数理解析研究所講究録
第435巻1981年1-5

乱流の相似性と普遍性

京大 理　巽 友正

非圧縮粘性流体の乱流運動は，数学的にはNavier-Stokes方程式の一見不規則な解として表現される。この運動の本質的な特徴は，粘性率 ν の特異な役割にある。もし，粘性が存在せず $\nu = 0$ ならば，流体は一つの保存系であり，乱流は熱平衡状態にあることが可能である。しかし，小さくても0ではない粘性 $\nu > 0$ が存在する場合には，流体は散逸的であり，乱流は熱平衡にはあり得ない。この場合，乱流は，高々，別種の平衡状態をとりうるに過ぎない。

Kolmogorov (1941) は二つのパラメター，粘性率 ν および エネルギー散逸率 $\epsilon = -\dot{\mathcal{E}}$，によって決定される一つの平衡状態を提案した。こゝに，$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\langle |u|^2 \rangle$ は乱れのエネルギーを表す。この前提と次元解析から直ちに，エネルギー・スペクトル $E(k)$，k は波数，はエネルギー保有領域の波数 k_0 よりはるかに大きい波数領域において，

次のような相似形をとることが示される：

$$E(k) = \epsilon^{\frac{1}{4}}\nu^{\frac{5}{4}}F(k/k_d), \quad k_d = \epsilon^{\frac{1}{4}}\nu^{\frac{3}{4}}. \qquad (1)$$

こゝに，Fは無次元関数，k_dはエネルギー散逸領域の波数を表す。非粘性の極限 $\nu\to 0$ では，相似形（1）は有名な慣性小領域スペクトル，

$$E(k) = C\epsilon^{\frac{2}{3}}k^{-\frac{5}{3}}, \qquad C = 定数, \qquad (2)$$

になる。（2）は Kolmogorov の普遍平衡状態を特徴づけるスペクトルである。

非圧縮粘性流体においては，エネルギー散逸率 ϵ は，

$$\epsilon = -\dot{\mathcal{E}} = 2\nu Q \qquad (3)$$

のように表される。こゝに，$Q = \langle|\mathrm{rot}\,u|^2\rangle$ は，エンストロフィーとよばれる量である。このとき，Kolmogorov の前提

$$\nu\to 0 \quad のとき \quad \epsilon > 0 \qquad (4)$$

は，この極限で Q の発散，すなわちエンストロフィー変異，

$$\nu\to 0 \quad のとき \quad Q\to\infty \qquad (5)$$

を引きおこす。従って，Kolmogorov スペクトル（1）および（2）の妥当性は，全くエンストロフィー変異の存在に依存している。

エンストロフィー変異（5）が二次元乱流においては起り得ないことは明らかである。なぜなら，そこではエンス

トロフィー散逸率 η が

$$\eta = -\dot{Q} = 2\nu P, \qquad (6)$$

ただし，$P = \langle |\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,u|^2 \rangle$ はパリンストロフィー，のように表され，(6) から直ちに，Q は初期時刻において有限であれば常に有限であり，従って，

$$\nu \to 0 \quad \text{のとき} \quad \epsilon \to 0 \qquad (7)$$

となるからである。　明らかに，Kolmogorov の理論はこのような乱流には適用できない。

Batchelor (1969), Kraichnan (1967) および Leith (1968) は，二次元乱流に対して，三次元乱流の場合の ϵ と ν の代りに η と ν によって決定される別種の平衡状態を考えた．　この前提と次元解析の結果，次のような相似形が得られる：　$k \approx k_d$ のとき，

$$E(k) = \eta^{\frac{1}{6}} \nu^{\frac{3}{2}} F(k/k_d), \quad k_d = \eta^{\frac{1}{6}} \nu^{-\frac{1}{2}}. \qquad (8)$$

ただし，k_d はここではエンストロフィー散逸の波数を表す。　非粘性の極限 $\nu \to 0$ では，相似形 (8) は，領域 $k_0 \ll k \ll k_d$ において 二次元の慣性小領域スペクトル

$$E(k) = C' \eta^{\frac{2}{3}} k^{-3}, \qquad C' = \text{定数} \qquad (9)$$

を与える。

上に述べたような平衡状態の提案が現実のものとして受

入れられるためには，それらがNavier-Stokes方程式と両立しうることが検証されなければならない。乱流の統計的記述は，原理的にはHopfの特性汎関数方程式によってなされるが，実際には無数のモーメントを関係づける方程式系を用いて行なわれる。 この場合，方程式系の不完結性のために，何らかの完結仮説が必要となるが，そのような仮説の一つである変形0-4次キュムラント近似は，用いた近似にはよらない厳密なエネルギー・スペクトルの相似則を与えることが知られている。

三次元乱流に対しては，この近似はエネルギー・スペクトルに対して，エネルギー保有領域 $k \approx k_0$ では非粘性相似則を，そしてエネルギー散逸領域 $k \approx k_d$ ではKolmogorov相似則を与え，しかも，これらの結果はいずれも厳密であることが示される。 それ故，Kolmogorov相似則(1)とその前提(4)は，乱流を支配する数学的方程式からの厳密な結果であることが分る。 有限の $\mathcal{E}$ と $\mathcal{Q}$ の初期値から出発した $\mathcal{E}$ の時間的変化の数値計算の結果から，エンストロフィー変異が有限の臨界時刻 $t = t_c$ において起ること，そして，非粘性の極限において，エネルギー散逸 ϵ は，$t < t_c$ の期間では0であり， $t > t_c$ の期間では0でないことが分る。

二次元乱流に対しては，同じ近似を適用することによって，エネルギー保有領域 $k \approx k_0$ では非粘性相似則が，そしてエンストロフィー散逸領域 $k \approx k_d$ では Batchelor の相似則 (8) が成立し，そしてこれらの相似則もまた厳密な結果であることが示される。非粘性の極限ではエネルギー $\mathcal{E}$ は保存されるが，エンストロフィー Q は，臨界時刻以前 $t < t_c$ では保存され，それ以後の期間 $t > t_c$ では減衰する。この最後の結果は，Batchelor その他によって採用された前提の正しさを裏書きしている。三次元乱流の場合とは違って，二次元乱流に対する臨界時刻 t_c は，粘性 ν が減少すると共に，

$$t_c \propto [\log(1/\nu)]^{1/2} \tag{10}$$

に従って限りなく増加する。それ故，パリンストロフィー変異

$$\nu \to 0 \text{ のとき } \mathcal{P} \to \infty \tag{11}$$

は，二次元乱流に対しては，無限時間ののち，$t > t_c \to \infty$，にはじめて起ることになる。