Ⅱの証明の方針

(3) の1つづつの積分項について調べれば十分ですから，余計な添字は省略して，次の関数 $I(x)$ について考えます。

$$(7)\qquad I(x)=\int_0^{x_0}dt_m\int_0^{t_m}dt_{m-1}\cdots\int_0^{t_2}dt_1\,\Phi(t,x),\qquad \begin{pmatrix} t=(t_1\cdots t_m)\in\mathbb{C}^m \\ x\in\mathbb{C}^{n+1}. \end{pmatrix}$$

(今 m は方程式の階数とは関係ない)。$T=T_0^m$，$Y=T\times X$

$S=\{(t,x)\in Y:\ \varphi(t,x)=0\}$ とおく。簡単のために Φ は $Y\setminus S$ 上の一価正則関数とします。（多価の場合には $Y\setminus S$ の universal covering space を考えればよい）.

$C_x:[0,1]\longrightarrow\mathbb{C}$ を 0 から x_0 ($x=(x_0,x')$) への線分，$\Delta=\{(s_1\cdots s_m)\in\mathbb{R}^m;\ 0\leqq s_1\leqq s_2\leqq\cdots\leqq s_m\leqq 1\}$ を m-単体とするときパラメータ x をもつ Y の m-chain $\alpha_x:\Delta\longrightarrow Y$ を

$\alpha_x(s_1\cdots s_m)=(C_1(s_1),\cdots,C_m(s_m),x)$ で定めます。x が $(0,\mathring{x}')$ の十分小さい近傍 U を動き，α_x が S と交わらないときには，

$$(8)\qquad I(x)=\int_{\alpha_x}\Phi(t,x)\,dt_1\wedge\cdots\wedge dt_m$$

となり U 上の正則関数となります。この時次のことに注意します。

(a) α_x はパラメータ $x\in U$ に連続的に依存する

(b) $\alpha_x(\Delta)\subset(Y\setminus S)_x\ (=(Y\setminus S)\cap p_X^{-1}(x))$

(c) $\alpha_x(\partial^i\Delta)\subset A_i=\{t_i=t_{i-1}\}$，$i=1,2\cdots m+1$，

ただし　$p_X : Y \longrightarrow X$ ：自然な射影，$\partial^i\Delta = \{s \in \Delta ; s_i = s_{i-1}\}$
$i = 1, 2 \cdots m+1$,　$s_0 = 0$, $s_{m+1} = 1$, $t_0 = 0$, $t_{m+1} = x_0$,
逆に　Stokes の定理を使うことにより次の補題が証明されます。

補題　U を X の開集合，$\alpha_x : \Delta \longrightarrow Y$ をパラメータ $x \in U$ をもつ m-chain とする。もし α_x が (a), (b), (c) を満たせば (8) で定まる関数 $I(x)$ は U 上正則となる。
（α_x は上で与えたような特別なものでなくてよい！）

この補題を使えば，(7) を解析接続するという問題は，chain α_x を (a), (b), (c) を満しながら変形していくという，位相幾何の問題に還元されます。あとは，位相幾何の有名な定理 1-st isotopy lemma of Thom (cf [1], [8]) と それを射像が proper でない場合に modify した補題（[2]）を適用して，chain を変形できる範囲を調べればよい。　ざっといって
Σ_0 は射像が submersion とならない点，Σ_∞ は射像が proper となるようにできない点と言えます。詳しくは Kobayashi [7] を参照して下さい。

(注)　実平面での双曲型方程式の特異性の伝播と同様に Σ_0 は

特性曲線の言葉で述べることができます。それに対して Σ_∞ は遠方の境界の影響から出てくる特異性と考えられ，今の所正体が不明です。

(注) 積分変数が１の場合 $\varphi(t_1, 0) \neq 0$ であれば Σ_∞ が空集合としてよいことはすぐにわかります。しかし積分変数が２以上の場合に Σ_∞ が空集合となる条件を筆者はもっていません。

(注) $\varphi(t_1 \cdots t_m, x)$ が t についての多項式で $T_0 = \mathbb{C}$ とできる時には $\mathbb{C}^m$ を $P^m(\mathbb{C})$ にうめこんで proper の条件を満すようにすれば いろいろな例について Σ_∞ は計算しやすくなります。

最後に例をあげます。

例1. $a = \left(\frac{\partial}{\partial x_0}\right)^2 - x_2^2\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2\right)$

$\varphi^{12} = x_1 + \frac{x_2}{2}\left(e^{2t_1 - x_0} - e^{x_0 - 2t_1}\right)$

$\Sigma^1 : x_1 + \frac{x_2}{2}\left(e^{x_0} - e^{-x_0}\right) = 0$, $\Sigma^2 : x_1 - \frac{x_2}{2}\left(e^{x_0} - e^{-x_0}\right)$

$\Sigma^{12} : x_2^2 + x_3^2 = 0$, $\Sigma_0 = \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^{12}$, $\Sigma_\infty : x_2 = 0$.

例2 $a = \left(\frac{\partial}{\partial x_0}\right)\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_0}\right) + 2x_2\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\right\}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_0}\right) + 2x_3\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\right\}$

$\varphi^{123} = x_1 - 2x_2 t_2 + t_2^2 + 2(x_2 - x_3 - t_2)t_1 + 2t_1^2$

$\Sigma^1 : x_1 - 2x_3 x_0 + x_0^2 = 0$, $\Sigma^2 : x_1 - 2x_2 x_0 + x_0^2 = 0$, $\Sigma^3 : x_1 = 0$

$$\Sigma^{12}: x_0^2-2(x_2+x_3)x_0-(x_2-x_3)^2+2x_1=0, \quad \Sigma^{23}: x_1-x_2^2=0$$

$$\Sigma^{13}: x_1-x_3^2=0 \quad , \Sigma^{123}: x_1-x_2^2-x_3^2=0 ,$$

$$\Sigma_0=\Sigma^1\cup\Sigma^2\cup\Sigma^3\cup\Sigma^{12}\cup\Sigma^{13}\cup\Sigma^{23}\cup\Sigma^{123} \quad , \quad \Sigma_\infty=\phi .$$

References

[1] T. Fukuda, Types topologiques des polynomes, Publ. Math. I.H.E.S., 46 (1976) 87-106.

[2] T. Fukuda and T. Kobayashi, A local isotopy lemma, to appear.

[3] Y. Hamada, Probleme analytique de Cauchy a caracteristiques multiples dont les donnees de Cauchy ont des singularites polaires, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. A, 276 (1973), 1681-1684.

[4] Y. Hamada, J. Leray et C. Wagschal, Systemes d'equations aux derivees partielles a caracteristiques multiples: probleme de Cauchy ramifies; hyperbolicite partielle, J. Math. pures et appl., 55 (1976) 297-352.

[5] Y. Hamada and G. Nakamura, On the singularities of the solution of the Cauchy problem for the operator with non uniform multiple characteristics, Annali della Scuola Norm. Sup. di Pisa, 4 (1977) 725-755.

[6] T. Kobayashi, On the singular Cauchy problem for operators with variable involutive characteristics, to appear.

[7] T. Kobayashi, On the singularites of the solution to the Cauchy problem with singular data in the complex domain, to appear.

[8] J. Mather, Note on topological stability, Lecture notes, Harvard University (1970).