

Boussinesq 乱流 — 軸対称乱流 —

東邦大医 中内 紀彦
齋藤 善雄

§1. 序

Boussinesq 方程式に従う自然対流の乱れについて考察を行う。温度場および流れの速度場は統計的に一様で重力加速度の方向に対し軸対称であることを仮定する。我々の興味は第一に Boussinesq 乱れにおけるこのような一様軸対称な場において、温度場の二次相関の波数スペクトルおよび速度場のエネルギー・スペクトル分布がどのような型をとるかということにある。第二の興味は Boussinesq 乱流においても浮力項が小さいとき、軸対称性が破れ等方性乱流へ移行する場合があるのではないかという期待である。

温度場の二次相関のスペクトル分布に関しては、Batchelor に見られるように、^{1), 2)} 一様等方性乱流中での *passive* な温度場についての研究がある。軸対称乱流に関しては、比較的最近の研究として、軸対称乱流が等方性乱流へ回帰することを

示した Herring の研究がある。^{3), 4)} Herring が対象にしたのは温度場を含まぬ通常の非圧縮性流体の軸対称乱れであるが解析の手段として Kraichnan の DIA を用いている。

我々は Boussinesq 乱流を定式化するにあたり等方性乱流において良い結果を与えることが知られている eddy-damped Markovian 近似 (EDMA) を使う。EDMA は DIA に比べ簡単な型をしているため数値計算を行う場合に便利である。軸対称乱流における相関々数は波数ベクトルの絶対値および対称軸と波数ベクトルの間の角度との関数であるが、Herring は相関々数の角度依存性を Legendre 関数で展開することにより数値計算を行っている。EDMA を用いれば EDMA は DIA のように時間積分を含まないから角度部分を直交関数で展開することなく数値積分を行える可能性がある。

こゝでの報告は一様軸対称な Boussinesq 乱流の定式化であり数値計算の結果は後日に譲りたい。

§2. Boussinesq 方程式⁵⁾

重力場中における流体は非一様に熱せられることにより密度変化を生じ対流を起すか、圧力変化は小さく圧力による密度変化が無視できるような場合流体は非圧縮性流体と見なすことができる。このような流れを記述するのが Boussinesq

方程式である。

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} + \beta g T \delta_{i3} \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_k \frac{\partial T}{\partial x_k} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x_k^2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0 \quad (3)$$

こゝで圧力 P は平衡状態での静水圧からのずれ、温度 T は平均値からのずれであっていずれも微小量である。 β は流体の膨張率であり g は重力加速度の大きさである。 δ_{i3} はクロネッカーのデルタ関数で座標の第3成分は重力加速度に平行な上向き方向である。

上式を Fourier 変換し圧力 P を消去すれば、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2\right) u_a(k) = -\frac{i}{2} P_{abm}(k) \int dP u_b(P) u_m(k-P) + \beta g \Delta_{a3}(k) T(k) \quad (4)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \chi k^2\right) T(k) = -i k_a \int dP T(P) u_a(k-P) \quad (5)$$

$$k_a u_a(k) = 0 \quad (6)$$

こゝで、

$$P_{abm}(k) \equiv k_b \Delta_{am}(k) + k_m \Delta_{ab}(k)$$

$$\Delta_{am}(k) \equiv \delta_{am} - k_a k_m / k^2$$

である。

§3. 相関々数

温度場および速度場から作られる2次相関々数は、温度・温度、温度・速度および速度・速度の三種類存在する。これらの2次相関々数が満たすべき方程式は(4)~(6)式を用いて次のように得られる。

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \chi(k^2 + p^2) \right] \langle T(k) T(p) \rangle = -i \int dk' \left[k_m \langle T(p) T(k') U_m(k-k') \rangle + P_m \langle T(k) T(k') U_m(k-k') \rangle \right] \quad (7)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \chi k^2 + \nu p^2 \right] \langle T(k) U_a(p) \rangle = \beta g \Delta_{a3}(p) \langle T(k) T(p) \rangle - \frac{i}{2} \int dk' \left[2k_m \langle T(k') U_m(k-k') U_a(p) \rangle + P_{abm}(p) \langle T(k) U_b(k') U_m(p-k') \rangle \right] \quad (8)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \nu(k^2 + p^2) \right] \langle U_a(k) U_b(p) \rangle = \beta g \left[\Delta_{a3}(k) \langle T(k) U_b(p) \rangle + \Delta_{b3}(p) \langle T(p) U_a(k) \rangle \right] - \frac{i}{2} \int dk' \left[P_{abm}(k) \langle U_b(k') U_m(k-k') U_b(p) \rangle + P_{bpm}(p) \langle U_a(k) U_b(k') U_m(p-k') \rangle \right] \quad (9)$$

同様にして温度場および速度場から作られる3次相関々数は4種類あり、これらの満足すべき方程式は次のようになる。

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \chi(k^2 + p^2 + q^2) \right] \langle T(k) T(p) T(q) \rangle = -i \int dk' \sum_{(k, p, q)} k_m \langle T(p) T(q) T(k') U_m(k-k') \rangle \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial}{\partial t} + \chi(k^2 + p^2) + \nu q^2 \right] \langle T(k) T(p) U_a(q) \rangle &= \beta g \Delta_{a3}(q) \langle T(k) T(p) T(q) \rangle \\
&- \frac{i}{2} \int dk' \left\{ 2 \sum_{(k, p)} k_m \langle T(p) T(k') U_m(k-k') U_a(q) \rangle \right. \\
&\quad \left. + P_{alm}(q) \langle T(k) T(p) U_l(k') U_m(q-k') \rangle \right\} \quad (11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial}{\partial t} + \chi k^2 + \nu(p^2 + q^2) \right] \langle T(k) U_a(p) U_b(q) \rangle &= \beta g \sum_{\substack{(p, q) \\ (a, b)}} \Delta_{a3}(p) \langle T(k) T(p) U_b(q) \rangle \\
&- \frac{i}{2} \int dk' \left\{ 2 k_m \langle T(k') U_m(k-k') U_a(p) U_b(q) \rangle \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\substack{(p, q) \\ (a, b)}} P_{abm}(p) \langle T(k) U_l(k') U_m(p-k') U_b(q) \rangle \right\} \quad (12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial}{\partial t} + \nu(k^2 + p^2 + q^2) \right] \langle U_a(k) U_b(p) U_c(q) \rangle &= \beta g \sum_{\substack{(k, p, q) \\ (a, b, c)}} \Delta_{a3}(k) \langle T(k) U_b(p) U_c(q) \rangle \\
&- \frac{i}{2} \int dk' \sum_{\substack{(k, p, q) \\ (a, b, c)}} P_{abm}(k) \langle U_l(k') U_m(k-k') U_b(p) U_c(q) \rangle \quad (13)
\end{aligned}$$

こゝで、和の記号 Σ の下に書かれた (k, p, q) は k, p, q をサイクリックに入れ換えて和をとることを意味し、 $(\substack{k, p, q \\ a, b, c})$ は k, p, q および a, b, c を同時に入れ換えたものの和をとることを意味する。

§4. 一様乱れ

場が一様であるとき，2次および3次の相関々数に対して次のようなテンソル関数を導入すると便利である。

2次の相関々数に対し，

$$S(k) = \langle T(k) T(p) \rangle / \delta(k+p) \quad (14a)$$

$$S_a(k) = \langle T(k) U_a(p) \rangle / \delta(k+p) \quad (14b)$$

$$S_{ab}(k) = \langle U_a(k) U_b(p) \rangle / \delta(k+p) \quad (14c)$$

3次の相関々数に対し，

$$T(k, p) = \langle T(k) T(p) T(q) \rangle / \delta(k+p+q) \quad (15a)$$

$$T_a(k, p) = \langle T(k) T(p) U_a(q) \rangle / \delta(k+p+q) \quad (15b)$$

$$T_{ab}(k, p) = \langle T(k) U_a(p) U_b(q) \rangle / \delta(k+p+q) \quad (15c)$$

$$T_{abc}(k, p) = \langle U_a(k) U_b(p) U_c(q) \rangle / \delta(k+p+q) \quad (15d)$$

さらに，(10) ~ (13) 式の右辺にあらわれる4次の相関々数を2次の相関と4次のキュムラントであらわしておくと，(7) ~ (13) 式は次のように書き換えることができる。

A. 2次相関

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + 2\chi k^2 \right] S(k) = -i k_m \int dP [T_m(-k, -P) - T_m(k, P)] \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t} + (\chi + \nu) k^2 \right] S_a(k) = & \beta g \Delta_{a3}(k) S(k) \\ & - \frac{i}{2} \int dP [2k_m T_{am}(-P, -k) - P_{alm}(k) T_{lm}(k, P)] \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu k^2 \right] S_{ab}(lk) &= \beta g \left[\Delta_{a3}(lk) S_b(lk) + \Delta_{b3}(lk) S_a(-lk) \right] \\ &\quad - \frac{i}{2} \int dP \left[P_{alm}(lk) T_{blm}(-lk, -P) - P_{blm}(lk) T_{alm}(lk, P) \right] \end{aligned} \quad (18)$$

B. 3次相関

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t} + \chi(k^2 + p^2 + q^2) \right] T(lk, P) &= -i \sum_{(k, p, q)} k_m \left[S(p) S_m(q) + S(q) S_m(p) \right] \\ &\quad + (4\text{次キユムラント}) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t} + \chi(k^2 + p^2) + \nu q^2 \right] T_a(lk, P) &= \beta g \Delta_{a3}(q) T(lk, P) \\ &\quad - i \left\{ \sum_{(k, p)} k_m \left[S(p) S_{am}(q) + S_m(p) S_a(-q) \right] + P_{alm}(q) S_l(lk) S_m(p) \right\} \\ &\quad + (4\text{次キユムラント}) \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t} + \chi k^2 + \nu(p^2 + q^2) \right] T_{ab}(lk, P) &= \beta g \sum_{\substack{(p, q) \\ (a, b)}} \Delta_{a3}(P) T_b(lk, P) \\ &\quad - i \left\{ k_m \left[S_a(p) S_{bm}(q) + S_b(-q) S_{am}(p) \right] + \sum_{\substack{(p, q) \\ (a, b)}} P_{alm}(P) S_l(lk) S_{bm}(q) \right\} \\ &\quad + (4\text{次キユムラント}) \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t} + \nu(k^2 + p^2 + q^2) \right] T_{abc}(lk, P) &= \beta g \sum_{\substack{(k, p, q) \\ (a, b, c)}} \Delta_{a3}(k) T_{bc}(lk, P) \\ &\quad - i \sum_{\substack{(k, p, q) \\ (a, b, c)}} P_{alm}(k) S_{bl}(p) S_{cm}(q) + (4\text{次キユムラント}) \end{aligned} \quad (22)$$

§5. 軸対称乱れ

軸対称性がある場合，前節で定義したテンソル関数は波数ベクトルの絶対値および対称軸と波数ベクトル間の角度を独立変数とするいくつかのスカラー関数で表現できることが知られている。⁶⁾鉛直上方を x_3 軸とし，それに垂直な2つの軸を x_1, x_2 とする座標系を用いると2次相関関数は，

$$S(lk) = S_0(k, \mu) \quad (23a)$$

$$S_a(lk) = \Delta_{a3}(lk) S_1(k, \mu) \quad (23b)$$

$$S_{ab}(lk) = \Delta_{ab}(lk) S_1(k, \mu) + \Delta_{a3}(lk) \Delta_{b3}(lk) S_2(k, \mu) \quad (23c)$$

ここで μ は x_3 軸と波数ベクトル lk のなす角度の \cos である。

等方性乱流ではスカラー関数の μ 依存性はなく， $S(k, \mu)$ $S_2(k, \mu)$ も存在しなかった。

3次の相関関数についてもスカラー関数での表現は可能であるがここでは直接必要としないので省略する。

(a) エネルギースペクトル

流体の単位質量あたりの運動エネルギーは，

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle u_j(x) u_j(x) \rangle &= \frac{1}{2} \int S_{jj}(lk) dlk \\ &= \int_0^\infty \int_1^1 dk d\mu 2\pi k^2 \left[S_1(k, \mu) + \frac{1}{2} (1-\mu^2) S_2(k, \mu) \right] \end{aligned}$$

であるから，角度が μ である方向のエネルギースペクトルは，

$$E(k, \mu) = 2\pi k^2 \left[S_1(k, \mu) + \frac{1}{2}(1-\mu^2) S_2(k, \mu) \right] \quad (24)$$

と書けることがわかる。

(b). 積分について

2次相関に関する(16)~(18)式の右辺に現れる波数 P の積分について考察しておく。一様軸対称性が成り立つ場合、被積分関数は P の大きさ、 k と P の間の角度および対称軸と P の間の角度の関数である。しかし、波数ベクトル k , P , q の間には、

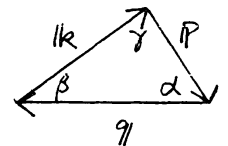
$$k + P + q = 0 \quad (25)$$

の関係があるので、 k と P の間の角度の代わりに q の大きさ β を使うことができる。したがって P の積分は、

$$\int dP \bar{H}(k, \mu; P, \beta, \mu') = 2 \int_{\Delta} d\mu' \frac{P\beta}{k} \frac{H(k, \mu; P, \beta, \mu')}{\sqrt{(1-\mu^2)(1-z^2) - (\mu+z\mu')^2}} \quad (26)$$

のように書ける。ここで、 z は図のように k , P , q がつくる三角形の角度 γ の cosine である。

$$z = \frac{1}{2kP} (k^2 + P^2 - q^2) \quad \dots (27)$$



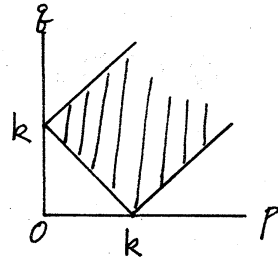
また、

$$P_{\pm}(z) = \pm \sqrt{(1-\mu^2)(1-z^2)} - \mu z \quad (28)$$

である。 β , γ の積分領域 Δ は $|z| \leq 1$ であるから、

$$|k-p| \leq \xi \leq k+p \quad \dots (29)$$

すなわち Δ は図の斜線の領域である。



§6. Markovian 近似

閉じた方程式系を得るには3次相関の方程式(19)~(22)の右辺にある4次キユムラントの項を2次相関または3次相関で表現する必要がある。等方性乱流において閉じた方程式系をつくるための方法はいろいろと考えられているが、こゝではいわゆる eddy-damped Markovian 近似 (EDMA) を使うことにする。この方法は準正規理論を Markov 化したものの拡張であるが、その拡張の仕方には理論的根拠はない。我々がこの方法を用いる理由は簡単さと等方性乱流を良く近似しているということにある。

EDMA による Boussinesq 流の一様軸対称性乱流の閉じた方程式系は次のようになる。

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + 2\chi k^2 \right] S_0(k) = i \int dP k_m [T_m(k, P) - T_m(-k, -P)] \quad (30)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\chi + \nu) k^2 \right] S(k) = \beta g S_0(k)$$

$$+ \frac{i}{2 \Delta_{33}(k)} \int dP [P_{32m}(k) T_{2m}(k, P) - 2k_m T_{3m}(-k, -P)] \quad (31)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu k^2 \right] S_1(k) = \frac{i}{2} \int dP \left\{ P_{alm}(lk) [T_{alm}(lk, P) - T_{alm}(-lk, -P)] \right. \\ \left. - \frac{1}{\Delta_{33}(lk)} P_{3lm}(lk) [T_{3lm}(lk, P) - T_{3lm}(-lk, -P)] \right\} \quad (32)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu k^2 \right] S_2(k) = \beta g \Delta_{33}(lk) [S(k) + S(-k)] \\ - \frac{i}{2 \Delta_{33}(lk)} \int dP \left\{ P_{alm}(lk) [T_{alm}(lk, P) - T_{alm}(-lk, -P)] \right. \\ \left. - \frac{2}{\Delta_{33}(lk)} P_{3lm}(lk) [T_{3lm}(lk, P) - T_{3lm}(-lk, -P)] \right\} \quad (33)$$

ここで, $S_0(k)$, $S(k)$, $S(-k)$ 等と略記したか。これらは $S_0(k, \mu)$, $S(k, \mu)$, $S(k, -\mu)$ のことである。 $S_1(k)$, $S_2(k)$ についても同様である。以後スカラー関数の表示はこのように記すことにする。

Markovian 近似を使って 3 次相関は次のように書くことができる。

$$T(lk, lP, t) = -i \theta^{(0)}(k, P, \mathcal{P}; t) \sum_{(k, P, \mathcal{P})} \left[A_3(k, \mathcal{P}) S_0(P) S(\mathcal{P}) + A_3(k, P) S_0(\mathcal{P}) S(P) \right] \quad (34)$$

$$T_a(lk, lP, t) = \theta^{(1)}(k, P, \mathcal{P}; t) \left\{ \beta g \Delta_{a3}(\mathcal{P}) T(lk, P) - i \left[B_{a33}(k, k, P) S(k) S(P) \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{(k, P)} \left\{ A_a(k, \mathcal{P}) S_0(P) S_1(k) + A'_{3a}(k, \mathcal{P}, \mathcal{P}) S_0(P) S_2(k) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + A'_{3a}(k, P, \mathcal{P}) S(P) S(-\mathcal{P}) \right\} \right] \right\} \quad (35)$$

$$\begin{aligned}
T_{ab}(k, p, t) = & \theta^{(2)}(k, p, \xi, t) \left\{ \sum_{\substack{(p, \xi) \\ (a, b)}} \beta g \Delta_{a3}(p) T_b(k, p) \right. \\
& - i \left[A'_{ba}(k, p, \xi) S(-p) S_1(\xi) + A_{ba}^2(k, p, \xi) S(-p) S_2(\xi) \right. \\
& \left. \left. + \sum_{\substack{(p, \xi) \\ (a, b)}} \left\{ B_{a3b}(p, k, \xi) S(k) S_1(\xi) + B'_{a3b}(p, k, \xi) S(k) S_2(\xi) \right\} \right] \right\} \quad (36)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{abc}(k, p, t) = & \theta^{(3)}(k, p, \xi, t) \sum_{\substack{(k, p, \xi) \\ (a, b, c)}} \left\{ \beta g \Delta_{a3}(k) T_{bc}(k, p) \right. \\
& - i \left[B_{abc}(k, p, \xi) S_1(p) S_1(\xi) + B'_{abc}(k, p, \xi) S_1(p) S_2(\xi) \right. \\
& \left. \left. + B_{ac'b}(k, p, \xi) S_1(\xi) S_2(p) + B_{abc}^2(k, p, \xi) S_2(p) S_2(\xi) \right] \right\} \quad (37)
\end{aligned}$$

こゝで、係数 A, B は

$$A_a(k, p) = k_m \Delta_{am}(p)$$

$$A'_{ba}(k, p, \xi) = k_m \Delta_{mb}(p) \Delta_{a3}(\xi)$$

$$A_{ba}^2(k, p, \xi) = k_m \Delta_{m3}(p) \Delta_{b3}(p) \Delta_{a3}(\xi)$$

$$B_{abc}(k, p, \xi) = \rho_{abm}(k) \Delta_{lb}(p) \Delta_{mc}(\xi)$$

$$B'_{abc}(k, p, \xi) = \rho_{abm}(k) \Delta_{lb}(p) \Delta_{m3}(\xi) \Delta_{c3}(\xi)$$

$$B_{abc}^2(k, p, \xi) = \rho_{abm}(k) \Delta_{l3}(p) \Delta_{b3}(p) \Delta_{m3}(\xi) \Delta_{c3}(\xi)$$

である。渦粘性係数 $\theta^{(i)}(k, p, \xi, t)$ ($i = 0, 1, 2, 3$) は、

$$\theta^{(i)}(k, p, \xi, t) = \int_0^t \exp\left[-\int_s^t \{\gamma^{(i)}(k, r) + \xi^{(i)}(p, r) + \zeta^{(i)}(\xi, r)\} dr\right] ds \quad (39)$$

のように書くことができる。⁷⁾ こゝで、 $\gamma^{(i)}$, $\xi^{(i)}$, $\zeta^{(i)}$ の関数形

は理論的には決定できないが、(19) ~ (22)式の左辺の分子粘性係数と比較するなら $i = 0$ および 3 に対応する γ, δ, ϵ は等しくとることができると考えられるか、 $i = 2$ および 1 に対応する関数形は異なるものを選ぶ必要があるであろう。

関数 γ, δ, ϵ の型は直感的方法によって選ぶわけであるが、それらが既知関数または2次の相関々数で表わすことができれば(30) ~ (39)式は閉じた方程式系をつくることになる。

§7. おわりに

$\gamma^{(k)}, \delta^{(p)}, \epsilon^{(q)}$ の選び方は等方性乱流の場合にほらって行い数値計算をする予定である。通常の流体における等方性乱流では2次相関のスカラー関数は1つであるが我々の場合4つある。分子粘性が熱伝導率 κ に比例する場合に対応する γ, δ, ϵ は温度・温度相関の S_0 を使い、流れの動粘性率 ν に比例する場合は S_1 および S_2 を使えば良いであろう。

浮力項 ($\beta\theta$ に比例する項) が小さく、等方性からのずれが小さい場合、微小量の2次のオーダーを無視すれば方程式系はかぎり簡単化される。このような立場から等方性乱流の構造を見直してみるのも意義のあることかもしれない。

References

- 1) G. K. Batchelor : J. Fluid Mech. 5 (1959) 113.
- 2) G. K. Batchelor, I. D. Howells and A. A. Townsend :
J. Fluid Mech. 5 (1959) 134.
- 3) J. R. Herring : Phys. Fluids 19 (1974) 167.
- 4) U. Schumann and J. R. Herring : J. Fluid Mech.,
76 (1976) 755
- 5) L. D. ランダウ, E. M. リフシッツ : 流体力学 1, 東京図書
P. 231 (1970)
- 6) G. K. Batchelor : Proc. Roy. Soc. A, 186 (1946) 480.
- 7) S. Orszag : Fluid Dynamics, Les Houches 1973, ed. R.
Balian and J. L. Peube (Gordon and Breach, New York
1977) p. 312