数理解析研究所講究録
第441巻 1981年 1-14

Reflection Principle, Transfinite Induction, and Paris, Harrington Principle.

九大工学部　倉田令二朗

0. はじめに. Reflection Principle RP[T]

Tを自然数論PAをふくむ公理系とするとき

$$RP[T]:\ \forall x Pr[T](\ulcorner\psi(\dot{x})\urcorner) \to \forall x\psi(x)$$

ここにxは自然数を動くvariable, $\underline{Pr}[T](\ulcorner\varphi\urcorner)$はT$\vdash\varphi$をあらわすformula, $\psi(x)$はxだけをvariableとしてもつformula.

$Pr[T](\ulcorner\psi(\dot{x})\urcorner)$は $\underline{Pr}[T]\left(\underline{Sb}(\ulcorner\psi(x)\urcorner)\binom{\ulcorner x\urcorner}{N(x)}\right)$ をformalizeしたもの

($N(x)$はnumeral $\bar{x}$のgödel number)

をTのReflection Principleという.

RP[T]は次のRP′[T]と同値である.

$$RP'[T]:\ \forall x(Pr[T](\ulcorner\psi(\dot{x})\urcorner) \to \psi(x))$$

RPないしはRP′はTheoryのsoundnessを主張する超数学的命題をcodingの手段によってTheory自身の中に移したものである. RP[T]はTの中では証明不可能なことがGödelの不完全性定理からただちにわかる. したがってRP[T]はCon[T]などと同様すぐれてGödel的なものである.

<u>Hierarchy of RP[T]</u>　RP[T]はTに付加される公理として

なSchemeであり、ψの型に応じてRP_{Σ_k}, RP_{Π_k} $(k=0,1,2\cdots)$と書かれるものの集まりである。これらの集まりはhierarchyの構造をもつことが§1で示される。とくにCon[T]は$RP_{\Pi_1}[T]$に同値である。

Paris, Harrington Principleの位置　Paris principle (P) およびHarrington Principle (H) はPAで証明できない、しかもcodingによらない数学的命題として有名である。これらはCon[PA]を導くがこれより強く、いずれも$RP_{\Sigma_1}[PA]$と同値であることが§2で示される。

Transfinite inductionとの同値　RP[PA]はε_0-inductionと同値であり、ただちにε_α-inductionの場合に拡張される。

超数学の算術化としてのRP[PA]が超限帰納法と同一視されるということはいちじるしいことである。ε_0-inductionからRPを導くにはRPの内容的意味に立ちかえり、証明論的方法によって、cut-elimination theoremを用いて行なわれる。いわばこれらの結果はGödelian-Gentzenianの合流である。

RPの上限　$PA_0=PA$から出発し、順序数$\alpha<\Gamma_0$まで次々にRPを付加した場合のPA_αの限界が最後に考察される。

1. Hierarchy of RP

1.1. T は $Z\ (=PA)$ をふくむ Theory とし、

$RP_{\Sigma_n}[T]$ $(RP_{\Pi_n}[T])$ は $\forall x\, Pr[T](\ulcorner\psi(\dot{x})\urcorner) \to \forall x\, \psi(x)$, $\psi \in \Sigma_n(\Pi_n)$

を意味するものとする。

1.2 $Z \vdash Con[T] \longleftrightarrow RP_{\Pi_1}[T]$

$Z \vdash RP_{\Pi_1}[T] \to Con[T]$ は $Pr[T](\ulcorner 1=0 \urcorner) \to 1=0$ より明らか。

逆に $\varphi \in \Pi_1$ とし、x だけを free にもつとする。そのとき $\neg\varphi(x) \in \Sigma_1$

まず $Z \vdash \neg\varphi(x) \to Pr[T](\ulcorner\neg\varphi(\dot{x})\urcorner)$ "numeralwise representable" の性質より。次に $Z + Con[T] \vdash Pr[T](\ulcorner\varphi(\dot{x})\urcorner) \to \neg Pr[T](\ulcorner\neg\varphi(\dot{x})\urcorner)$.

したがって $Z + Con[T] \vdash Pr[T](\ulcorner\varphi(\dot{x})\urcorner) \to \varphi(x)$.

1.3. $Z \vdash RP_{\Sigma_k}[T] \longleftrightarrow RP_{\Pi_{k+1}}[T]$

$\Sigma_k \subset \Pi_{k+1}$ だから $\longleftarrow$ の方はあきらか

$\psi(x,y) \in \Sigma_k$ に対し、($\forall x\, \psi(x,y) \in \Pi_{k+1}$ となる) RP_{Σ_k} から

$\forall y\, Pr[T](\ulcorner\forall x\, \psi(x,\dot{y})\urcorner) \to \forall y \forall x\, \psi(x,y)$ をいえばよいが

$\forall y\, Pr[T](\ulcorner\psi((\dot{y})_0,(\dot{y})_1)\urcorner) \to \forall y\, \psi((y)_0,(y)_1)$ から明らか。

1.4. $T + RP_{\Pi_n}[T]$ が consistent ならば

$T + RP_{\Pi_n}[T] \nvdash RP_{\Sigma_n}[T]$ $\quad n \geq 1$

a) $\varphi \in \Pi_k$ be closed, $k \leq n$ ならば

$Z + \varphi + RP_{\Sigma_n}[T] \vdash RP_{\Sigma_n}[T+\varphi]$

∵ $\varphi \in \Pi_k$ $\psi \in \Sigma_n$ $k \leq n$ に対しては $\varphi \to \psi \in \Sigma_n$,

$Z \vdash Pr[T+\varphi](\ulcorner\psi(\dot{x})\urcorner) \leftrightarrow Pr[T](\ulcorner\varphi \to \psi(\dot{x})\urcorner)$ より出る。

b) ある $S^{(n)}(z,x)\in\Pi_n$ があり、任意の $\psi(x)\in\Pi_n$ に対して数 e があって $Z\vdash \bar{S}^{(n)}(\bar{e},\bar{x})\leftrightarrow\psi(\bar{x})$

となる。したがって $RP_{\Pi_n}[T]$ は単一の sentence

$$\forall z\forall x\,[Pr[T](\ulcorner S^{(n)}(\dot{z},\dot{x})\urcorner)\to S^{(n)}(z,x)]$$

によっておきかえることができる。

c) a)の φ を b)の単一の sentence としての $RP_{\Pi_k}[T]$ でおきかえれば $T+RP_{\Pi_k}[T]+RP_{\Sigma_k}[T]\vdash RP_{\Sigma_k}(T+RP_{\Pi_k})$

もし $T+RP_{\Pi_k}[T]\vdash RP_{\Sigma_k}[T]$ ならば

$$T+RP_{\Pi_k}[T]\vdash RP_{\Sigma_k}[T+RP_{\Pi_k}]\vdash Con[T+RP_{\Pi_k}]$$

となって second incompleteness に反する。∴ 1.4が出る

系 $T+RP[T]$ を $T+RP_{\Sigma_n}[T]$ におきかえることはできない。一般に $T+\Sigma'$ $(\Sigma'\subset\Sigma_n)$ におきかえることはできない。

1.5. 1.2, 1.3 より $\vdash RP_{\Sigma_1}[T]\to Con[T]$ in Z であるが 1.4 より

$$T+Con[T]\nvdash RP_{\Sigma_1}[T]$$

2. Paris-Harrington Principle の位置

2.1. a) Harrington Principle (H)

$\forall e,k,r\,\exists M\,(M\xrightarrow{*}(k)^e_r)$ すなわち任意の partition $P:[M]^e\to r$ に対し、$|H|\geq k$, $|H|\geq\min(H)$ となる homogeneous set $H\subset M$ がある。

b) Paris Principle (P)

n-large の定義。(i) M が 0-large とは $|M|\geq\min M$ のこと.

(ii) M が $n+1$-large とは．$|M| \geq 4$，かつ任意の partition $P : [M]^3 \to 2$ に対し．n-large な homogeneous set $H \subset M$ があること．

(P) (Paris Principle)：$\forall n \exists M (M \text{ is } n\text{-large})$

<u>2.2</u> $PA + RP_{\Sigma_1}[PA] \vdash (H)$

PA の (second order) predicative extension を PA'，impredicative extension を PA^* とする．

(H) の証明には infinite Ramsey theorem ：$\omega \to (\omega)^e_r$（これを $R(e, r)$ であらわす）と König's lemma が必要である

良 $PA' \vdash$ König，$PA^* \vdash \forall e \forall r R(e, r)$ がいえる．

$PA' \vdash R(e\ r) \to R(e+1, r)$ はいえるが R は Π^1_2-form だからこれから $PA' \vdash \forall e R(e, r)$ はいえず

$$PA' \vdash \forall r R(\bar{e}, r) \text{ for each } e$$

がいえるだけである．このことから．$M \xrightarrow[*]{} (k)^e_r$ を $\mathcal{H}^*(r\ k\ e, M)$ と書くとき．$PA' \vdash \forall r \forall k \exists M \mathcal{H}^*(r, k, \bar{e}, M)$ for each e がいえ，"PA' is conservative over PA" だから けっきょく

$$PA \vdash \forall r \forall k \exists M \mathcal{H}^*(r, k, \bar{e}, M) \text{ for each } e$$

この formula を $\psi(\bar{e})$ と書けば　この証明全体を formalize して

$$PA \vdash \forall e Pr[PA](\ulcorner \psi(\dot{e}) \urcorner)$$

がいえ．$\mathcal{H}^*$ は primitive recursive だから．けっきょく

$$PA + RP_{\Sigma_1}[PA] \vdash (H)$$

がいえるのである．

2.3. PA $\nvdash$ (H) の輸クワ

Theory T を次のように定義する.

$+, \times, <$, constant symbol $c_0, c_1, c_2, \cdots$ (infinite) をもつ Language で

Axiom (i) $(c_i)^2 < c_{i+1}$

(ii) $i < \Bbbk, \Bbbk'$ と limited formula $\psi(y, z)$ に対し

$\forall y < c_i [\psi(y, c(\Bbbk)) \longleftrightarrow \psi(y, c(\Bbbk'))]$ ここに $z, \Bbbk, \Bbbk'$ は同じ長さで

$c(\Bbbk) = c_{k_1} \cdots c_{k_i}$ 等

(iii) $+, \times, <$ の defining equation と limited formula に対する induction.

a) $\mathrm{Con}[T] \to \mathrm{Con}[PA]$ is provable in PA

これは次のように証明される.

$\mathfrak{A}$ を T の model とし, I を $\mathfrak{A}$ における $\{a ; a < c_i \text{ for some } i\}$ とする. $\mathfrak{I} = \langle I, +, \times, < \rangle$ は PA の model となる. くわしくいえば PA の formula $\theta(y)$ に対し, $a < c_i$ $i < \Bbbk$ のとき

$$\mathfrak{I} \models \theta(a) \Longleftrightarrow \mathfrak{A} \models \theta^*(a, c(\Bbbk))$$

となる. ここに $\theta^*(y, z)$ は $\theta(y)$ の quantifier $\forall x_r, \exists x_r$ を $\forall x_r < z_r$ $\exists x_r < z_r$ でおきかえることによって得られる.

~~証明~~ b) $(H) \Rightarrow \mathrm{Con}[T]$

このくわしい証明は(大沢)参照. (H)を用いて T の任意の finite subset S に対する $\langle \omega, +, \times, <, x_0, \cdots, x_{k-1} \rangle$ の形の Model を作ることを骨子とする. $x_0, \cdots, x_{k-1}$ は S にあらわれる $c_0, \cdots, c_{k-1}$

の解釈である.

2.4 $PA \vdash (H) \to RP_{\Sigma_1}[PA]$

ψ を variable をもたない Σ_1-formula とする.

1° $\neg\psi$ が真なら $T + \neg\psi$ は consistent である.

なぜなら b) の証明において T の有限部分集合 S は $\langle \omega, +, \times, <, x_0, \cdots, x_{n-1} \rangle$ の形のモデルをもつが $\neg\psi$ は ω で真だから $S + \neg\psi$ は consistent, ゆえに $T + \neg\psi$ は consistent

2° $PA + \neg\psi$ は consistent

$T + \neg\psi$ は consistent だから この model $\mathfrak{A}$ をもつ. $\neg\psi$ は Π_1-form だから a) の θ^* に対応する $(\neg\psi)^*$ も真となる. したがって $\underset{2.3}{a)}$ で述べたことにより PA のある model $\mathfrak{J}$ において $\neg\psi$ は真となる.

ゆえに $PA + \neg\psi$ は consistent. すなわち $PA \vdash \psi$ でない. すなわち

(H) のもとで $\neg\psi$ が真 $\Rightarrow$ $PA \vdash \psi$ でない. すなわち

$$(H) \Longrightarrow (PA \vdash \psi \Rightarrow \psi \text{ は真})$$

$\psi(x)$ を Σ_1-formula とするとき任意の数 n に対して

$$(H) \Rightarrow \quad PA \vdash \psi(\bar{n}) \Rightarrow \psi(n)$$

このことを PA で formalize して

$$(H),\ PA \vdash Pr[PA](\ulcorner \psi(\dot{x}) \urcorner) \to \psi(x)$$

2.2 と 2.4 より $PA \vdash (H) \leftrightarrow RP_{\Sigma_1}[PA]$

がいえた. Paris principle (P) についても PA で $(P) \leftrightarrow RP_{\Sigma_1}[PA]$

がいえる. [Paris] 参照. 系として $(P) \leftrightarrow (H)$ が出る.

3 Reflection Principle と transfinite induction

3.1. ordinal number $< \Gamma_0$

第2級順序数の集合 $\mathbb{O}$ において、$\alpha \in \mathbb{O}$ に対する critical number の set $Cr(\alpha)$ と function $\Phi_\alpha : \mathbb{O} \to \mathbb{O}$ を次のように定義する.

(1) $Cr(0)$ は ω^α の形の ordinal の全体

(2) Φ_α は $Cr(\alpha)$ の ordinal function, すなわち値域を $Cr(\alpha)$ とする isotonic function $\Phi_\alpha : \mathbb{O} \to Cr(\alpha)$

(3) $Cr(\alpha)$ は任意の $\Phi_\zeta, \zeta < \alpha$ の fix point の全体

$$Cr(\alpha) = \{\eta ;\ \Phi_\zeta(\eta) = \eta \ \text{for all } \zeta < \alpha\}$$

$\Phi_\alpha(\beta)$ を $\Phi(\alpha\, \beta)$ と書く. $\Phi(0,0) = 1$, $\Phi(0,1) = \omega$ $\Phi(0\, \alpha) = \omega^\alpha$, $\Phi(1,0) = \varepsilon_0$ (1st ε-number), $\Phi(1,\alpha) = \varepsilon_\alpha$ (α-th ε-number)

$\Phi(\alpha\, 0) = \alpha$ のとき α を strongly critical number という.

strongly critical number の上限を Γ_0 とする. $\tilde{\Gamma}_0 = \{\alpha ; \alpha < \Gamma_0\}$ とおく.

$\tilde{\Gamma}_0$ は 0, $\Phi(\alpha, \beta)$, $+$ をもとに有限の立場で構成でき N^+ との間に次のような一対一対応が成立つ (Schütte 参照)

$$\tau : N^+ \longrightarrow \tilde{\Gamma}_0 \quad \text{は一対一で}$$

primitive recursive predicate $\prec$ が存在して

$$n \prec m \text{ in } N^+ \iff \tau(n) < \tau(m) \text{ in } \tilde{\Gamma}_0$$

$\tau^{-1}(\alpha) = \bar{\alpha}$ for $\alpha \in \tilde{\Gamma}_0$ とおくとき. $n \hat{+} m = \overline{\tau(n) + \tau(m)}$,

$\hat{\omega}^n = \overline{\omega^{\tau(n)}}$, $\tilde{\omega}_n(m) = \overline{\omega_n(\tau(m))}$ (ここに $\omega_n(\alpha)$ は $\omega_0(\alpha) = \alpha$ $\omega_{n+1}(\alpha) = \omega^{\omega_n(\alpha)}$) は n, m の primitive recursive function である.

3.2 $\alpha \in \tilde{\Gamma}_0$ に対して PA_α を次のように定義する.

$$PA_0 = PA,\quad PA_{\alpha+1} = PA_\alpha + RP[PA_\alpha],\quad PA_\beta = \bigcup_{\gamma<\beta} PA_\gamma \ (\beta : \text{limit}).$$

注) ~~以~~上の PA_α は constructive ordinal $d \in \mathcal{O}$ に対する Feferman の recursive progression PA_d とは異なる external なものである. 後者は formal-internal なもので d の定義に深く依存する. これについては別の機会に論じる

3.3 Transfinite induction の定式化.

~~(a)~~ 以下 ϕ を一変数の PA の formula とする

ϕ は Progressive: $\forall x_2 (\forall x_1 \prec x_2 \phi(x_1) \to \phi(x_2))$. $Prog(\phi)$ と書く.

trans-induction up to t $\mathcal{J}[t, \phi] :\equiv Prog(\phi) \to \forall x \prec t\ \phi(x)$

$$\mathfrak{J}(\phi, t) :\equiv \forall y (\forall x \prec y \phi(x) \to \forall x \prec y \hat{+} t\ \phi(x))$$

$$\sigma[\phi](z) :\equiv \mathfrak{J}[\phi, \hat{\omega}^z]$$

3.4. Transfinite induction の証明 (RPによる)

(a) $PA_1 = PA + RP[PA] \vdash \mathcal{J}(\hat{\varepsilon}_{\bar{0}}, \phi)$

(b) $\beta < \alpha$ in $\tilde{\Gamma}_0$ ならば $PA_\alpha \vdash \mathcal{J}(\hat{\varepsilon}_{\bar{\beta}}, \phi)$

[証明の要点]

(c) $PA \vdash Prog(\phi) \to Prog(\sigma(\phi))$

これを用いて任意の ϕ と自然数 n に対し

(d) $PA \vdash Prog(\phi) \to \forall x \prec \tilde{\omega}_n(\bar{0}) \phi(x)\ (\equiv \mathcal{J}(\tilde{\omega}_n(\bar{0}), \phi))$

(e) 他方任意の $a \prec \hat{\varepsilon}_{\bar{0}}$ に対して a の primitive recursive function $n = n(a)$ がきまり $a \prec \tilde{\omega}_n(\bar{0})$ となる.

(d)と(e)とから任意の $a \prec \hat{\varepsilon}_{\bar{\sigma}}$ に対して

$$PA \vdash Prog(\phi) \to \phi(a)$$

がいえこの証明自身PAで形式化されるので

$$PA_1 \vdash J(\hat{\varepsilon}_{\bar{\sigma}}, \phi)$$

がいえる. (b)の方はやはり(c)から出発して次のことがいえる.

(d′) すべての $\beta \in \tilde{\Gamma}_0$ と自然数 n に対し,

任意の ϕ に対して $PA \vdash J(\hat{\varepsilon}_{\bar{\beta}}, \phi) \Longrightarrow$ 任意の ϕ に対して

$$PA \vdash J(\tilde{\omega}_n(\hat{\varepsilon}_{\bar{\beta}} \hat{+} \bar{1}), \phi)$$

(e′) 任意の $a \prec \hat{\varepsilon}_{\bar{\alpha}}$ に対し, $a, \bar{\alpha}$ に primitive recursive に $\bar{\beta} \prec \bar{\alpha}$ と n がきまり $a \prec \tilde{\omega}_n(\hat{\varepsilon}_{\bar{\beta}} \hat{+} \bar{1})$ となる.

(b)をいうには $\alpha \in \tilde{\Gamma}_0$ に対して(b)を仮定して $PA_{\alpha+1} \vdash J(\hat{\varepsilon}_{\bar{\alpha}}, \phi)$ をいえばよいが, これも(d′)(e′)と証明のformalizationによって得られる.

注) $\phi \in \Sigma_n$ に対する $J(\hat{\varepsilon}_{\bar{\sigma}}, \phi)$ は $RP_{\Sigma_{n+2}}$ を用いて証明される.

3.5 Reflection Principle の証明(TIによる)

Infinite system PA_∞ Axiom は variableのない true なPAの formula, rule として ω-rule をもつ. Gentzen styleのものあるいは Tait's system (Handbook D.2, 3.4の Z_∞) をとる. このとき PA_∞ で cut-elimination theorem が成立つ.

(a) $PA + (\phi)J(\hat{\varepsilon}_{\bar{\sigma}}, \phi) \vdash RP(PA)$

[証明] sentence φ に対し.

$$PA \vdash \varphi \overset{(1)}{\Longrightarrow} PA_\infty \vdash_n^{<\omega^2} \overset{(2)}{\Longrightarrow} PA_\infty \vdash_0^{<\varepsilon_0} \varphi \overset{(3)}{\Longrightarrow} Tr_k(\ulcorner\varphi\urcorner) \overset{(4)}{\Longrightarrow} \varphi$$

$PA_\infty \vdash_\rho^{<\delta} \varphi$ は長さ$<\delta$, cut rank ρ の φ の証明があることを示す.

(1) は Schütte §21 lemma 2

(2) は cut elimination theorem であって ε_0-induction によって証明される. (上記 §22 lemma 4)

(3) は φ の論理記号が k を超えず, φ の cut なしの証明がある場合には partial truth definition Tr_k によって φ が真になることを意味する. (4) は Tr_k の定義による.

φ のかわりに $\Phi(\bar{x})$ を考えると, 上のことは formula

$$Pr[PA](\ulcorner\Phi(\dot{x})\urcorner \to \Phi(x))$$

が $PA + \varepsilon_0$-induction によって証明できることを意味する.

(b) $\quad PA + (\Phi)\mathcal{J}(\hat{\varepsilon}_\alpha, \Phi) \vdash RP(PA_\alpha)$

α に関する induction で証明する. もし (b) が正しければ 3, 4 の (b) より $\quad PA + (\Phi)\mathcal{J}(\hat{\varepsilon}_\beta, \Phi)(\beta<\alpha) \equiv PA_\alpha$

となるからこれを仮定する.

$$PA_\infty \vdash^{<\omega^2+\omega\beta} \mathcal{J}(\hat{\varepsilon}_\beta, \Phi) \quad (\text{Schütte §21 lemma 5})$$

だから sentence φ に対し

$$PA_\alpha \vdash \varphi \overset{(1)}{\Longrightarrow} PA_\infty \vdash_n^{<\omega^2+\omega\cdot\alpha+\omega^2} \varphi \overset{(2)}{\Longrightarrow} \vdash_0^{\varepsilon_\alpha} \varphi \overset{(3)}{\Longrightarrow} Tr_k(\ulcorner\varphi\urcorner) \overset{(4)}{\Longrightarrow} \varphi$$

(2) の証明に ε_α-induction が必要となる. Schütte §22. lemma 4 あとは (a) の場合と同様である.

3.6 RP(PA)の表と問題

$$\begin{tikzcd}
(\Phi)\theta(\hat{\varepsilon}_0,\Phi) \arrow[r, leftrightarrow] & RP \arrow[r, dashed] & RP_{\Sigma_{k+1}} \arrow[r] \arrow[d] & RP_{\Sigma_k} \arrow[r, dashed] \arrow[dl] & RP_{\Sigma_1} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d] & (H) \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d] & (P) \\
 & & RP_{\Pi_{k+1}} \arrow[r] \arrow[ur] & RP_{\Pi_k} \arrow[r, dashed] \arrow[u, dashed, "\times"'] & RP_{\Pi_1} \arrow[r, leftrightarrow] & \mathrm{Con}[PA] \arrow[u, dashed, bend right, "\times"'] &
\end{tikzcd}$$

問題　RP_{Σ_k} $k \geqq 2$　RP_{Π_k} $k \geqq 1$ と同値な(H),(P)のような数学的命題を求めること

4　PA_αの限界

"Adding RP"による PA_α の構成は $PA_{\Gamma_0} = \bigcup_{\alpha<\Gamma_0} PA_\alpha$ まで続けることができるが、途中で"より"強い transfinite induction を導くことができなくなる　ここで autonomous number in PA_{Γ_0} の概念を導入する.

4.1. Autonomous ordinal in PA_{Γ_0}

(1)　$PA \vdash \Phi\theta(\sigma, \Phi)$ するような $\sigma < \varepsilon_0$ ならば σ は autonomous in PA_{Γ_0}

(2)　δ: auto in PA_{Γ_0}, $PA_{\delta+1} \vdash (\Phi)\theta(\sigma, \Phi)$, $\delta < \sigma$ なら σ は auto in PA_{Γ_0}

また σ: autonomous in PA_∞ とは $\sigma < \varepsilon_0$ かまたは

(2)′　$\exists\delta$: auto in PA_∞, $\delta < \sigma$,　$PA_\infty \vdash^{\delta} (\Phi)\theta(\sigma, \Phi)$

だと定義する.

PA_{Γ_0} ないし PA_∞ の autonomous number の全体は Γ_0 の section になることが知られている. これらの auto-number の sup をそれぞれ $\mathrm{Aut}(PA_{\Gamma_0})$, $\mathrm{Aut}(PA_\infty)$ とかく.

$\mathrm{Aut}(PA_\infty) = \Phi(2, 0)$ であることが知られている(Schütte, Th23.6).

4.2. $\mathrm{Aut}(PA_{\Gamma_0}) = \Phi(2,0)$

(a) $\gamma \in \tilde{\Gamma}_0$ が PA_{Γ_0} で autonomous ならば PA_∞ で autonomous i.e. $\mathrm{Aut}(PA_{\Gamma_0}) \leq \mathrm{Aut}(PA_\infty)$

γ に関する帰納法による. $\varepsilon_0 \leq \gamma$ としてよい

そのときは $\delta < \gamma$ があって δ は auto in PA_{Γ_0},

$$PA_{\delta+1} \vdash (\phi)\mathfrak{J}(\bar{\gamma}, \phi)$$

仮定によって δ は autonomous in PA_∞

§3 によって $PA_{\delta+1} \equiv PA + (\phi)(\bar{\delta}, \phi)$ だから

$$PA_0 + (\phi)\mathfrak{J}(\bar{\delta}, \phi) \vdash (\phi)\mathfrak{J}(\bar{\gamma}, \phi)$$

δ auto in PA_∞ だがここでは $\delta_0 > \varepsilon_0$ のときだけを考えればよい.

そのときは $\delta_0 < \delta$ δ_0 autonomous があって

$$PA_\infty \vdash^{\delta_0} (\phi)\mathfrak{J}(\bar{\delta}, \phi)$$

$$PA_\infty, (\phi)\mathfrak{J}(\bar{\delta}, \phi) \vdash^{<\omega^2} (\phi)\mathfrak{J}(\bar{\gamma}, \phi)$$

これから $PA_\infty \vdash^{<\delta_0+\omega^2} (\phi)\mathfrak{J}(\bar{\gamma}, \phi)$

$\delta_0 + \omega^2$ は auto in PA_∞ で $\delta_0 + \omega^2 < \gamma$ だから γ も auto in PA_∞ $\cancel{\mathfrak{J}(0,\phi)}$

$\mathrm{Aut}(PA_\infty) = \Phi(2,0)$ だから $\mathrm{Aut}(PA_{\Gamma_0}) \leq \Phi(2,0)$

(b) $\Phi(2,0) \leq \mathrm{Aut}(PA_{\Gamma_0})$

$\alpha_0 = \varepsilon_0$ $\alpha_{n+1} = \varepsilon_{\alpha_n} = \phi(1, \alpha_n)$ とおくと $\alpha_n < \alpha_{n+1}$.

3.4 によって $PA_{\alpha_{n+1}} \vdash \mathfrak{J}(\hat{\varepsilon}_{\bar{\alpha}_n}, \phi) \ (\Leftrightarrow \mathfrak{J}(\bar{\alpha}_{n+1}, \phi))$

ゆえにすべての α_n は autonomous in PA_{Γ_0}

$\gamma < \Phi(2,0)$ に対しては $\gamma < \alpha_n$ となる n がある.

ゆえに γ は auto in PA_{Γ_0} ∴ $\Phi(2,0) \leq \mathrm{Aut}(PA_{\Gamma_0})$

文献

Reflection Principle の hierarchy については

- Handbook of Mathematical logic の D1

Paris principle については

- Paris : Some Independence Results for Peano Arithmetic J.S.L vol 43, 1978

~~Harrington~~

- 田中尚夫 "最近の Recursion Theory" 数解研講究録 336

Harrington Principle については

- Paris Harrington ; A Mathematical Independence in Peano Arithmetic (Handbook —)
- 大浜茂生 Paris Harrington の結果について 数解研講究録 362

Σ-induction との関係については

- G. Kreisel and A. Lévy Reflection Principles and their use for establishing the complexity of axiomatic systems Math. Logik Grundlagen Math. 14. 1968
- Handbook の D2

なお他に

- K. Schütte Proof Theory ~~Sp~~ Springer-Verlag