数理解析研究所講究録
第434巻 1981年 92-107

相互作用するブラウン粒子の緩和

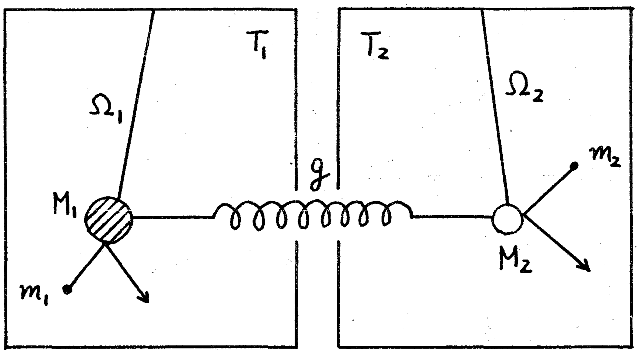
筑波大　物理学系　　有光敏彦

微視的なハミルトニアンから議論を始めて、注目していない自由度を消去し、注目している自由度の振舞いを決定する巨視的な基礎方程式を導出することは、統計力学の本来の目標であり、そこにその醍醐味もある。前回、[1] この手続きで減衰項を導く際、注目している系を構成している部分系間の相互作用の影響を、パラメトリック発振器とレーザー系を例にとって議論した。[2)-4)] そして、物理量によっては、部分系間の相互作用が、系の緩和に与える影響は、必ずしも小さくないことを示した。

ところで、上に挙げた2つの系は、量子光学の系であり、本質的に量子力学的系である。そこで、次のような疑問が生まれる。[5] 部分系間相互作用が、系の緩和に与える影響が大きいのは、量子効果のためではないのか？　古典的な系では、普通、相互作用は、座標だけに依存し、運動量には依存

しないので、系の緩和は、それを構成している部分系間の相互作用の影響を受けないであろう、という疑問である。

そこで、下図に示したような、互いに相互作用しているブラウン粒子の緩和を議論して、このことを調べてみる。



図－1

M_i（$i=1,2$）は、ブラウン粒子の質量、Ω_iはその固有振動数である。 ２つのブラウン粒子は、バネ（強さ g）で結合している。 また、m_iは、熱浴粒子の質量で、T_iは熱浴の温度である。

§1. ランジュバン方程式による取扱い

まず、ランジュバン方程式での扱いを、復習しておく。質量Mのブラウン粒子が１つだけのときの運動は、次のランジュバン方程式で議論される。

$$\dot{X} = \frac{\partial H_s}{\partial P}, \tag{1.1}$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial H_s}{\partial X} - \frac{\Gamma}{M}P + F. \tag{1.2}$$

ただし、$F(t)$はランジュバンカで、

$$\langle F(t)\rangle = 0, \quad \langle F(t_1)F(t_2)\rangle = 2\beta^{-1}\Gamma\delta(t_1-t_2), \tag{1.3}$$

を満たすものとする。　今、調和ポテンシャルに束縛されている粒子のブラウン運動を考えることにすると、

$$H_s = \frac{P^2}{2M} + \frac{M\Omega^2}{2}X^2, \tag{1.4}$$

でハミルトニアンが与えられる。(1.1)〜(1.4) に対応するホッカー＝プランク方程式は、

$$\frac{\partial W(t)}{\partial t} = \left(M\Omega^2 X\frac{\partial}{\partial P} - \frac{P}{M}\frac{\partial}{\partial X}\right)W(t) + \beta^{-1}\Gamma\frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{\partial}{\partial P} + \frac{\beta}{M}P\right)W(t), \tag{1.5}$$

となる。

同様にして、図1のような、相互作用している2つのブラウン粒子の場合は、

$$\dot{X}_1 = \frac{\partial H_s}{\partial P_1}, \quad \dot{X}_2 = \frac{\partial H_s}{\partial P_2}, \tag{1.6}$$

$$\dot{P}_1 = -\frac{\partial H_s}{\partial X_1} - \frac{\Gamma_1}{M_1}P_1 + F_1, \tag{1.7}$$

$$\dot{P}_2 = -\frac{\partial H_s}{\partial X_2} - \frac{\Gamma_2}{M_2}P_2 + F_2, \tag{1.8}$$

ただし、

$$\langle F_1(t)\rangle = \langle F_2(t)\rangle = 0\,, \qquad (1.9)$$

$$\langle F_i(t_1)F_j(t_2)\rangle = 2\delta_{ij}\beta_i^{-1}\Gamma_i\,\delta(t_1-t_2), \qquad (1.10)$$

として議論される。　２つのブラウン粒子は、それぞれ調和ポテンシャルに束縛されていて、しかも互いに調和相互作用しているので、ハミルトニアンは、

$$H_S = \sum_{k=1}^{2}\left(\frac{P_k^2}{2M_k} + \frac{M_k\Omega_{k0}^2}{2}X_k^2\right) + \frac{1}{2}g(X_1-X_2)^2, \qquad (1.11)$$

で与えられる。　(1.6) ~ (1.11) に対応するホッカー＝プランク方程式は、

$$\frac{\partial W(t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{2}\left(M_k\Omega_k^2 X_k\frac{\partial}{\partial P_k} - \frac{P_k}{M_k}\frac{\partial}{\partial X_k}\right)W(t)$$
$$- g\left(X_1\frac{\partial}{\partial P_2} + X_2\frac{\partial}{\partial P_1}\right)W(t)$$
$$+ \sum_{k=1}^{2}\beta_k^{-1}\Gamma_k\frac{\partial}{\partial P_k}\left(\frac{\partial}{\partial P_k} + \frac{\beta_k}{M_k}P_k\right)W(t), \qquad (1.12)$$

となる。　ただし、$\Omega_k^2 = \Omega_{k0}^2 + \frac{g}{M_k}$ とおいた。

式 (1.12) をみると、緩和をあらわす項（右辺才３項）は、(1.5) の対応する項（右辺才２項）の単純な和になっていることがわかる。　つまり、２つのブラウン粒子が、相互作用していないときの緩和項の単純な和が、相互作用している２つのブラウン粒子の緩和項を与えるのである。　２つのブラウン粒子間の相互作用の影響は、緩和項にはまったくないわけである。　以下の節で、このことが、はたして本当かどうかを、微視的なリウビユ方程式から出発して、調べてみる。

§2. 微視的な取扱い（その1）

微視的な議論をするにあたり、余計な複雑さを避けるために、なるべく簡単な熱浴のモデルを考えることにする。ただし、簡単だからといっても、それが熱浴としての性格を持っていなければ何にもならないので、まずそのことを調べておかなければならない。言い換えれば、簡単なモデルではそのままで熱浴となることは、まずないので、いかなる極限で、熱浴としての性格を持つかを調べておくのである。そこで、この節では、1つのブラウン粒子の緩和を、微視的に扱うことにする。

さて、簡単な熱浴のモデルとして、次のような系を考える。*)

$$H = H_S^0 + V + H_R^0, \tag{2.1}$$

$$H_S^0 = \frac{P^2}{2M} + \frac{M\Omega_0^2}{2}X^2, \tag{2.2}$$

$$V = \sum_{j=1}^{N} V(X - x_j) = \frac{V_0}{2}\sum_{j=1}^{N}(X - x_j)^2, \tag{2.3}$$

$$H_R^0 = \sum_{j=1}^{N}\left\{\frac{p_j^2}{2m} + \frac{m\omega_{j0}^2}{2}x_j^2\right\}, \tag{2.4}$$

ただし、H_S^0 はブラウン粒子が調和ポテンシャル中にあることを示すハミルトニアンで、H_R^0 は熱浴粒子も調和振動子の集まりであることを示している。(2.3) の V は、ブラウン粒子と熱浴粒子が、調和的な相互作用をしていることを示している。正確には、

$$V = \frac{V_0}{2}\sum_{j=1}^{N}(X - x_j - l_j)^2, \tag{2.5}$$

ただし、l_jは、ブラウン粒子とj番目の熱浴粒子を結合しているバネの自然長である、とするべきであるが、以下の議論に無意味な項を消去してしまったものとして、(2.3)を理解していただきたい。 (2.3)、(2.5)どちらを用いても、以下の議論は同等であるが、熱浴の性格について考察するときには、物理的な(2.5)が本質的となる。 なお、ブラウン粒子と熱浴粒子の間の相互作用の強さを与えるパラメータV_0は、系の体積をvとして、$O(1/\sqrt{v})$の量であると考える。 ハミルトニアン(2.1)～(2.4)を、次のように書き換えておく。

$$H = H_S + H_1 + H_R, \tag{2.6}$$

$$H_S = \frac{P^2}{2M} + \frac{M\Omega^2}{2}X^2, \tag{2.7}$$

$$H_1 = -V_0\sum_j X x_j, \tag{2.8}$$

$$H_R = \sum_j\left\{\frac{p_j^2}{2m} + \frac{m\omega_j^2}{2}x_j^2\right\}, \tag{2.9}$$

ただし、$\Omega^2 = \Omega_0^2 + \frac{V_0}{M}$, $\omega_j^2 = \omega_{j0}^2 + \frac{V_0}{m}$ とした。

減衰理論の一般論[6]を応用し、V_0に関して2次のオーダーまで求める。 その際、量子力学的に扱うと議論が簡単である。 結果を、ワイル対称化したウイグナー表示でかくと、次のようになる。 $f_W(t)$を、この表示での分布関数として、

$$\dot{f}_W(t) = \left\{ M\Omega^2 X \frac{\partial}{\partial P} - \frac{P}{M}\frac{\partial}{\partial X} \right\} f_W(t)$$
$$+ \frac{i}{\hbar}\left\{ C_-(t)\frac{\partial}{\partial P}X - S_-(t)\frac{1}{M}\frac{\partial}{\partial P}P \right\} f_W(t)$$
$$+ \frac{1}{2}\left\{ C_+(t)\frac{\partial^2}{\partial P^2} + S_+(t)\frac{1}{M}\frac{\partial^2}{\partial P\partial X} \right\} f_W(t), \qquad (2.10)$$

ただし、

$$\frac{C_-(t)}{V_0^2} = \int_0^t d\tau \sum_j \langle [\bar{x}_j(t-\tau), \bar{x}_j(t)] \rangle_R \cos\Omega\tau, \qquad (2.11a)$$

$$\frac{S_-(t)}{V_0^2} = \int_0^t d\tau \sum_j \langle [\bar{x}_j(t-\tau), \bar{x}_j(t)] \rangle_R \frac{1}{\Omega}\sin\Omega\tau, \qquad (2.11b)$$

$$\frac{C_+(t)}{V_0^2} = \int_0^t d\tau \sum_j \langle \{\bar{x}_j(t-\tau), \bar{x}_j(t)\} \rangle_R \cos\Omega\tau, \qquad (2.11c)$$

$$\frac{S_+(t)}{V_0^2} = \int_0^t d\tau \sum_j \langle \{\bar{x}_j(t-\tau), \bar{x}_j(t)\} \rangle_R \frac{1}{\Omega}\sin\Omega\tau, \qquad (2.11d)$$

ここに、$\langle \cdots \rangle_R$ は、熱浴の分布関数による平均を表わす。$\bar{x}_j(t)$ は、熱浴粒子が、ハミルトニアン H_R で運動していることを表わすので、(2.9) より

$$\bar{x}_j(t-\tau) = \bar{x}_j(t)\cos\omega_j\tau - \frac{1}{m\omega_j}\bar{p}_j(t)\sin\omega_j\tau, \qquad (2.12)$$

となることがわかる。

長時間近似で、古典極限 ($\hbar \to 0$) を考えると、

$$C_-(\infty) = \frac{i\hbar V_0^2}{2m}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \mathcal{D}(\omega)\frac{1}{\omega}\frac{\mathcal{P}}{\omega-\Omega}, \qquad (2.13a)$$

$$S_-(\infty) = \frac{i\hbar V_0^2}{2m}\pi\frac{\mathcal{D}(\Omega)}{\Omega^2} \qquad (2.13b)$$

$$C_+(\infty) = \frac{1}{\beta}\,\frac{V_0^2}{m}\,\pi\,\frac{\mathcal{D}(\Omega)}{\Omega^2} + \mathcal{O}(\hbar)\,, \qquad (2.13c)$$

$$S_+(\infty) = -\frac{1}{\beta}\,\frac{V_0^2}{m\Omega}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\,\mathcal{D}(\omega)\,\frac{1}{\omega^2}\,\frac{\mathcal{P}}{\omega-\Omega} + \mathcal{O}(\hbar)\,, \qquad (2.13d)$$

となる。 $\mathcal{D}(\omega)$ は、熱浴調和振動子のモードの分布を表わす状態密度であり、$\omega<0$ に対しては、$\mathcal{D}(-\omega)=\mathcal{D}(\omega)$ で定義している。 (2.13) を導出するにあたって、等分配則

$$\frac{m\omega_i^2}{2}\langle x_i^2\rangle = \frac{1}{2}\beta^{-1}, \qquad (2.14)$$

を用いた。 (2.13) をくわしく調べるには、$\mathcal{D}(\omega)$ を与えなければならない。 あとで述べるように、$\omega\simeq 0$ のモードが入ると、熱浴としての性格を失なってしまうので、$\mathcal{D}(\omega)$ として、(2.13) の $\omega\simeq 0$ の特異性を消せるものを考えねばならない。 一番簡単なものとして、3次元デバイモデルの状態密度を考えることにする。 つまり

$$\mathcal{D}(\omega) = \frac{3\mathcal{V}}{2\pi^2 c^3}\,\omega^2, \qquad (2.15)$$

ただし、$\mathcal{V}$ は系の体積で、c は音速を表わす。 デバイ振動数は、

$$\omega_D = c\left(18\pi^2\frac{N}{\mathcal{V}}\right)^{1/3}, \qquad (2.16)$$

である。 N は、熱浴振動子の数である。 (2.15) の状態密度を用いて、(2.13) を計算すると、古典極限 ($\hbar\to 0$) で、(2.10) は次のようになる。

$$\dot{f}(t) = \left\{ M(\Omega^2 - \Delta\Omega^2) X \frac{\partial}{\partial P} - \frac{P}{M}\frac{\partial}{\partial X} \right\} f(t)$$
$$+ \beta^{-1} \Gamma \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{\partial}{\partial P} + \frac{\beta}{M} P\right) f(t)$$
$$+ \beta^{-1} \Delta\Gamma \frac{1}{M} \frac{\partial^2}{\partial P \partial X} f(t), \qquad (2.17)$$

ただし、

$$\Gamma = \frac{3V_0^2}{4\pi m c^3} \nu, \qquad (2.18)$$

$$\Delta\Gamma = \frac{3V_0^2}{4\pi^2 m c^3} \nu \frac{1}{\Omega} \ln \frac{\omega_D + \Omega}{\omega_D - \Omega}, \qquad (2.19)$$

$$M\Delta\Omega^2 = \frac{3V_0^2}{2\pi^2 m c^3} \nu\, \omega_D \left(1 - \frac{\Omega}{2\omega_D} \ln \frac{\omega_D + \Omega}{\omega_D - \Omega}\right), \qquad (2.20)$$

である。

式(2.17)は、ほぼ(1.5)と一致しているが、右辺第3項の存在のために、もつれで、熱平衡分布を保証していない。言い換えると、N個の振動子系は、まだ熱浴としての性格を持っていないのである。実は、$\omega_D \gg \Omega$のときにはじめて、熱浴となり得るのである。このことの物理的解釈は、すぐ後に述べるが、この極限で(2.19), (2.20)は、

$$\Delta\Gamma \longrightarrow \frac{3V_0^2}{2\pi^2 m c^3} \nu \frac{1}{\omega_D}\left(1 + O\left(\frac{\Omega^2}{\omega_D^2}\right)\right), \qquad (2.21)$$

$$\Delta\Omega^2 \longrightarrow \frac{3V_0^2}{2\pi^2 m c^3} \nu \frac{\omega_D}{M}\left(1 + O\left(\frac{\Omega^2}{\omega_D^2}\right)\right), \qquad (2.22)$$

となる。ところで、ブラウン粒子の運動に対する抵抗を表わすのは、(2.17)右辺第2項の$\frac{\partial}{\partial P}P$の係数である。そこ

で、

$$\frac{\Gamma}{M} = \frac{3V_0^2}{4\pi m C^3} \upsilon \frac{1}{M} \equiv \frac{1}{\tau} \quad , \qquad (2.23)$$

とおくと、(2.21)、(2.22) より、$\omega_D \gg \Omega$ のとき、

$$\frac{\Delta\Gamma}{M} = \frac{2}{\pi\omega_D\tau} \quad , \quad \Delta\Omega^2 = \frac{2\omega_D}{\pi\tau} \quad , \qquad (2.24)$$

となることがわかる。 以下に述べるように、ω_D^{-1}は、ブラウン粒子と熱浴粒子の相互作用している時間に対応するので、ブラウン粒子の運動の減衰の時間のオーダーτと比較すると、

$$\omega_D\tau \gg 1 \quad , \qquad (2.25)$$

でなければならない。 けっきょく、N個の調和振動子系が熱浴となるためには、(2.25) と

$$\omega_D \gg \Omega \quad , \qquad (2.26)$$

が成立する必要のあることがわかった。

さて、(2.25)、(2.26) の物理的意味を記しておく。 ブラウン粒子と熱浴粒子が、重力場中の振り子であると考える。ブラウン粒子の糸の長さをR、熱浴のj番目の粒子の糸の長さをr_jとすると、

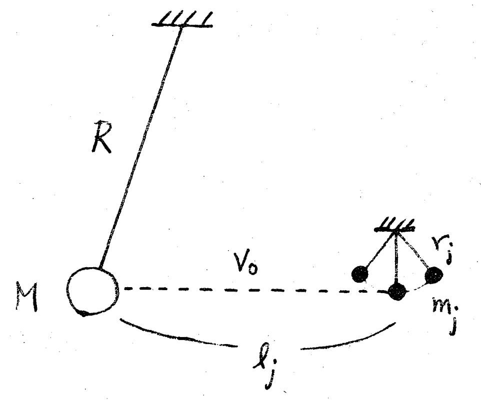
$$\Omega = \sqrt{\frac{g}{R}} \quad , \quad \omega_j = \sqrt{\frac{g}{r_j}} \quad , \qquad (2.27)$$

となるが、熱浴粒子が熱浴たるためには、

$$R \gg r_j \quad , \qquad (2.28)$$

でなければならない。 なぜなら、このとき図2のような状

況が実現し、ブラウン粒子と熱浴粒子を結んだバネが、自然長からずれる時間が、(それは、相互作用している時間と考えられる。)、ブラウン粒子の周期に比べて、ひじょうに短かくなるのである。 図2中のl_jは、バネの自然長である。(c.f. (2,51))。 これより、$\omega \simeq 0$のモードが好ましくないこ



図−2

と、(2,26)でなければならないことが理解できる。 一方熱浴振動子は、温度Tの熱振動をしているので、等分配則よりその振巾は

$$\sqrt{\langle x_j^2\rangle_R} = \sqrt{\frac{kT}{m\omega_j^2}} = \sqrt{\frac{kTr_j}{mg}}, \qquad (2.29)$$

で与えられるが、明らかに、$\sqrt{\langle x_j^2\rangle_R} \lesssim r_j$ でなければならない。これより、$r_j \gtrsim kT/mg$ となり、従って

$$\omega_j \lesssim \sqrt{\frac{mg^2}{kT}}. \qquad (2.30)$$

つまり、熱浴振動子のモードに上限(今のモデルではω_Dにあたる。)が、存在することがわかる。 もっとも、このことは、次のように言った方が"正確"なのかもしれない。 つ

まり、$\omega_D \to \infty$ での $\Delta\Omega^2$ の発散は、電磁場の場の理論（QED）における発散と同じもので、$\Omega^2 - \Delta\Omega^2 \equiv \tilde{\Omega}^2$ が観測されるくり込まれた振動数（QEDでは、質量のくり込みにあたる。）と考えるのである。

けっきょく、$\omega_D \to \infty$ で（式(2.25)、(2.26) 共に成立する。）、(2.17) は、(1.5) になることがわかった。　ただし、Ω^2 は、くり込まれた振動数 $\tilde{\Omega}^2$ と理解し、Γ は (2.18) で与えられるものとする。

§3.　微視的な取扱い（その２）

さて、図１のような、相互作用しているブラウン粒子に、前節で調べた熱浴振動子がついている場合を考える。つまり、

$$H = H_S^0 + V + H_R^0 , \tag{3.1}$$

$$H_S^0 = \sum_{k=1}^{2} \left\{ \frac{P_k^2}{2M_k} + \frac{M_k \Omega_{k0}^2}{2} X_k^2 \right\} + \frac{g}{2} (X_1 - X_2)^2 , \tag{3.2}$$

$$V = \sum_{k=1}^{2} \sum_{j=1}^{N} \frac{V_k}{2} (X_k - x_j^{(k)})^2 , \tag{3.3}$$

$$H_R^0 = \sum_k \sum_j \left\{ \frac{p_j^{(k)2}}{2m} + \frac{m\omega_{j0}^{(k)}}{2} x_j^{(k)2} \right\} , \tag{3.4}$$

これを、次のように書き換えて計算する。

$$H = H_S + H_1 + H_R , \tag{3.5}$$

$$H_S = \sum_k \left\{ \frac{P_k^2}{2M_k} + \frac{M_k \Omega_k^2}{2} X_k^2 \right\} - g X_1 X_2 , \tag{3.6}$$

$$H_1 = -\sum_k \sum_j V_k X_k x_j^{(k)} , \tag{3.7}$$

$$H_R = \sum_k \sum_j \left\{ \frac{p_j^{(k)2}}{2m} + \frac{m\omega_j^{(k)}}{2} x_j^{(k)2} \right\} , \tag{3.8}$$

ただし、$\Omega_k^2 = \Omega_{k0}^2 + \frac{V_k}{M_k} + \frac{g}{M_k}$ ，　$\omega_j^{(k)2} = \omega_{j0}^{(k)2} + \frac{V_k}{m}$ としている。

前節と同様にして、古典極限で次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\dot{f}(t) = \sum_{k=1}^{2}\Big(M_k\Omega_k^2 X_k\frac{\partial}{\partial P_k} - \frac{P_k}{M_k}\frac{\partial}{\partial X_k}\Big) f(t) \\
- g\Big(X_1\frac{\partial}{\partial P_2} + X_2\frac{\partial}{\partial P_1}\Big) f(t) \\
+ \beta_1^{-1}\Gamma_1^{(+)}\frac{\partial}{\partial P_1}\Big(\frac{\partial}{\partial P_1} + \frac{\beta_1}{M_1}P_1\Big) f(t) \\
- \beta_1^{-1}\Gamma_1^{(-)}\frac{\partial}{\partial P_1}\Big(\frac{\partial}{\partial P_2} + \frac{\beta_2}{M_2}P_2\Big) f(t) \\
+ \beta_2^{-1}\Gamma_2^{(+)}\frac{\partial}{\partial P_2}\Big(\frac{\partial}{\partial P_2} + \frac{\beta_2}{M_2}P_2\Big) f(t) \\
- \beta_2^{-1}\Gamma_2^{(-)}\frac{\partial}{\partial P_2}\Big(\frac{\partial}{\partial P_1} + \frac{\beta_1}{M_1}P_1\Big) f(t) \\
- M_1\Delta\Omega_1^{2(+)} X_1\frac{\partial}{\partial P_1} f(t) \\
+ M_1\Delta\Omega_1^{2(-)} X_2\frac{\partial}{\partial P_2} f(t) \\
- M_2\Delta\Omega_2^{2(+)} X_2\frac{\partial}{\partial P_2} f(t) \\
+ M_2\Delta\Omega_2^{2(-)} X_1\frac{\partial}{\partial P_2} f(t) \\
+ \beta_1^{-1}\Delta\Gamma_1^{(+)}\frac{1}{M_1}\frac{\partial^2}{\partial P_1\partial X_1} f(t) \\
- \beta_1^{-1}\Delta\Gamma_1^{(-)}\frac{1}{M_2}\frac{\partial^2}{\partial P_1\partial X_2} f(t) \\
+ \beta_2^{-1}\Delta\Gamma_2^{(+)}\frac{1}{M_2}\frac{\partial^2}{\partial P_2\partial X_2} f(t) \\
- \beta_2^{-1}\Delta\Gamma_2^{(-)}\frac{1}{M_1}\frac{\partial^2}{\partial P_2\partial X_1} f(t)\, ,
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

ただし、$k=1, 2$ に対して、

$$
\Gamma_k^{(\pm)} = \frac{1}{2}V_k^2\frac{2\pi}{4m}\Big(\frac{\mathcal{D}_k(\lambda_+)}{\lambda_+^2} \pm \frac{\mathcal{D}_k(\lambda_-)}{\lambda_-^2}\Big)\sqrt{\frac{M_{k+(-1)^{k-1}\theta(\pm)}}{M_k}}\, , \tag{3.10}
$$

$$
M_k\Delta\Omega_k^{2(\pm)} = \frac{1}{2}V_k^2\frac{1}{2m}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\,\mathcal{D}_k(\omega)\frac{1}{\omega}\Big(\frac{\mathcal{P}}{\omega-\lambda_+} \pm \frac{\mathcal{P}}{\omega-\lambda_-}\Big)\sqrt{\frac{M_{k+(-1)^{k-1}\theta(\pm)}}{M_k}}\, , \tag{3.11}
$$

$$
\Delta\Gamma_k^{(\pm)} = \frac{1}{2}V_k^2\frac{1}{2m}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\,\mathcal{D}_k(\omega)\frac{1}{\omega^2}\Big(\frac{\mathcal{P}}{\lambda_+(\omega-\lambda_+)} \pm \frac{\mathcal{P}}{\lambda_-(\omega-\lambda_-)}\Big)\sqrt{\frac{M_{k+(-1)^{k-1}\theta(\pm)}}{M_k}}\, , \tag{3.12}
$$

ここに、$\theta(+)=0$, $\theta(-)=1$ としている。 また、

$$\lambda_\pm^2 = \frac{1}{2}\left\{ \Omega_1^2 + \Omega_2^2 \pm \sqrt{(\Omega_1^2 - \Omega_2)^2 + 4\frac{g^2}{M_1 M_2}} \right\}, \tag{3.13}$$

である。

熱浴振動子のモデルとして、前節と同じ３次元デバイモデルをとる。 つまり、状態密度として

$$\mathcal{D}_k(\omega) = \frac{3v_k}{2\pi^2 C_k^3}\omega^2, \qquad \omega_{Dk} = C_k\left(18\pi^2\frac{N_k}{v_k}\right)^{1/3}, \tag{3.14}$$

を導入する。 また、質量M_1、M_2のブラウン粒子に結合している熱浴の温度を、それぞれT_1、T_2とする。 この熱浴振動子が、熱浴たるための極限を考える（$\lambda_\pm \ll \omega_{Dk}$）と、(3.9) は次のようになる。

$$\begin{aligned}\dot{f}(t) = &\left\{ \sum_{k=1}^{2}\left(M_k\tilde{\Omega}_{0k}^2 X_k \frac{\partial}{\partial P_k} - \frac{P_k}{M_k}\frac{\partial}{\partial X_k}\right)\right.\\ &\left.\qquad + g(X_1 - X_2)\left(\frac{\partial}{\partial P_1} - \frac{\partial}{\partial P_2}\right)\right\} f(t)\\ &+ \sum_{k=1}^{2}\beta_k^{-1}\Gamma_k^{(+)}\frac{\partial}{\partial P_k}\left(\frac{\partial}{\partial P_k} + \frac{\beta_k}{M_k}P_k\right) f(t),\end{aligned} \tag{3.15}$$

ただし、

$$\tilde{\Omega}_{0k}^2 = \Omega_{k0}^2 + \frac{V_k}{M_k} - \Delta\Omega_k^{(+)2}, \tag{3.16}$$

$$\Gamma_k^{(+)} = \frac{3V_k^2}{4\pi m C_k^3} v_k, \tag{3.17}$$

$$M_k\Delta\Omega_k^{(+)2} = \frac{3V_k^2}{2\pi^2 m C_k^3} v_k \omega_{Dk}, \tag{3.18}$$

である。 これは、ランジュバン方程式 (1.6) ～ (1.10) から導出した (1.12) とまったく同じである。 ただし、(3.16) の振動数$\tilde{\Omega}_{0k}^2$を、くり込まれた振動数と考え、(1.11) 中のΩ_{k0}^2がこれにあたるとするのである。

§4. まとめ

前節の結果より、今考えた最も簡単な熱浴振動子のモデルでは、相互作用している古典的なブラウン粒子の緩和は、ブラウン粒子間の相互作用には、まったく依存せず、それぞれのブラウン粒子が、独立に熱浴に接触している場合の緩和項を、単純に加えた形で入ることがわかった。以上の議論では、熱浴振動子モードの状態密度を、3次元デバイモデルにした。これを、他のものに変えたとき、相互作用しているブラウン粒子の緩和が、その相互作用に依存するかしないかは、今後の問題であるが、そのモデルが、熱浴としての性格をもつ極限で、前節と同じ結果になる可能性がある。ただ、単純に考えると、(3.10)の$\Gamma_k^{(-)}$に対応する項は、一般には残ってもよいと思われる。しかも、そのときは必ずgに依存するはずである。

参考文献

1). 有光敏彦、数理解析研究所講究録405、「確率過程論と開放系の統計力学II」(1980) 31-51.

2). T. Arimitsu, Ph.D. Thesis (Univ. of Tokyo, 1980).

3). T. Arimitsu, Y. Takahashi & F. Shibata, Physica 100A (1980) 507.

4). T. Arimitsu, Physica 104A (1980) 126.

5). この疑問は、久保亮五先生が、出されたものである。

6). F. Shibata & T. Arimitsu, J. Phys. Soc. Jpn. 49 (1980) 891, 及び、その中の参考文献。Ref. 1)にも、簡単に述べてある。

*). 同様のモデルは、問題意識はちがうが、次の論文でも調べられている。 M. Toda, J. Phys. Soc. Jpn. 14 (1959) 722; T. Kotera & M. Toda, J. Phys. Soc. Jpn. 14 (1959) 1475; R.P. Feynman & F.L. Vernon, Jr., Ann. Phys. 24 (1963) 118.