数理解析研究所講究録
第431巻 1981年 164-177

Fourier 積分作用素のあるクラスについて.

千葉経済短大.
浅田健嗣

§1. はじめに.

次の形の積分作用素 — Fourier 積分作用素 — を考えよう.

$$(1.1)\qquad Af(x)=(2\pi)^{-n}\int_{R^n} e^{iS(x,\xi)}a(x,\xi)\hat{f}(\xi)\,d\xi,$$

ここで, $\hat{f}$ は f の Fourier 変換: $\hat{f}(\xi)=\int_{R^n} e^{-iy\cdot\xi}f(y)\,dy$. $R^n\times R^n$ の上の関数 $S(x,\xi)$, $a(x,\xi)$ はそれぞれ A の phase 関数, symbol 関数とよばれる. (cf. Eskin [6], Hörmander [10].)

$S(x,\xi)=x\cdot\xi=\sum_{j=1}^{n}x_j\xi_j$ のとき, A は擬微分作用素になる. Beals-Fefferman [2, 3] 等の研究により, 擬微分作用素については極めて広い symbol の class に対して L^2 有界性定理が証明されている. この note においては, symbol 関数を Beals-Fefferman class にとり, それに対応して phase 関数も一般にしたときの Fourier 積分作用素 A に対する L^2 有界性定理を考察する. この定理は擬微分作用素に対しての Beals-Fefferman の L^2 有界性定理と Fourier 積分作用素に対しての, Fujiwara [8], Kumano-go [12] の L^2 有界性定

理を含むものである.

<u>記号</u>: R^n の点 $x=(x_1,\cdots,x_n)$, $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ に対して,

$$|x|=(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{1/2},\quad x\cdot\xi=x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n.$$

多重指数 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ ($\alpha_j\geqq 0$ 整数) に対して, $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$.

x についての微分 $\partial_x^\alpha=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$.

$\|\ \|$: 関数 f に対して, $\|f\|=\left(\int|f(x)|^2dx\right)^{1/2}$: f の L^2 ノルム.

作用素 A に対して, $\|A\|$ は A の $L^2(R^n)$ 空間での作用素ノルム.

C: 定数 C は添字が明示されていなければ, それ以前に定義された定数及び n にのみよる正の定数 (適当な).

§2.

<u>定義 2.1</u> (cf. Beals [3], Hörmander [11]). $R^n\times R^n$ 上で定義された正値関数 Φ,φ が次の条件をみたすとき, Φ,φ を weight 関数の対という:

$$(2.1)\begin{cases}\text{(i)}\quad \Phi\geqq c_1,\ \varphi\leqq C_2,\ \Phi\varphi\geqq c_3.\\[2mm] \text{(ii)}\quad \left.\begin{array}{l}|x-y|\leqq r_0\,\varphi(y,\eta)\\ |\xi-\eta|\leqq r_0\,\Phi(y,\eta)\end{array}\right\}\Rightarrow \Phi(x,\xi)\approx\Phi(y,\eta),\ \varphi(x,\xi)\approx\varphi(y,\eta).\\[2mm] \qquad\left(A\approx B\Leftrightarrow \text{ある正数 } C \text{ が存在して, } C^{-1}\leqq A/B\leqq C\right).\\[2mm] \text{(iii)}\quad \dfrac{\Phi(x,\xi)}{\Phi(y,\eta)}+\dfrac{\varphi(x,\xi)}{\varphi(y,\eta)}\leqq C_4\left(1+\Phi(y,\eta)|x-y|+\varphi(y,\eta)|\xi-\eta|\right)^N.\end{cases}$$

ここで，c_1, C_2, c_3, C_4, r_0 は正の定数，N は非負の定数．

$\varphi(y,\eta)$，$\Phi(y,\eta)$ は (y,η) における，x-空間，ξ-空間の長さをはかる尺度を表わしている．(y,η) の近傍 $U^{\Phi,\varphi}_{(y,\eta)}(r) = \{(x,\xi) \mid |x-y| \leqq r\varphi(y,\eta),\ |\xi-\eta| \leqq r\Phi(y,\eta)\}$ を考えれば，条件 (ii) は，$U^{\Phi,\varphi}_{(y,\eta)}(r)$ 上において，φ, Φ はそれぞれ同じ程度の大きさであることを示している．Hörmander [11] のことばでいえば，$R^n \times R^n$ 上のリーマン計量 $g_{(y,\eta)}(t,\tau) = \dfrac{|t|^2}{\varphi(y,\eta)^2} + \dfrac{|\tau|^2}{\Phi(y,\eta)^2}$ が，条件 (ii) は slowly varying，条件 (iii) は σ-temperate であるということに相当する．

以下において，weight function Φ, φ をひとつ固定して考える．

〈仮定〉

(A-1) $a(x,\xi) \in S^{0,0}_{\Phi,\varphi}$，すなわち，任意の非負整数 k に対して，次で定義される a のセミノルム $|a|_k$ が有限の値である．

$$|a|_k = \max_{|\alpha+\beta| \leqq k} \sup_{(x,\xi) \in R^n \times R^n} \left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi) \right| \cdot \varphi(x,\xi)^{|\alpha|} \Phi(x,\xi)^{|\beta|}.$$

(A-2) phase 関数 $S(x,\xi)$ の実部 $S_R(x,\xi)$ が次の評価をみたす．

$$\inf_{(x,\xi) \in R^n \times R^n} \left| \det \left[\partial_{x_j} \partial_{\xi_k} S_R(x,\xi) \right] \right| \geqq \delta_0 > 0.$$

(A-3) $|\alpha+\beta| \geqq 2$ なる任意の多重指数 α, β に対して，次の不等式をみたす正定数 $C_{\alpha,\beta}$ が存在する．

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta S(x,\xi)| \leqq C_{\alpha,\beta}\, \varphi(x,\xi)^{1-|\alpha|}\, \Phi(x,\xi)^{1-|\beta|}$$

(A-4) phase 関数 $S(x,\xi)$ の虚部 $S_I(x,\xi)$ は非負：$S_I(x,\xi) \geqq 0$．

そのとき，条件(A-1)と(A-4)から次のことがわかる：(1.1)の積分は，少なくとも急減少な関数 f ($\in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$) に対して絶対収束する．

定理　$a(x,\xi)$, $S(x,\xi)$ を仮定(A-1)～(A-4)をみたす C^∞ 関数とする．そのとき，次の評価が成立するような正定数 C と正整数 m が存在する：任意の $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して，

$$\|Af\| \leqq C\, |a|_m \, \|f\|,$$

ここに，m は $m > 4n(1+N)$ なる整数，C は a と f に依らない正定数．

注意1．S が実数値関数，もしくは，さらにその虚部 S_I が次の条件(A-3′)をみたすとき，定理の m は $m > 2n(1+N)$ なる整数ととれる．(S_R は(A-3)をみたしていて)．

(A-3′)　$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta S_I(x,\xi)| \leqq C_{\alpha,\beta}\, \varphi(x,\xi)^{-|\alpha|}\, \Phi(x,\xi)^{-|\beta|}$$

なる不等式が，$|\alpha+\beta| \geqq 2$ なる任意の多重指数 α,β に対して成立する．

例1．$\Phi=(1+|\xi|)^\rho$, $\varphi=(1+|\xi|)^{-\delta}$, $0\leqq\delta\leqq\rho\leqq 1$, $\delta<1$ のとき．

symbol関数の class：$S^{0,0}_{\Phi,\varphi} = S^0_{\rho,\delta}$ (Hörmander

このとき，$0\leqq\delta\leqq\rho\leqq 1$, $\delta<1$ なる ρ,δ のあらゆるとり方に対して共通する phase 関数 $S(x,\xi)$ の class は次のとおり：

$$\begin{cases} \left|\det\left[\partial_{x_j}\partial_{\xi_k} S_R(x,\xi)\right]\right| \geqq {}^{\exists}\delta_0 > 0, \\ |\alpha+\beta| \geqq 2 \Rightarrow \exists C_{\alpha,\beta} \text{ s.t. } \ |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta S(x,\xi)| \leqq C_{\alpha,\beta}\,(1+|\xi|)^{1-|\beta|} \end{cases}$$

$$\Big\{ \quad S_I(x,\xi) \geqq 0$$

Fujiwara [8], Kumano-go [12] はそのような phase 関数 $S(x,\xi)$（もしくはそれに近い条件の）に対して，Fourier 積分作用素の L^2 有界性を証明している．

例2. $\Phi=\varphi=1$ のとき．作用素 (1.1) は Fujiwara [7], Asada-Fujiwara [1] での振動積分変換になる．Fujiwara [9] は，Schrödinger 作用素の基本解の構成の際に振動積分作用素を用いた．

例3. Danilov [5] は，条件 (A-1) の代りに，$e^{-S_I} a \in S^0_{\rho,\rho}$ という条件の下で，作用素 A を考えている．すなわち，実 phase 関数の Fourier 積分作用素または振動積分変換の L^2 有界性定理に帰着させて，A を考察している．

例4. 次の条件をみたす C^∞ 関数 $\lambda(\xi)$ に対して，$\Phi(x,\xi)=\lambda(\xi)$ $\varphi(x,\xi)=\lambda(\xi)^{-1}$ とおけば，Φ, φ は weight 関数の対になる．

(i) $|\xi|\approx|\eta| \Rightarrow \lambda(\xi)\approx\lambda(\eta)$

(ii) $1\leqq \lambda(\xi)\leqq C_3\langle\xi\rangle^{1-\varepsilon}$, $0<\varepsilon\leqq 1$, $C_3>0$

(iii) 任意の多重指数 α に対して，$|\partial_\xi^\alpha \lambda(\xi)| \leqq C_\alpha \lambda(\xi)(1+|\xi|)^{-|\alpha|}$.

（このとき，(iv) $|\xi-\eta|\leqq C_4\lambda(\xi) \Rightarrow \lambda(\xi)\approx\lambda(\eta)$ が成立する）.

例5. $\Phi=(1+|x|^2+|\xi|^2)^{1/2}$, $\varphi=1$

§3. 定理の証明──概略.

Plancherel の定理により，作用素(1.1)がL^2有界であるには，次の積分作用素──これもAとかく── がL^2有界であることを示せばよい．

(3.1) $$u(\xi) \longmapsto \int_{R^n} e^{iS(x,\xi)} a(x,\xi)\, u(\xi)\, d\xi .$$

証明は，以下で述べる単位の分解(補題3.1)を用い，[1,7]の方法にならって行なう．その基本となるのは，Calderón-Vaillancourt [4] によって定式化された Cotler-Knapp-Stein の補題である．

単調非増加な，$\mathbb{R}^1$上の C^∞関数 ψ で，$\psi(t)=1$ $(t \leqq R')$，$\psi(t)=0$ $(R \leqq t)$ $0<R'<R<\frac{1}{4}r_0$ なるものをとり，次のように $\psi_{(s,\sigma)}(x,\xi)$ を定める．

$$\psi_{(s,\sigma)}(x,\xi) = \frac{\psi(\lambda(s,\sigma)|x-s|)\, \psi(\lambda(s,\sigma)^{-1}|\xi-\sigma|)}{\iint \psi(\lambda(s,\sigma)|x-s|)\, \psi(\lambda(s,\sigma)^{-1}|\xi-\sigma|)\, ds\, d\sigma},$$

ここに， $\lambda(s,\sigma) = \sqrt{\Phi(s,\sigma)/\varphi(s,\sigma)}$ ， $(x,\xi),(s,\sigma) \in R^n \times R^n$.

<u>補題 3.1.</u> 1) 各 $\psi_{(s,\sigma)}$ の support は次の集合 $U_{(s,\sigma)}(R)$ に含まれる．

$$U_{(s,\sigma)}(R) = \left\{ (x,\xi)\, ;\ |x-s| \leqq R\, \lambda(s,\sigma)^{-1},\ |\xi-\sigma| \leqq R\, \lambda(s,\sigma) \right\}$$

2) $\psi_{(s,\sigma)} \in S^{0,0}_{\Phi,\varphi}$，すなわち，任意の正整数$m$に対して正定数$C_m$が存在して，$|\psi_{(s,\sigma)}|_m \leqq C_m$ が成り立つ．

3) 任意の $(x,\xi) \in R^n \times R^n$ に対して，$\iint \psi_{(s,\sigma)}(x,\xi)\, ds\, d\sigma = 1$.

<u>注意 1.</u> この単位の分解は Hörmander [11] のそれにならった．Hörmander のは，discrete parameter. ここのは連続パラメータ (s,σ) となっている．

注意 2. §2 の注意 1 を証明するのには，上記の単位の分解では不十分．次のように変更する．

$$\psi'_{(s,\sigma)}(x,\xi)=\frac{\psi(\varphi(s,\sigma)^{-1}|x-s|)\,\psi(\Phi(s,\sigma)^{-1}|\xi-\sigma|)\,\varphi(s,\sigma)^{-n}\,\Phi(s,\sigma)^{-n}}{\iint\psi(\varphi(s,\sigma)^{-1}|x-s|)\,\psi(\Phi(s,\sigma)^{-1}|\xi-\sigma|)\,\varphi(s,\sigma)^{-n}\,\Phi(s,\sigma)^{-n}\,ds\,d\sigma}.$$

さて，$p=(s,\sigma)\in R^n\times R^n$ に対して，$a_p(x,\xi)=a(x,\xi)\psi_p(x,\xi)$ とおき，a_p を symbol 関数とする積分作用素を次で定義する．

(3.2) $$A_p u(x)=\int_{R^n} e^{iS(x,\xi)}\,a_p(x,\xi)\,u(\xi)\,d\xi.$$

そのとき，次の命題が成り立つ．

命題 3.2. $u(\xi)\in C_0^\infty(R^n)$ とする．

1) $A_p u(x)\in C_0^\infty(R^n)$

2) $\|A_p u\|\leqq C\|u\|$，ここで定数 C は $p=(s,\sigma)$ に依らない．

3) $Au(x)=\lim_{j\to\infty}\iint_{|s|+|\sigma|\leqq j} A_{(s,\sigma)}u(x)\;ds\,d\sigma$，

ここで，極限値は各 x に対して存在し，かつその収束は $L^2(R^n)$ の strong topology に関しても成り立つ．

それ故，作用素 A が L^2 有界であるには，次の命題を証明すればよい．

命題 3.3. 任意の compact 集合 $K\subset R^n\times R^n$ に対して，次の評価が成り立つ．

(3.3) $$\left\|\int_K A_p u(x)\,dp\right\|\leqq M\,\|u\|,\quad u\in C_0^\infty(R^n),$$

ここに，定数 M は K と u のとり方に依らない正数．

命題3.3の証明は次の補題による (cf. Calderón-Vaillancourt [4]).

補題 3.4. 次の条件をみたす $R^{2n}\times R^{2n}$ 上の正値関数 $h(p,p')$ $k(p,p')$ が存在すると仮定.

$$\|A_p A_{p'}^*\| \leqq h(p,p')^2 , \quad \|A_p^* A_{p'}\| \leqq k(p,p')^2$$

$$\int_{R^{2n}} h(p,p')\,dp \leqq M , \quad \int_{R^{2n}} k(p,p')\,dp \leqq M.$$

そのとき, 命題 3.3 の評価(3.3)が同じ定数Mで成り立つ.

以下, 命題3.3の証明のあらすじ. (3.2)の作用素 A_p が補題3.4の条件をみたすことを証明しよう. $A_{p'}$ の adjoint operator $A_{p'}^*$ は次で与えられる.

$$A_{p'}^* v(\xi) = \int_{R^n} e^{-i\overline{S(y,\xi)}}\, \overline{a_{p'}(y,\xi)}\, v(y)\,dy .$$

したがって, $A_p A_{p'}^*$ の積分核 $H_{p,p'}(x,y)$ は

$$(3.4) \qquad H_{p,p'}(x,y) = \int_{R^n} e^{i[S(x,\xi)-\overline{S(y,\xi)}]}\, a_p(x,\xi)\,\overline{a_{p'}(y,\xi)}\,d\xi .$$

となる. 次で定義される order 1 の微分作用素Lを導入する.

$$L = \rho^{-2}\left(1 - i\min\{\lambda(p),\lambda(p')\}^2\, \nabla_\xi\left(\overline{S(x,\xi)} - S(y,\xi)\right)\cdot\nabla_\xi\right)$$

ここに,

$$\rho = \left(1 + \min\{\lambda(p),\lambda(p')\}^2\, \left|\nabla_\xi\left(S(x,\xi) - \overline{S(y,\xi)}\right)\right|^2\right)^{1/2}.$$

$$L\left(e^{i(S(x,\xi)-\overline{S(y,\xi)})}\right) = e^{i(S(x,\xi)-\overline{S(y,\xi)})}$$

であるから, 部分積分を繰り返すことにより, (3.4)の左辺を次のように書きかえる.

$$(3.5)\quad H_{p,p'}(x,y)=\int_{R^n} e^{i(S(x,\xi)-\overline{S(y,\xi)})}({}^tL)^m(a_p\overline{a_{p'}})\,d\xi,\quad m=0,1,2,\cdots$$

ここに，${}^tL$ は L の formal transposed operator．(3.5) を評価するための補題を二つ述べる．

<u>補題 3.5.</u> (cf. [1, Lemma 2.5]) $|({}^tL)^m(a_p\overline{a_{p'}})|\leqq C_m\,\rho^{-m}$, $m=0,1,2,\cdots$

<u>補題 3.6.</u> (cf. [1, Lemma 2.1]) 次の不等式が成立するような正の定数 δ_1 が存在する．

$$|\nabla_\xi(S_R(x,\xi)-S_R(y,\xi))|\geqq\delta_1|x-y|.$$

そのとき，(3.5) を support の位置に注意して評価する．

<u>補題 3.7.</u> m を任意の非負整数とする．そのとき，次の不等式が成立する．

$$|H_{p,p'}(x,y)|\leqq C|a|_m^2\ \chi_R\left(\frac{\sigma-\sigma'}{\lambda(p)+\lambda(p')}\right)\chi_R\left(\frac{x-s}{\lambda(p)^{-1}}\right)\chi_R\left(\frac{y-s'}{\lambda(p')^{-1}}\right)\times$$

$$\times\frac{\min\{\lambda(p),\lambda(p')\}^n}{(1+\min\{\lambda(p),\lambda(p')\}^2\,|x-y|^2)^{m/2}}.$$

ここに，χ_R は半径 R の球体 $\{x;|x|\leqq R\}$ の特性関数を表わす．

Schur の補題を適用し，補題 3.7 の評価式から $\|A_pA_{p'}^*\|$ の評価を得る．

<u>補題 3.8.</u> 1) $|\sigma-\sigma'|\geqq R(\lambda(p)+\lambda(p'))$ の場合，$A_pA_{p'}^*=0$.

2) $|\sigma-\sigma'|\leqq 2R(\lambda(p)+\lambda(p'))$ の場合，

(i) $|s-s'| \leqq 2R(\lambda(p)^{-1}+\lambda(p')^{-1})$ ならば，$\|A_p A_{p'}^*\| \leqq C\,|a|_m^2$.

(ii) $2R(\lambda(p)^{-1}+\lambda(p')^{-1}) \leqq |s-s'| \leqq 2R(\varphi(p)+\varphi(p'))$ ならば，

$$\|A_p A_{p'}^*\| \leqq C|a|_m^2 \left(1+\min\{\lambda(p),\lambda(p')\}^2 |s-s'|^2\right)^{-m/2}.$$

(iii) $2R(\varphi(p)+\varphi(p')) \leqq |s-s'|$ ならば，

$$\|A_p A_{p'}^*\| \leqq C\,|a|_m^2 \left(1+\min\{\Phi(p),\Phi(p')\}\,|s-s'|\right)^{-m/2}.$$

今，次のように正値関数 h_1, h_2, h_3, h を定義する．

$$h_1(p,p') = C\,|a|_m\, \chi_R\left(\frac{\sigma-\sigma'}{\lambda(p)+\lambda(p')}\right) \chi_R\left(\frac{s-s'}{2(\lambda(p)^{-1}+\lambda(p')^{-1})}\right)$$

$$h_2(p,p') = C|a|_m\, \chi_R\left(\frac{\sigma-\sigma'}{\lambda(p)+\lambda(p')}\right)\left(1+\min\{\lambda(p),\lambda(p')\}^2 |s-s'|^2\right)^{-m/4}.$$

$$h_3(p,p') = C|a|_m\, \chi_R\left(\frac{\sigma-\sigma'}{\lambda(p)+\lambda(p')}\right)\left(1+\min\{\Phi(p),\Phi(p')\}\,|s-s'|\right)^{-m/4}$$

$$h(p,p') = h_1(p,p') + h_2(p,p') + h_3(p,p').$$

そのとき，補題3.8より，

$$\|A_p A_{p'}^*\| \leqq h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 \leqq (h_1+h_2+h_3)^2 = h(p,p')^2.$$

したがって，次に示すべきことは次の評価式がなりたつ事．

$$\int_{R^{2n}} h_i(p,p')\,dp \leqq M \qquad i=1,2,3.$$

まず，h_1, h_2 の support において，$\Phi(p)\approx\Phi(p')$, $\varphi(p)\approx\varphi(p')$ であることに注意する．よって，$\lambda(p)\approx\lambda(p')$．そのとき，

$$h_1(p,p') \leqq C\,|a|_m\ \chi_R\left(\frac{\sigma-\sigma'}{C\lambda(p')}\right)\chi_R\left(\frac{s-s'}{C\lambda(p')^{-1}}\right)$$

が成り立つから， $\int h_1(p,p')\,dp \leqq C\,|a|_m$.

また，

$$h_2(p,p') \leqq C|a|_m\,\chi_R\left(\frac{\sigma-\sigma'}{C\lambda(p')}\right)\left(1+C\lambda(p')^2|s-s'|^2\right)^{-m/4}$$

故，

$$\int h_2(p,p')\,dp \leqq C|a|_m\int\chi_R\left(\frac{\sigma-\sigma'}{C\lambda(p')}\right)d\sigma\int\frac{ds}{(1+c\lambda(p')^2|s-s'|^2)^{m/4}}$$

$$\leqq C|a|_m\int_{\mathbb{R}^n}\frac{ds''}{(1+|s''|^2)^{m/4}}$$

$m>2n$ ならば，右辺の積分は収束し，p' に依らない．

次に，$\int h_3(p,p')\,dp$ について考える．

$$\int h_3(p,p')\,dp=\int_{\Phi(p)\leqq\Phi(p')}+\int_{\Phi(p)\geqq\Phi(p')}\equiv I_1+I_2$$

と積分領域を二つに分ける．

I_1 の integrand の support において，$\Phi(s',\sigma)\approx\Phi(s',\sigma')$ に注意する．

また，(2.1) の (iii) より，

$$\Phi(s',\sigma)\leqq C\ \Phi(s,\sigma)\ \left(1+\Phi(s,\sigma)\,|s-s'|\right)^N$$

が成り立つ．したがって，

$$1+\Phi(s',\sigma')\,|s-s'|\leqq C\left(1+\Phi(s',\sigma)\,|s-s'|\right)$$

$$\leqq C\left(1+\Phi(s,\sigma)\,|s-s'|\right)^{N+1}.$$

よって，

$$I_1 \leqq C|a|_m \times \int \chi_R\left(\frac{\sigma-\sigma'}{2\Phi(p')}\right)\left(1+\Phi(s,\sigma)|s-s'|\right)^{-m/4} ds\, d\sigma$$

$$\leqq C|a|_m \times \int \chi_R\left(\frac{\sigma-\sigma'}{2\Phi(s',\sigma')}\right)\left(1+\Phi(s',\sigma')|s-s'|\right)^{-m/4(N+1)} ds\, d\sigma$$

$$\leqq C|a|_m \cdot \int_{R^n} (1+|s''|)^{-m/4(N+1)} ds''$$

これは，$m>4n(N+1)$ のとき，有限で p' に依らない。

次に，I_2 の integrand の support においては，$\Phi(s,\sigma)\approx\Phi(s',\sigma)$.

また，(2.1) の (iii) より，

$$\Phi(s,\sigma') \leqq C\Phi(s',\sigma')\left(1+\Phi(s',\sigma')|s-s'|\right)^N .$$

よって，

$$I_2 \leqq C|a|_m \int \chi_R\left(\frac{\sigma-\sigma'}{2\Phi(p)}\right)\left(1+\Phi(p')|s-s'|\right)^{-m/4} ds\, d\sigma.$$

$$\leqq C|a|_m \int \frac{ds}{\left(1+\Phi(s',\sigma')|s-s'|\right)^{m/4}} \int \chi_R\left(\frac{\sigma-\sigma'}{C\Phi(s,\sigma')}\right) d\sigma$$

$$= C|a|_m \int \frac{\Phi(s,\sigma')^n}{\left(1+\Phi(s',\sigma')|s-s'|\right)^{m/4}} ds$$

$$\leqq C|a|_m \int \frac{\Phi(s',\sigma')^n}{\left(1+\Phi(s',\sigma')|s-s'|\right)^{\frac{m}{4}-Nn}} ds$$

$$= C|a|_m \int_{R^n} \frac{ds''}{(1+|s''|)^{\frac{m}{4}-Nn}}$$

$\frac{m}{4}-Nn>n$ すなわち，$m>4n(1+N)$ ならば，右辺は収束し，かつ，p' に依らない定数。したがって，$m>4n(1+N)$ ならば，

$$\int h_3(p,p')\, dp \leqq C|a|_m .$$

$\|A_p^* A_p\|$ の評価についても，同様に行なうことができる．
したがって，命題 3.3 の評価 (3.3) が $M = C|a|_m$ $(m > 4n(1+N))$
で成り立つことがわかる。

References

[1] Asada, K. - Fujiwara, D., On some oscillatory integral transformations in $L^2(R^n)$. Japanese J. Math. vol. 4, 299-361 (1978).

[2] Beals, R. - Fefferman, C., Spatially inhomogeneous pseudodifferential operators, I. Comm. Pure Appl. Math. vol. 27, 1-24 (1974).

[3] Beals, R., A general calculus of pseudodifferential operators. Duke Math. J. vol 42, 1-42 (1975).

[4] Calderón, A.P. - Vaillancourt, R., A class of bounded pseudo-differential operators. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. vol. 69, 1185-1187 (1972).

[5] Danilov, V.G., Estimates for pseudodifferential canonical operators with complex phases. Dokl. Akad. Nauk SSSR vol. 224, 800-804 (1979) (in Russian).

[6] Eskin, G.I., The Cauchy problem for hyperbolic system in convolutions. Math. USSR Sb. vol. 3, 243-277 (1967).

[7] Fujiwara, D., On the boundedness of integral transformations with highly oscillatory kernels. Proc. Japan Acad. vol. 51, 96-99 (1975).

[8] ------------, A global version of Eskin's theorem. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA, vol. 24, 327-340 (1977).

[9] ------------, A construction of the fundamental solution for Schrödinger equation. J. d'Analyse Math. vol. 35, 41-96 (1979).

[10] Hörmander, L., Fourier integral operators, I. Acta Math. vol. 127, 79-183 (1971).

[11] ------------, The Weyl calculus of pseudo-differential operators. Comm. Pure Appl. Math. vol. 32, 359-443 (1979).

[12] Kumano-go, H., A calculus of Fourier integral operators on R^n and the fundamental solution for an operator of hyperbolic type. Comm. in Partial Differential Equations. vol. 1, 1-44 (1976).