数理解析研究所講究録
第440巻 1981年 2-10

C_K/D_KのGalois cohomologyについて

京大 理　片山 真一

Introduction。 kを有限次代数体，Kをkの有限次Galois拡大とする。また，$Gal(K/k)$をGで表し，C_KをKのidele類群とし，D_Kをその単位元の連結成分とする。この時，C_KのG-加群としてのp次cohomology群$H^p(G, C_K)$は，類体論のcohomologyによる証明において，重要な群で，任意の整数pに対し，

$$\text{(i)} \qquad H^p(G, C_K) \cong H^{p-2}(G, \mathbb{Z})$$

という関係をみたす。

同様に，D_Kのcohomology群も，Weil群の定義において重要な群で，任意の整数pに対し，次が成立する。

$$\text{(ii)} \qquad H^p(G, D_K) \cong \begin{cases} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r & (p: \text{even}) \\ 0 & (p: \text{odd}) \end{cases}$$

ただし，rは，Kで分岐するkの実素点の数である。

ここで，我々が問題にするのは，$H^p(G, C_K/D_K)$ の構造で，この構造を定めることも，C_K, D_K の場合と同じく整数論的な意味があると考えられる。

まず，分岐の数 $r=0$ の時は，完全系列
$1 \longrightarrow D_K \longrightarrow C_K \to C_K/D_K \longrightarrow 1$ に基く cohomology sequences と(i)，(ii)より，全ての整数 p に対し，

(iii) $H^p(G, C_K/D_K) \cong H^p(G, C_K) \cong H^{p-2}(G, \mathbb{Z})$

が，容易に得られる。

従って，以下の議論では，$r>0$ の場合に限る。この時，$[K:k]=n$ とおけば，n は偶数であり，$n=2m$ とおく。

最終的に得られた結果は，$p \geqq 0$ の場合で，まとめて書けば，

I) $H^0(G, C_K/D_K) \cong G/[G,G]N$

ただし，N は，次のような群とする。K で分岐する k の実素点を $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_r$ とする。$\mathfrak{p}_i$ の K への延長の1つを $\mathfrak{P}_i$ とし，$\mathfrak{P}_i$ の分解群を N_i とする時に，N は，$N=\langle N_i \mid 1 \leqq i \leqq r \rangle$ と，全ての N_i で生成した群を表す。

II) $H^{2p+2}(G, C_K/D_K) \cong H^{2p}(G, \mathbb{Z})/m \cdot H^{2p}(G, \mathbb{Z})$ $(p \geqq 0)$

ただし，$mH^{2p}(G, \mathbb{Z})$ は，$H^{2p}(G, \mathbb{Z})$ を加群と考えた時

各元のm倍で生成された群，即ち$\langle mx \mid x \in H^{2p}(G,\mathbb{Z}) \rangle$を示す。

III）$H^{2p+1}(G, C_K/D_K) \cong H^{2p-1}(G,\mathbb{Z}) \times M \quad (p \geqq 0)$

ただし，Mは，Gの2-Sylow群Sと，pによって，次のように分類される群，

a) $M \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{r-1}$ は次の場合

$p = 0$

または，Sが巡回群

または，Sが一般四元数群で，p : even の時

b) $M \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{r}$ その他。

§1. 証明の方針。

まず，Kのidele群$K_A^{\times}$の単位元の連結成分をH_Kとする。Eを Kの複素素点全体の集合とすると，H_Kの極大compact部分群H'_Kは，

$$H'_K = \{ x = (x_{\mathfrak{p}}) \in K_A^{\times} \mid x_{\mathfrak{p}} = 1 \text{ if } \mathfrak{p} \notin E, |x_{\mathfrak{p}}| = 1 \text{ if } \mathfrak{p} \in E \}$$

で，与えられる。

$K_A^{\times}$からCKへの自然な準同型をφとし，$\varphi(H'_K) = D'_K$とすると，$D'_K \subset D_K$で，次の完全系列が存在する。

$$(1) \quad 1 \longrightarrow H'_K \xrightarrow{\varphi} C_K \xrightarrow{\psi} C_K/D'_K \longrightarrow 1$$

(1)にもとづくcohomology sequencesにおいて，

$H^{2P+1}(G, H'_K)=0$ (for all $P\in\mathbb{Z}$) が成立するから，任意の整数Pに対し，次の完全系列が存在する。

$$(2)\quad 0 \longrightarrow H^{2P+1}(C_K) \xrightarrow{\Psi_*} H^{2P+1}(C_K/D'_K) \xrightarrow{\delta_*} H^{2P+2}(H'_K)$$
$$\xrightarrow{\varphi_*} H^{2P+2}(C_K) \xrightarrow{\Psi_*} H^{2P+2}(C_K/D'_K) \longrightarrow 0$$

ここで，G-加群Aに関して，$H^{g}(G, A)$を$H^{g}(A)$と略記した。

さらに，D_K/D'_Kは，実数体$\mathbb{R}$とSolenoid何個かの直積になることから，一意的に除法可能である。従って，

$1 \longrightarrow D_K/D'_K \longrightarrow C_K/D'_K \longrightarrow C_K/D_K \longrightarrow 1$ にもとづくcohomology sequencesより，次式を得る。

$$(3)\quad H^P(G, C_K/D_K) \cong H^P(G, C_K/D'_K) \text{ (for all } P\in\mathbb{Z})$$

従って，以下では，(3)の右辺の群の構造を決定する。

まず，(2)において，2行目のΨ_*は，onto map. ゆえ，

$$(4)\quad H^{2P+2}(C_K/D'_K) \cong H^{2P+2}(C_K)/\varphi_*(H^{2P+2}(H'_K))$$

を得る。同様に，1行目のΨ_*は，単射ゆえ，

(*)『$H^{2P+1}(C_K/D'_K)$は，$H^{2P+1}(C_K)$の$\delta_*(H^{2P+1}(C_K/D'_K))$による拡大になっている。』ことがわかる。

証明の大きな方針としては，この(4)，(*)の結果に，序文に書いた，良く知られた結果(i)，(ii)を代入するのであるが，その代入のためには，transfer homomorphism, restriction cup product 等のcohomologyの基本的な写像を用い

る。 次の section では，得られた結果を細かな証明は，省略して列挙する。

§3． 前§のH'_Kは$K_A^\times$の部分群ゆえ，$H^{2p}(G, H'_K)$は，$H^{2p}(G, K_A^\times)$の直和成分である。 従って，(4)のφ_*は，$H^{2p}(G, K_A^\times) \longrightarrow H^{2p}(G, C_K)$という準同型から導かれるから，次の定理は，明らかである。

定理1． 全ての整数pに対し，次の同型が成立する。

$$H^{2p+2}(G, C_K/D'_K) \cong H^{2p}(G, \mathbb{Z}) / \langle \tau^{N_i, G} H^{2p}(N_i, \mathbb{Z}) \mid 1 \leqq i \leqq r \rangle$$

ただし，$\tau^{N_i, G}$は，N_iからGへの transfer homomorphism。

ここで，$p = -1$とすることにより，自然に(I)が導かれる。

系1． Nを前と同様に，N_iで生成されるGの部分群とすると，　$H^0(G, C_K/D'_K) \cong G/[G, G]N$

次に(II)，(III)については，まず，GがAbel群の時を考える。ここで，N_iからGへの制限写像をρ^{G, N_i}とおくと，$p \geqq 0$に対し，　$H^{2p}(N_i, \mathbb{Z}) = \rho^{G, N_i} H^{2p}(G, \mathbb{Z})$が成立するので，　$\tau^{N_i, G} H^{2p}(N_i, \mathbb{Z}) = m H^{2p}(G, \mathbb{Z})$である。 従って(4)より，(II)が得られる。 Lyndon [5]．で示された$H^q(G, \mathbb{Z})$のAbel群としての構造により，(III)を言うためには，(*)での拡大が split すればよい。 これは，$H^{2p}(G, H'_K)$の nontrivialなcocycleの代表系を実際に書き下し，低次元の場合splitすることを示し，高次元の時には，cup積を用いて，低次元の結果を拡張することにより証明される。 以上の結果を，非Abel群Gにのばすために，次の補題を用意する。

補題1． 2^lをnを割る最大の2巾とし，Gの2-Sylow群をSで表す。 この時，$p \geqq 0$に対し，次は同値である。

$$H^{2p+2}(G, C_K/D'_K) \cong H^{2p}(G, \mathbb{Z})/m\, H^{2p}(G, \mathbb{Z})$$

$$\Longleftrightarrow H^{2p+2}(S, C_K/D'_K) \cong H^{2p}(S, \mathbb{Z})/2^{l-1} H^{2p}(S, \mathbb{Z})$$ 。

補題2． Gが位数2^lの一般四元数群の時，任意の整数pに対し，次が成立する。

$$H^{4p}(G, C_K/D'_K) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$$

$$H^{4p+1}(G, C_K/D'_K) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{r-1}$$

$$H^{4p+2}(G, C_K/D'_K) \cong \mathbb{Z}/2^{l-1}\mathbb{Z}$$

$$H^{4p+3}(G, C_K/D'_K) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{r}$$

以上の補題は，補題1は，transferと制限写像の相互関係，補題2は，一般四元数群のcohomological periodが4であることから導かれる。

定理2．　任意のGalois群G，正整数Pについて，次が成立する。

$$H^{2P+2}(G, C_K/D'_K) \cong H^{2P}(G, \mathbb{Z}) / m H^{2P}(G, \mathbb{Z})$$

証明)．　補題1より，Gは2-群としてよい。　Gが巡回群でも，一般四元数群でもない時は，各N_iに対し，$L_i \supset N_i$で，$L_i \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$であるようなGの部分群$L_i$が存在する。

この時，Abel群の時の結果と定理1により，

$$2H^{2P}(L_i, \mathbb{Z}) = \tau^{N_i, L_i} H^{2P}(N_i, \mathbb{Z}) = 0$$

$$\therefore \quad m H^{2P}(G, \mathbb{Z}) = \langle \tau^{N_i, G} H^{2P}(N_i, \mathbb{Z}) \mid 1 \leqq i \leqq r \rangle$$

$= 0$　従って，定理1とあわせて，証明できる。　また，Gが巡回群，一般四元数群の時は，それぞれ，Abel群の時の結果と，補題2により明らか。　以上で証明終わり。

系2．　任意の$P \geqq 0$に対し，次の同型が成立する。

$$H^{2P+1}(G, C_K/D'_K) \cong H^{2P-1}(G, \mathbb{Z}) \times M$$

（Mは，Ⅲに書いた通り）

この系は，(*)と定理2から，拡大が，splitすることだけが，残っているが，それは，補題2と，GがAbel群の場合より，cup積を用いて，証明される。

§4．最大Abel拡大との関連。

Kの最大Abel拡大をK_{ab}とおく。この時，G－加群として，$C_K/D_K \cong Gal(K_{ab}/K)$である。また，$K_{ab}/k$は、Galois拡大ゆえ，次の完全系列が存在する。

$$1 \to C_K/D_K \to Gal(K_{ab}/k) \to G \to 1$$

従って，$Gal(K_{ab}/k)$は，C_K/D_KのGによる拡大であり，$H^2(G, C_K/D_K)$の１つのcohomology類が対応するが，それは，Weil群の性質から，$H^2(G, C_K)$の標準類のψ_*による像に対応することがわかる。即ち，$H^2(G, C_K/D_K) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$の生成元が，$Gal(K_{ab}/k)$には，対応する。

参考文献

[1] E. Artin－J. Tate，Class Field Theory. Benjamin, New York (1967)

[2] H.Cartan－S.Eilenberg，Homological Algebra. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. (1956)

[3] 弥永昌吉（編），数論，岩波書店，(1969)

[4] 片山真一，C_K/D_KのGalois cohomologyについて，修士論文，京大，(1981)

[5] R.C. Lyndon，Cohomology theory for group extensions. Duke Math. J., 15, 271－292 (1948)

[6] R. G. Swan, The p-period of a finite group. Illinois J. Math., 4, 341-346 (1960)

[7] Zassenhauss, The theory of groups, Chelsea 書店, (1958)