数理解析研究所講究録
第 435 巻 1981 年 145-157

Taylor渦流の模型方程式

広島大 理　　八幡英雄

§1. はじめに

同軸円筒間に流体をいれ，内側の円筒の角速度Ωを次第に増加させていくと，はじめ流れは方位角方向の一様流であるが，或る角速度Ω_cでトーラス状の定常Taylor渦流がこれに重畳して現われ，これはより大きなΩで方位角方向に伝播する規則的な波動を伴うようになり，さらに大きなΩでこの波動は乱れて流れは乱流状態になる。この体系に対しては1923年のG.I. Taylorによる研究以来，外力型流体力学的不安定性を示す現象の一つの典型として，多くの研究結果が蓄積されてきたが，[1),2)] 近年流速測定技術の進歩に伴い渦流の時間的変動の精密な測定がいくつかのグループによって行われるようになった。[3)~6)] 筆者はこの現象の記述を目的とした模型方程式系の構成を試み，昨年(1980年)1月の研究会で一つの試みを報告したが，[7),8)] その後これを拡張した模型について計算を行ったの

で，以下に報告する。[9)]

§2．模型方程式の導出

内外円筒の半径をR_1，R_2として，円筒の軸方向の長さは無限大とする。以下現われる物理量は長さ$d=R_2-R_1$，時間d^2/ν（νは動粘性率）を尺度として無次元化されている。また円筒座標の動径・方位角・軸方向成分を，それぞれr，θ，zとする。Taylor渦流の周期的構造を考慮して，方位角方向一様流に対する乱れの速度$\boldsymbol{u}(u_r, u_\theta, u_z)$および圧力$p$を次のように展開する：

$$u_r(r,\theta,z,t)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{\epsilon=\pm}(A_{l,m}^{\epsilon})^{-1}\,u_{l,m}^{\epsilon}(r,t)\,\chi_{l,m}^{\epsilon\,\prime}(z)\,e^{im\theta},$$

$$u_\theta(r,\theta,z,t)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{\epsilon=\pm}(A_{l,m}^{\epsilon})^{-1}\,v_{l,m}^{\epsilon}(r,t)\,\chi_{l,m}^{\epsilon\,\prime}(z)\,e^{im\theta},$$

$$u_z(r,\theta,z,t)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{\epsilon=\pm}w_{l,m}^{\epsilon}(r,t)\,\chi_{l,m}^{\epsilon}(z)\,e^{im\theta},$$

$$p(r,\theta,z,t)/\rho=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{\epsilon=\pm}(A_{l,m}^{\epsilon})^{-1}\,\Pi_{l,m}^{\epsilon}(r,t)\,\chi_{l,m}^{\epsilon\,\prime}(z)\,e^{im\theta},\quad(1)$$

但し　$\chi_{l,m}^{+}(z)=-\sqrt{2}\,\exp[i\,\delta_m^{+}(z)]\sin laz$，$\chi_{l,m}^{-}(z)=-\sqrt{2}\,\times\exp[i\,\delta_m^{-}(z)]\cos laz$，$(A_{l,m}^{\epsilon})^2=\lim_{L\to\infty}(2L)^{-1}\int_{-L}^{L}|\chi_{l,m}^{\epsilon\,\prime}(z)|^2dz$，$\rho$は密度を示す。ここでTaylor渦の周期性は軸方向の波数aおよび方位角方向の波の数mによって特徴づけられている．位

相因子 $\exp[i\delta_m^\epsilon(z)]$ は方位角方向進行波動の位相が，Taylor渦流トーラスの上側と下側で異なる効果を表わすため導入したもので，実験を参考として,[3),10)] $\delta_m^+(z)=\frac{\pi}{2}\cos az$ $(m\neq 0)$，$\delta_0^+(z)=0$ $(m=0)$ の形に仮定した。以下で l, m, ϵ によって指定されるモードを表わすため，まとめて $(l,m)^\epsilon$ とかくことにする。

(1) を Navier−Stokes および連続の方程式に代入して各モードに対する方程式を導びき，$w_{l,m}^\epsilon(r,t)$ および $\Pi_{l,m}^\epsilon(r,t)$ を消去して，I と同様に変数 $u_{l,m}^\epsilon(r,t)$，$v_{l,m}^\epsilon(r,t)$ に対する連立偏微分方程式系を得る。次に動径変数を $r=\frac{1}{2}(R_1+R_2)+(R_2-R_1)x$ により新変数 x $(|x|<1/2)$ を用いて表わし，$u_{l,m}^\epsilon(r,t)$，$v_{l,m}^\epsilon(r,t)$ をそれぞれ同じ境界条件を満たす直交函数系 $\{\phi_{1,j}(x)\}$，$\{\phi_{2,j}(x)\}$ で展開する：

$$u_{l,m}^\epsilon(r,t)=\sigma(x)^{-1/2}\sum_{j=1}^{N}\hat{\alpha}_\lambda^j(t)\,\phi_{1,j}(x),$$

$$v_{l,m}^\epsilon(r,t)=\sigma(x)^{-1/2}\sum_{j=1}^{N}\hat{\beta}_\lambda^j(t)\,\phi_{2,j}(x), \qquad (2)$$

ただし $\sigma(x)=1+2\kappa x$，$\kappa=(R_2-R_1)/(R_1+R_2)$．ここで Galerkin 法を用いて各モード $\lambda=(l,m)^\epsilon$ に対する上述の偏微分方程式系を，振幅 $\hat{\alpha}_\lambda(t)$，$\hat{\beta}_\lambda(t)$ の時間発展を記述する常微分方程式系

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \mathbb{B}^{\lambda}_{11} & \mathbb{B}^{\lambda}_{12} \\ \mathbb{B}^{\lambda}_{21} & \mathbb{B}^{\lambda}_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{\alpha}_{\lambda} \\ \hat{\beta}_{\lambda} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbb{A}^{\lambda}_{11} & \mathbb{A}^{\lambda}_{12} \\ \mathbb{A}^{\lambda}_{21} & \mathbb{A}^{\lambda}_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{\alpha}_{\lambda} \\ \hat{\beta}_{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}^{\lambda}_{1} \\ \mathbb{P}^{\lambda}_{2} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

で近似する．この式はIの(13)式に相当し，$\hat{\alpha}_{\lambda}$，$\hat{\beta}_{\lambda}$，$\mathbb{A}^{\lambda}_{ij}$，$\mathbb{B}^{\lambda}_{ij}$，$\mathbb{P}_{i}$（$1 \leq i, j \leq 2$）の定義は，(1)における位相因子のために$m \neq 0$のとき$a^2$，$a^4$などが異なった値をとる他は，Iと同じである．次に(3)の左より（$\mathbb{B}^{\lambda}_{ij}$）の逆行列（$\mathbb{B}^{\lambda I}_{ij}$）をかければ，正規型の方程式に帰着される：

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \hat{\alpha}_{\lambda} \\ \hat{\beta}_{\lambda} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbb{C}^{\lambda}_{11} & \mathbb{C}^{\lambda}_{12} \\ \mathbb{C}^{\lambda}_{21} & \mathbb{C}^{\lambda}_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{\alpha}_{\lambda} \\ \hat{\beta}_{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{Q}^{\lambda}_{1} \\ \mathbb{Q}^{\lambda}_{2} \end{pmatrix}, \qquad (4)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbb{C}^{\lambda}_{11} & \mathbb{C}^{\lambda}_{12} \\ \mathbb{C}^{\lambda}_{21} & \mathbb{C}^{\lambda}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{B}^{\lambda I}_{11} & \mathbb{B}^{\lambda I}_{12} \\ \mathbb{B}^{\lambda I}_{21} & \mathbb{B}^{\lambda I}_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbb{A}^{\lambda}_{11} & \mathbb{A}^{\lambda}_{12} \\ \mathbb{A}^{\lambda}_{21} & \mathbb{A}^{\lambda}_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbb{Q}^{\lambda}_{1} \\ \mathbb{Q}^{\lambda}_{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{B}^{\lambda I}_{11} & \mathbb{B}^{\lambda I}_{12} \\ \mathbb{B}^{\lambda I}_{21} & \mathbb{B}^{\lambda I}_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbb{P}^{\lambda}_{1} \\ \mathbb{P}^{\lambda}_{2} \end{pmatrix} \qquad (5)$$

ここで$\hat{\alpha}_{\lambda}$，$\hat{\beta}_{\lambda}$を各々$\mathbb{C}^{\lambda}_{11}$，$\mathbb{C}^{\lambda}_{22}$を対角化する表示で考える（この変換は必ずしも必要ではない）．変換

$$e_{p,\lambda j}(x) = \sum_{k=1}^{N} U^{(p)}_{\lambda j,k}\ \phi_{p,k}(x),\quad j=1,\cdots,N;\ p=1,2, \qquad (6)$$

において，ベクトル$(U^{(p)}_{\lambda j,1}, \cdots, U^{(p)}_{\lambda j,N})$を固有値方程式$\sum_{\ell=1}^{N} (\mathbb{C}^{\lambda}_{pp})_{k\ell}\, U^{(p)}_{\lambda j,\ell} = \mu_{p,\lambda j}\, U^{(p)}_{\lambda j,k}$（$k = 1, \cdots, N$）の$j$番目の固有ベクトルとして定義する．同様にして随伴固有ベクトル

$(\tilde{U}^{(p)}_{\lambda j,1},\cdots,\tilde{U}^{(p)}_{\lambda j,N})$ を固有値方程式 $\sum_{k=1}^{N}\tilde{U}^{(p)}_{\lambda j,k}(\mathbb{C}^{\lambda}_{pp})_{k\ell}=\mu_{p,\lambda j}\times\tilde{U}^{(p)}_{\lambda j,\ell}$ $(\ell=1,\cdots,N)$ の固有ベクトルとして定義する．この場合直交関係は $\sum_{k=1}^{N}\tilde{U}^{(p)}_{\lambda i,k}U^{(p)}_{\lambda j,k}=E^{(p)}_{\lambda i}\,\delta_{ij}$，$\sum_{j=1}^{N}U^{(p)}_{\lambda j,k}\tilde{U}^{(p)}_{\lambda j,\ell}/E^{(p)}_{\lambda j}=\delta_{k,\ell}$ となる．これらの変換を用いると，(4)は変数 $\xi^{(1)}_{\lambda i}=\sum_{k=1}^{N}\tilde{U}^{(1)}_{\lambda i,k}\hat{\alpha}^{k}_{\lambda}/E^{(1)}_{\lambda i}$，$\xi^{(2)}_{\lambda i}=\sum_{k=1}^{N}U^{(2)}_{\lambda i,k}\hat{\beta}^{k}_{\lambda}/E^{(2)}_{\lambda i}$ に対する方程式系（ $\lambda=(\ell,m)^{\epsilon}$，$\ell\neq 0$ として）

$$\frac{d}{dt}\xi^{(1)}_{\lambda i}+\mu_{1,\lambda i}\xi^{(1)}_{\lambda i}+\sum_{j=1}^{N}M_{\lambda i,\lambda j}\xi^{(2)}_{\lambda j}=\sum_{\lambda'\lambda''p'p''j'j''}U^{1\,p'\,p''}_{\lambda i;\lambda'j',\lambda''j''}\,\xi^{(p')}_{\lambda'j'}\,\xi^{(p'')}_{\lambda''j''},$$

$$\frac{d}{dt}\xi^{(2)}_{\lambda i}+\sum_{j=1}^{N}N_{\lambda i,\lambda j}\xi^{(1)}_{\lambda j}+\mu_{2,\lambda i}\xi^{(2)}_{\lambda i}=\sum_{\lambda'\lambda''p'p''j'j''}U^{2\,p'\,p''}_{\lambda i;\lambda'j';\lambda''j''}\,\xi^{(p')}_{\lambda'j'}\,\xi^{(p'')}_{\lambda''j''},\qquad(7)$$

$(i=1,\cdots,N_{\lambda})$

となる．ただし $M_{\lambda i,\lambda j}=\sum_{k,\ell=1}^{N_\lambda}\tilde{U}^{(1)}_{\lambda i,k}(\mathbb{C}^{\lambda}_{12})_{k\ell}U^{(2)}_{\lambda j,\ell}/E^{(1)}_{\lambda i}$，$N_{\lambda i,\lambda j}=\sum_{k,\ell=1}^{N_\lambda}\tilde{U}^{(2)}_{\lambda i,k}(\mathbb{C}^{\lambda}_{21})_{k\ell}U^{(1)}_{\lambda j,\ell}/E^{(2)}_{\lambda i}$ である．一方モード $\nu=(0,0)^{+}$ に対しては，次の $\xi^{(2)}_{\nu,i}$ に対する方程式を得る（ここで $\xi^{(1)}_{\nu,i}\equiv 0$ に注意）：

$$\frac{d}{dt}\xi^{(2)}_{\nu,i}+\mu_{2,\nu i}\xi^{(2)}_{\nu,i}=\sum_{\lambda'\lambda''p'p''j'j''}U^{2\,p'\,p''}_{\nu i;\lambda'j';\lambda''j''}\xi^{(p')}_{\lambda'j'}\xi^{(p'')}_{\lambda''j''}.$$

$(i=1,\cdots,N_{\nu})\qquad(8)$

これらの方程式の右辺にあらわれる対称化されたモード結合係数 $U^{p\,p'\,p''}_{\lambda j;\lambda' j';\lambda'' j''}$ のあらわな形は次のように与えられる。まず $\lambda, \lambda', \lambda''$ がそれぞれモード $(l,m)^{\epsilon}$, $(l',m')^{\epsilon'}$, $(l'',m'')^{\epsilon''}$ を示すとすると,

$$U^{p\,p'\,p''}_{\lambda j;\lambda' j';\lambda'' j''} = \frac{1}{E^{(p)}_{\lambda j}} \sum_{h,k,s,t=1}^{N_\lambda, N_\lambda, N_{\lambda'}, N_{\lambda''}} \tilde{U}^{(p)}_{\lambda j,h} \Big\{ (\mathbb{B}^{\lambda I}_{p1})_{hk} (\mathbb{R}^{1\,p'\,p''}_{\lambda;\lambda',\lambda''})_{k;s,t} + (\mathbb{B}^{\lambda I}_{p2})_{hk} (\mathbb{R}^{2\,p'\,p''}_{\lambda;\lambda',\lambda''})_{k;s,t} \Big\} U^{(p')}_{\lambda' j',s}\, U^{(p'')}_{\lambda'' j'',t}\,, \qquad (9)$$

ここで, $1 \le p, p', p'' \le 2$; $1 \le j \le N_\lambda$, $1 \le j' \le N_{\lambda'}$, $1 \le j'' \le N_{\lambda''}$. $l l' l'' \neq 0$ の場合に, $(\mathbb{R}^{p\,p'\,p''}_{\lambda;\lambda',\lambda''})_{k;s,t}$ の形は,

$$N^{n\,n'\,n''}_{\lambda\lambda'\lambda''} = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} \frac{d^n \chi^*_\lambda}{dz^n} \frac{d^{n'} \chi_{\lambda'}}{dz^{n'}} \frac{d^{n''} \chi_{\lambda''}}{dz^{n''}}\, dz\,, \qquad (10)$$

$C_{\lambda\lambda'\lambda''} = -\delta_{m,m'+m''} A_\lambda/(A_{\lambda'} A_{\lambda''})$ を用いて次のように表わされる:

$$(\mathbb{R}^{111}_{\lambda;\lambda',\lambda''})_{k;s,t} = C_{\lambda\lambda'\lambda''} \Big[(N^{111}_{\lambda\lambda'\lambda''} - N^{120}_{\lambda\lambda'\lambda''}) M^{(1)}_{kst} + (N^{111}_{\lambda\lambda'\lambda''} - N^{102}_{\lambda\lambda'\lambda''}) M^{(1)}_{kts} - 4k N^{111}_{\lambda\lambda'\lambda''} M^{(6)}_{kst} - (N^{001}_{\lambda\lambda'\lambda''} + N^{010}_{\lambda\lambda'\lambda''}) M^{(3)}_{kst} + N^{010}_{\lambda\lambda'\lambda''} M^{(2)}_{skt} + N^{001}_{\lambda\lambda'\lambda''} M^{(2)}_{tks} \Big],$$

$$(\mathbb{R}^{112}_{\lambda;\lambda',\lambda''})_{k;s,t} = i2k\, C_{\lambda\lambda'\lambda''} \Big[(m' N^{111}_{\lambda\lambda'\lambda''} - m'' N^{120}_{\lambda\lambda'\lambda''}) M^{(10)}_{tsk} + m'' N^{010}_{\lambda\lambda'\lambda''} (M^{(11)}_{skt} - 4k M^{(13)}_{skt}) + \{ (m' - m'') N^{001}_{\lambda\lambda'\lambda''} - m'' N^{010}_{\lambda\lambda'\lambda''} \} M^{(12)}_{tsk} \Big],$$

$$(\mathbb{R}^{121}_{\lambda;\lambda',\lambda''})_{k;s,t} = i2k\, C_{\lambda\lambda'\lambda''} \Big[(m'' N^{111}_{\lambda\lambda'\lambda''} - m' N^{102}_{\lambda\lambda'\lambda''}) M^{(10)}_{stk} +$$

$m' N^{001}_{\lambda\lambda'\lambda''} (M^{(11)}_{tks} - 4\kappa M^{(13)}_{tks}) + \{(m''-m') N^{010}_{\lambda\lambda'\lambda''} - m' N^{001}_{\lambda\lambda'\lambda''}\} M^{(12)}_{stk}],$

$$(\mathbb{R}^{122}_{\lambda;\lambda',\lambda''})_{k;s,t} = -4\kappa C_{\lambda\lambda'\lambda''} [N^{111}_{\lambda\lambda'\lambda''} M^{(7)}_{stk} + \kappa(m'-m'')(m' N^{001}_{\lambda\lambda'\lambda''} - m'' N^{010}_{\lambda\lambda'\lambda''}) M^{(15)}_{kst}],$$

$$(\mathbb{R}^{211}_{\lambda;\lambda',\lambda''})_{k;s,t} = i2\kappa m C_{\lambda\lambda'\lambda''} [(N^{001}_{\lambda\lambda'\lambda''} + N^{010}_{\lambda\lambda'\lambda''}) M^{(12)}_{kst} - N^{010}_{\lambda\lambda'\lambda''} M^{(9)}_{stk} - N^{001}_{\lambda\lambda'\lambda''} M^{(9)}_{tsk}],$$

$$(\mathbb{R}^{212}_{\lambda;\lambda',\lambda''})_{k;s,t} = C_{\lambda\lambda'\lambda''} [N^{111}_{\lambda\lambda'\lambda''} M^{(4)}_{stk} - N^{102}_{\lambda\lambda'\lambda''} M^{(5)}_{stk} + 4\kappa^2 m \times \{((m'-m'') N^{001}_{\lambda\lambda'\lambda''} - m'' N^{010}_{\lambda\lambda'\lambda''}) M^{(15)}_{stk} + m'' N^{010}_{\lambda\lambda'\lambda''} (M^{(14)}_{skt} - 2\kappa M^{(16)}_{stk})\}],$$

$$(\mathbb{R}^{221}_{\lambda;\lambda',\lambda''})_{k;s,t} = C_{\lambda\lambda'\lambda''} [N^{111}_{\lambda\lambda'\lambda''} M^{(4)}_{tsk} - N^{120}_{\lambda\lambda'\lambda''} M^{(5)}_{tsk} + 4\kappa^2 m \times \{((m''-m') N^{010}_{\lambda\lambda'\lambda''} - m' N^{001}_{\lambda\lambda'\lambda''}) M^{(15)}_{tsk} + m' N^{001}_{\lambda\lambda'\lambda''} (M^{(14)}_{tks} - 2\kappa M^{(16)}_{tsk})\}],$$

$$(\mathbb{R}^{222}_{\lambda;\lambda',\lambda''})_{k;s,t} = i2\kappa C_{\lambda\lambda'\lambda''} [(m N^{111}_{\lambda\lambda'\lambda''} - m' N^{102}_{\lambda\lambda'\lambda''} - m'' N^{120}_{\lambda\lambda'\lambda''}) M^{(8)}_{stk} + 4\kappa^2 m(m'-m'')(m' N^{001}_{\lambda\lambda'\lambda''} - m'' N^{010}_{\lambda\lambda'\lambda''}) M^{(17)}_{stk}], \quad (11)$$

ただし $\lambda'=\lambda''$ の場合にはこれらの 1/2 を求める値とする．

次に一つのモードが $(0,0)^+$ である場合は，II に与えた表式と本質的には同じである．まず $\lambda=\lambda'=(l,m)^\epsilon$，$l \neq 0$，$\lambda''=(0,0)^+=\nu$ の場合，次のようになる：

$$(\mathbb{R}^{112}_{\lambda;\lambda,\nu})_{k;s,t} = -i2\kappa m (A^2_\lambda M^{(10)}_{tsk} + M^{(12)}_{tsk}),$$

$$(\mathbb{R}^{122}_{\lambda;\lambda,\nu})_{k;s,t} = 4\kappa (A^2_\lambda M^{(7)}_{stk} + \kappa m^2 M^{(15)}_{kst}),$$

$$(\mathbb{R}^{212}_{\lambda;\lambda,\nu})_{k;s,t} = -A^2_\lambda M^{(4)}_{stk} - 4\kappa^2 m^2 M^{(15)}_{stk},$$

$$(\mathbb{R}^{222}_{\lambda;\lambda,\nu})_{k;s,t} = -i2\kappa m (A^2_\lambda M^{(8)}_{stk} + 4\kappa^2 m^2 M^{(17)}_{stk}). \quad (12)$$

同様にして (8) の右辺の結合係数を考えると，$\mathbb{B}^{\nu\mathrm{I}}_{22} = E$（単位行列），他の成分は 0 であり；$\lambda'=(l,m)^\epsilon=\lambda$，$\lambda''=$

$(l,-m)^{\epsilon}=\lambda^{*}\quad(l\neq 0)$ として，

$$(\mathbb{R}^{212}_{\nu;\lambda,\lambda^*})_{k;s,t}=M^{(4)}_{skt}-4k\,M^{(7)}_{kts}$$

$$(\mathbb{R}^{221}_{\nu;\lambda,\lambda^*})_{k;s,t}=M^{(4)}_{tks}-4k\,M^{(7)}_{kst} \tag{13}$$

となる．式(11)−(13)における $M^{(n)}_{kij}$ $(n=1,\cdots,17)$ は，Galerkin基底函数の種々の形の3個の積を $(-1/2,\ 1/2)$ で積分したもので，$\langle F\rangle=\int_{-1/2}^{1/2}F(x)\,dx$ で定義すると次のように表わされる：

$$M^{(1)}_{kij}=\langle\sigma^{-1/2}\phi_{1,k}\phi_{1,i}(\hat{D}_*\phi_{1,j})\rangle,\quad M^{(2)}_{kij}=\langle\sigma^{-1/2}\phi_{1,k}(\hat{D}_*\phi_{1,i})(\hat{D}\hat{D}_*\phi_{1,j})\rangle,$$

$$M^{(3)}_{kij}=\langle\sigma^{-1/2}(\hat{D}_*\phi_{1,k})(\hat{D}_*\phi_{1,i})(\hat{D}_*\phi_{1,j})\rangle,\quad M^{(4)}_{kij}=\langle\sigma^{-1/2}\phi_{1,k}(\hat{D}_*\phi_{2,i})\phi_{2,j}\rangle,$$

$$M^{(5)}_{kij}=\langle\sigma^{-1/2}(\hat{D}_*\phi_{1,k})\phi_{2,i}\phi_{2,j}\rangle,\quad M^{(6)}_{kij}=\langle\sigma^{-3/2}\phi_{1,k}\phi_{1,i}\phi_{1,j}\rangle,$$

$$M^{(7)}_{kij}=\langle\sigma^{-3/2}\phi_{2,k}\phi_{2,i}\phi_{1,j}\rangle,\quad M^{(8)}_{kij}=\langle\sigma^{-3/2}\phi_{2,k}\phi_{2,i}\phi_{2,j}\rangle,$$

$$M^{(9)}_{kij}=\langle\sigma^{-3/2}\phi_{1,k}(\hat{D}\hat{D}_*\phi_{1,i})\phi_{2,j}\rangle,\quad M^{(10)}_{kij}=\langle\sigma^{-3/2}\phi_{2,k}\phi_{1,i}\phi_{1,j}\rangle,$$

$$M^{(11)}_{kij}=\langle\sigma^{-3/2}\phi_{1,k}(\hat{D}_*\phi_{1,i})(\hat{D}_*\phi_{2,j})\rangle,\quad M^{(12)}_{kij}=\langle\sigma^{-3/2}\phi_{2,k}(\hat{D}_*\phi_{1,i})(\hat{D}_*\phi_{1,j})\rangle,$$

$$M^{(13)}_{kij}=\langle\sigma^{-5/2}\phi_{1,k}(\hat{D}_*\phi_{1,i})\phi_{2,j}\rangle,\quad M^{(14)}_{kij}=\langle\sigma^{-5/2}\phi_{1,k}\phi_{2,i}(\hat{D}\phi_{2,j})\rangle,$$

$$M^{(15)}_{kij}=\langle\sigma^{-5/2}(\hat{D}_*\phi_{1,k})\phi_{2,i}\phi_{2,j}\rangle,\quad M^{(16)}_{kij}=\langle\sigma^{-7/2}\phi_{1,k}\phi_{2,i}\phi_{2,j}\rangle$$

$$M^{(17)}_{kij}=\langle\sigma^{-7/2}\phi_{2,k}\phi_{2,i}\phi_{2,j}\rangle.$$

§3．計算結果

多くの実験において，進行波動を伴ったTaylor渦流は，方位角方向の波の数mが或る定まった値を維持するようにして，Ωを次第に増加させ乱流状態まで到達させている．以下では

$m=4$ の場合について計算を行う．I－IIIにおいては波状渦流のモード $(1,4)^+$ を記述する最も単純な方程式系を扱った．それはモード $(1,4)^+$，$(0,0)^+$ からなる閉じた方程式系である．今度はこれを拡張して，軸対称Taylor渦流モード $(1,0)^+$，$(2,0)^+$ をも含め，モード $(1,4)^+$，$(1,0)^+$，$(2,0)^+$，$(0,0)^+$ で閉じた方程式系を構成する．そこにおいてモード間結合によって現われる非線型項の寄与を，Fig. 1 に示した．また模型を特徴づけるパラメタは，Fenstermacher－Swinney－Gollub (FSG) の実験[3]に倣って，$\eta=R_1/R_2=0.875$，$a=2.36$ とおいた．さらに体系の励起パラメタをReynolds数 $R_E=\Omega R_1 d/\nu$ を用いて，$r=R_E/(R_E)_c$ によって示す．ここで $(R_E)_c$ は定常Taylor渦流の発生する値で，今考えている条件下では $(R_E)_c=118.16$ である．実際の計算においてとり入れた動径基底函数の個数は，$N_{(1,4)^+}=N_{(1,0)^+}=N_{(2,0)^+}=6$，$N_{(0,0)^+}=8$ で，この切断の結果全体で実変数56の常微分方程式系となる．時間積分は4次のAdams－Bashforth，Adams-Moultonの予測子・修正子法によって行った．

以下に計算結果を，$r=(R_1+R_2)/2$ $(x=0)$ における動径方向流速 $\sum_{i=1}^{6}[\mathrm{Re}(\xi^{(1)}_{(1,4)i}\,e_{(1,4)i}(0))+\xi^{(1)}_{(1,0)i}\,e_{(1,0)i}(0)+\xi^{(1)}_{(2,0)i}\,e_{(2,0)i}]$ に対するパワースペクトル(PSD)によって示す．なおPSDはFFTによって求め，windowは用いて

いない．Fig. 2(a)に示すように$r=6.38$において運動は一つの基本振動数p_1からなる単純周期的運動であるが，$r=9.56$ [Fig. 2(b)]になると二つの基本振動数p_1, p_2からなる準周期的運動となる．ここでp_1はFSGの実験におけるω_1とよく値が一致するが，p_2はFSGにおけるω_3の大略2倍のところに現われている．さらにrを増加させていくと，次第に多くの和差振動数成分を励起しながら，或るrの値以上でスペクトル線幅の広がりが起り，運動は混沌的となる．どこでこれが起るかはPSDだけでは判別しがたいが，例えば軌道の相図を書かせてみるとよくわかる．Fig. 2(e)に示す$r=25.50$のPSDにおいてp_1には明らかに幅の広がりが起っているが，p_2は依然線スペクトルとして存続している．これは実験においても観測されている事実であるが，どちらの成分が線スペクトルとして存続するかは，実験条件によって異なるようである．[3),6)] またこの線スペクトルと連続スペクトルの併存は，種々の少数変数模型方程式系において見出されている(non-mixing chaos[11)], noisy periodicity[12)], phase coherence[13)]).
さらに大きなrの値においては，Fig 2(f)に示すように線スペクトルは消失して，全体が連続スペクトルとなっている．
以上この模型についての計算結果の概略を示したが，線幅の発生機構，現われる基本振動数の個数など，詳しい解析は今

後の課題である.

参考文献

1) D. Coles: J. Fluid Mech. 21 (1965) 385.

2) E. L. Koschmieder: Adv. Chem. Phys. 32 (1975) 109.

3) P. R. Fenstermacher, H. L. Swinney & J. P. Gollub: J. Fluid Mech. 94 (1979), 103.

4) R. W. Walden & R. J. Donnelly: Phys. Rev. Lett. 42 (1979) 301.

5) V. S. L'vov & A. A. Predtechensky: Preprint.

6) A. Bouabdallah & G. Cognet: in Laminar-Turbulent Transition ed. by R. Eppler & H. Fasel (Springer, 1980) p. 368.

7) 八幡英雄: 講究録 390「流れの不安定性と乱流」p. 1.

8) H. Yahata: Prog. Theor. Phys. Suppl. No. 64 (1978), 176; Prog. Theor. Phys. 61 (1979), 791; 64 (1980) 782. [各々 I, II, III と略記]

9) H. Yahata: Preprint.

10) M. Gorman & H. L. Swinney: Phys. Rev. Lett. 43 (1979) 1871.

11) K. Ito, T. Oono, H. Yamazaki & K. Hirakawa: Preprint.

12) E. N. Lorenz: in Proc. of the Nonlinear Dynamics Conference, New York Acad. of Sci.

13) D. Farmer, J. Crutchfield, H. Froehling, N. Packard & R. Shaw: Preprint.

Fig. 1

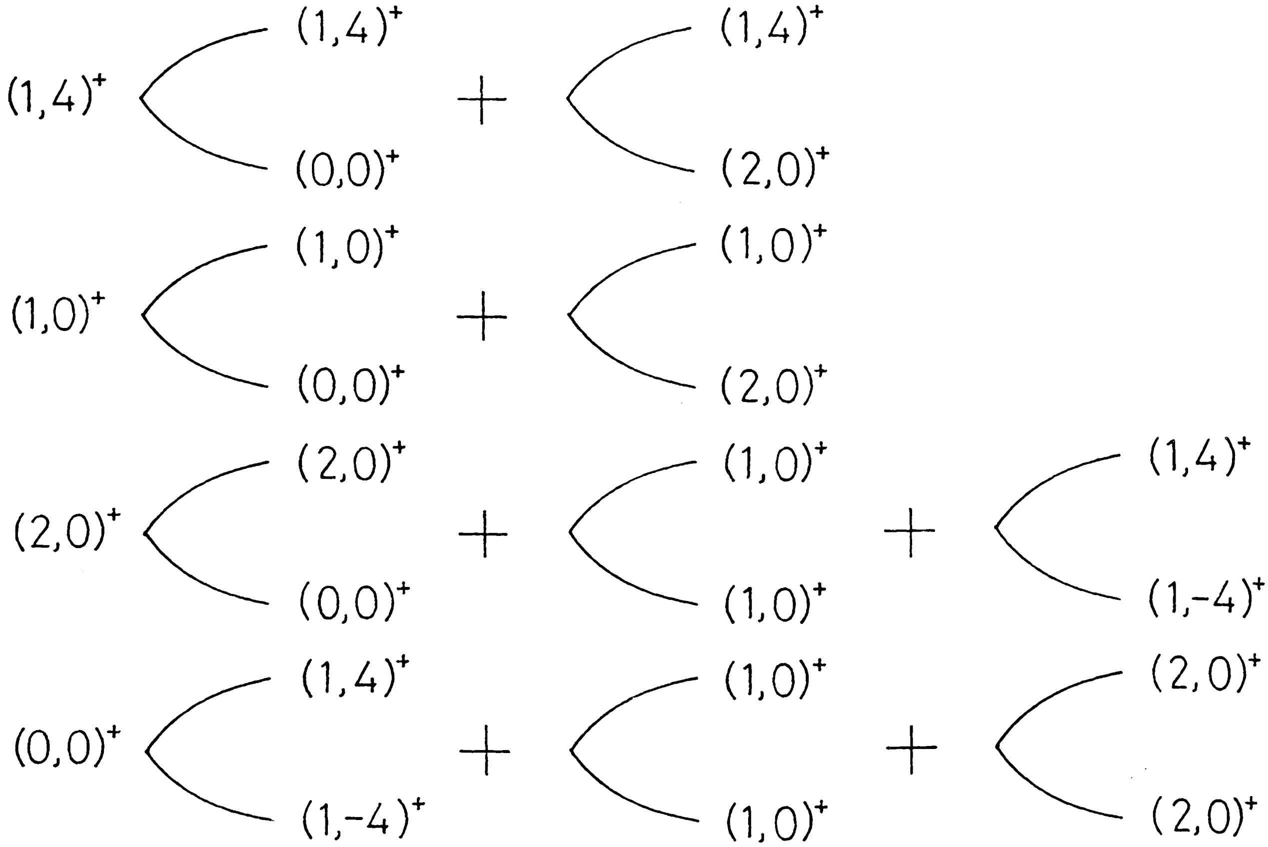
$(1,4)^+$
$(1,4)^+$
$(0,0)^+$
$(1,4)^+$
$(2,0)^+$
$(1,0)^+$
$(1,0)^+$
$(0,0)^+$
$(1,0)^+$
$(2,0)^+$
$(2,0)^+$
$(2,0)^+$
$(0,0)^+$
$(1,0)^+$
$(1,0)^+$
$(1,4)^+$
$(1,-4)^+$
$(0,0)^+$
$(1,4)^+$
$(1,-4)^+$
$(1,0)^+$
$(1,0)^+$
$(2,0)^+$
$(2,0)^+$

Fig. 2

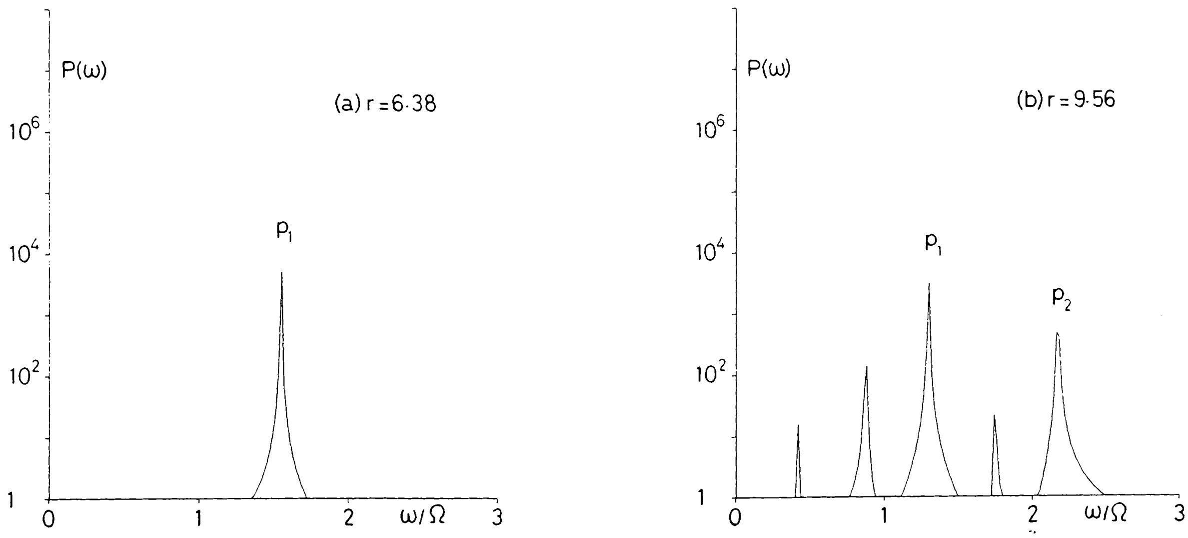
$P(\omega)$
(a) r = 6·38
10^6
10^4
10^2
1
p_1
0
1
2
3
ω/Ω
$P(\omega)$
(b) r = 9·56
10^6
10^4
10^2
1
p_1
p_2
0
1
2
3
ω/Ω

Fig. 2