数理解析研究所講究録
第444巻 1981年 76-95

微分不変式と巾級数不変式

（名大・理）　田中　洋平

§1. 序

ここでは、森川寿著『不変式論』（㊱ [1]）の、2,3,6章の招介をする。証明等の詳細はこの本を参照されたい。

古典的な不変式論では、$G=GL(2,\mathbb{C})$ の有限次表現 V をとり、V 上の対称多元環 $S(V)$ の G-加群としての構造を研究している。§2では、有限次表現に限らず一般に無限次元表現から始めたらどうなるか、という問題を考える。正確には $GL(2,\mathbb{C})$ の表現ではなく、その Lie 環 $gl(2,\mathbb{C})$ の表現を考える。話は全く代数的であり、ユニタリー表現に関する事は扱わない。表現 V がある条件を満たす時、有限次元の場合と同様な事が成立 —— $S(V)$ は lowest weight vector（= 半不変式）をもつ既約表現の直和になる（定理1）—— 事を述べる。

応用として、§3では、保型形式がいくつか与えられた時、それらの微分多項式がいつ保型形式になるか、という問題を扱う。Rankin（㊱ [ ]）の結果を精密化したものになっている。

§4では n階線型常微分方程式

$$\left(\frac{d}{du}\right)^n x + \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell} P_\ell(u) \left(\frac{d}{du}\right)^{n-\ell} x = 0$$

に関する不変量—微分不変式—について考える。準備として常微分線型方程式の Laguerre-Forsyth の標準形について述べる。L.-F. の標準形間の変換群として $SL(2,\mathbb{C})\times\mathbb{C}^\times$ が登場し、微分不変式が半不変式でどのように書けるかを述べる。

§2. $gl(2,\mathbb{C})$の表現，半不変式

2.1. 表現 $V_{(w,p)}$

$gl(2,\mathbb{C})$ の基底を次の様にとる。

$$Z=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad H=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$$

Zは$gl(2,\mathbb{C})$のcenterを張り，$\{H,E,F\}$は$sl(2,\mathbb{C})$の基底である。

$\mathfrak{f}=\mathbb{C}Z+\mathbb{C}H$　　とおく。

<u>定義1</u>. Vを$gl(2,\mathbb{C})$-加群とする。(無限次元でもよい。)
$\lambda\in\mathfrak{f}^*$, $0\neq v\in V$について，任意の$X\in\mathfrak{f}$に対して $X\cdot v=\lambda(X)v$ が成り立つ時，vをweight λのweight vectorと呼ぶ。
weight vector vが更に $F\cdot v=0$ となる時，vをlowest weight vector，そのweight λをlowest weightと呼ぶ。
Vがlowest weight vector vを持ち，$\{E^k v \mid k=0,1,2,\cdots\}$で$V$が張られる時，$V$を，$\lambda$をlowest weightにもつlowest weight moduleと呼ぶ。

$GL(2,\mathbb{C})$の有限次既約表現の微分表現となる$gl(2,\mathbb{C})$-加群は lowest-weight module である。

実際 $w\in\mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots\}$ と $p\in\mathbb{Z}$の組に対し $w+1$次元の既約表現が次の様に構成される。

Zを不定元とし $P_w=\{$高々w次の多項式全体$\}$ とおく。

$GL(2,\mathbb{C})$のP_wへの右からの作用を

$\sigma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in GL(2,\mathbb{C})$, $f(Z)\in P_w$ に対し

$$f^{\sigma}(Z)=(\det)^{p}\ (cZ+d)^{w}f\left(\frac{aZ+b}{cZ+d}\right)$$

と定め

$V(w,p)=P_w^{*}$ への$GL(2,\mathbb{C})$の表現を

$\sigma\in GL(2,\mathbb{C})$, $v\in V(w,p)$, $f\in P_w$ に対し

$$(\sigma v)(f)=v(f^{\sigma})$$

と定義する。

$V(w,p)$の基底として、P_wの基底 $\{\binom{w}{l}Z^{l}\mid 0\le l\le w\}$ の双対基底 $\{v^{(l)}\mid 0\le l\le w\}$ をとると、微分表現に於る Z,H,E,F,の作用は

$0\le l\le w$ に対し

$$(1)\begin{cases} Z\cdot v^{(l)}=(w+2p)v^{(l)} \\ H\cdot v^{(l)}=(2l-w)v^{(l)} \\ E\cdot v^{(l)}=(w-l)v^{(l+1)} \\ F\cdot v^{(l)}=\ l\,v^{(l-1)} \end{cases}$$

となり、$v^{(0)}$が lowest weight vector で、$v^{(0)}, Ev^{(0)},\cdots, E^{w}v^{(0)}$ で $V(w,p)$

を張る。lowest weight $\lambda=\lambda_{(w;p)}$ は

$$(2)\begin{cases}\lambda(Z)=w+2p\\ \lambda(H)=-w\end{cases}$$

となる。逆に $\lambda_{(w;p)}$ を lowest weight に持つ lowest weight module で既約なものは $V_{(w;p)}$ に同型である。もっと一般に、$(w;p)\in\mathbb{C}^2$ に対し、(2) で $\lambda_{(w;p)}\in\mathfrak{f}^*$ を定めると、

命題1. $\lambda_{(w;p)}$ を lowest weight とする既約な lowest weight module $V_{(w;p)}$ が同型を除いて唯一つ存在する。

(証明) (存在)

$v^{(0)}, v^{(1)}, \cdots, v^{(\ell)}, \cdots$ (但し $w\in\mathbb{N}$ のとき $v^{(w+1)}=v^{(w+2)}=\cdots=0$)

を基底とする線型空間を $V_{(w;p)}$ とし、Z, H, E, F の作用を (1) 式で定めると、これが求めるもの。$v^{(0)}$ が lowest weight vector.

(一意性)

V : $\lambda_{(w;p)}$ を lowest weight にもつ既約な lowest weight module

$u^{(0)}$: lowest weight vector

とする。帰納的に $u^{(\ell+1)}=\dfrac{1}{w-\ell}E\cdot u^{(\ell)}$ $(\ell=0,1,2,\cdots)$

(但し $w\in\mathbb{N}$ のとき $u^{(w+1)}=\cdots=0$) とおくと、$\{u^{(\ell)}\}$ の張る subspace は $\mathfrak{gl}(2,\mathbb{C})$-不変. V の既約性から V 全体に等しい。よって V の基底を与える。線型写像 $\varphi : V\longrightarrow V_{(w;p)}$ を $u^{(\ell)}\mapsto v^{(\ell)}$ で定めると、φ は $\mathfrak{gl}(2,\mathbb{C})$-準同型で、既約性から

$V\cong V_{(w;p)}$ がわかる。

証明中の $V(w;p)$ の基底 $v^{(0)}, v^{(1)}, \cdots, v^{(l)}, \cdots$ を標準基底と呼ぶ。

注1) $w \notin \mathbb{N}$ の時、$\lambda(w;p)$ を lowest weight にもつ lowest weight module は同型を除いて唯一つ、従って $V(w;p)$ に同型、特に既約である。$w \in \mathbb{N}$ の時、$\lambda(w;p)$ を lowest weight にもつ lowest weight module $\tilde{V}(w;p)$ で無限次元のものが同型を除き唯一つ存在する。$\tilde{V}(w;p)$ は直既約だが、$V(-w-2,p)$ に同型な部分加群 U があって $\tilde{V}(w;p)/U \simeq V(w;p)$ となる。

注2) $sl(2,\mathbb{C})$-加群としても $V(w;p)$ は既約であり、$sl(2,\mathbb{C})$-加群として $V(w;p) \simeq V(w,p')$. これを V_w で表わすと、V_w は次で特徴づけられる。

V_w は既約で、$0 \neq {}^{\exists}v \in V$, $Hv = -wv$, $Fv = 0$

$gl(2,\mathbb{C})$-加群 $V(w;p)$ は $sl(2,\mathbb{C})$-加群 V_w に center Z の作用を $w+2p$ 倍と定義したものに他ならない。

2.2. 半不変式

$w = (w_1, \cdots, w_N) \in \mathbb{C}^N$ を1つとり固定する。

$V = V(w_1,0) \oplus \cdots \oplus V(w_N,0)$ とおく。

V への $gl(2,\mathbb{C})$ の作用を $R = S(V)$ 上へ derivation として拡張する事により、R は $gl(2,\mathbb{C})$-加群になる。$V(w_i,0)$ の標準基底 $\xi_i^{(0)}, \xi_i^{(1)}, \cdots, \xi_i^{(l)}, \cdots$ をとり、R を $\{\xi_i^{(l)} \mid 1 \leq i \leq N,\ l = 0,1,2,\cdots\}$ で生成された $\mathbb{C}$ 上の多項式環 $\mathbb{C}[\xi_i^{(l)}]$ と同一視する。この時 H, E, F, Z の作用はそれぞれ

$$(3)\quad\begin{cases} \mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{l=0}^{\infty}(2l-w_i)\,\xi_i^{(l)}\dfrac{\partial}{\partial \xi_i^{(l)}} \\ \Delta = \sum_{i=1}^{N}\sum_{l=0}^{\infty}(w_i-l)\,\xi_i^{(l+1)}\dfrac{\partial}{\partial \xi_i^{(l)}} \\ \mathcal{D} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{l=0}^{\infty} l\,\xi_i^{(l-1)}\dfrac{\partial}{\partial \xi_i^{(l)}} \\ \mathcal{Z} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{l=0}^{\infty} w_i\,\xi_i^{(l)}\dfrac{\partial}{\partial \xi_i^{(l)}} \end{cases}$$

となる。$\mathcal{H}$, $\mathcal{Z}$ の作用は半単純である。そこで

<u>定義2.</u> $\varphi\in R$ が $\frac{1}{2}(\mathcal{Z}+H)=\sum_i\sum_l l\,\xi_i^{(l)}\frac{\partial}{\partial\xi_i^{(l)}}$ の固有ベクトルのとき同重(isobar)であるといい、その固有値をweightと呼び、$w(\varphi)$で表わす。またφが$\mathcal{H}$の固有ベクトルである時、その固有値の-1倍をφのindexと呼び index(φ)で表わす。φの $\xi_i^{(0)}, \xi_i^{(1)}, \cdots, \xi_i^{(l)}, \cdots$ に関する次数をi-degreeと呼び、φが各i-degreeに関して同次な時、分離的同次であるという。この時φのi-degreeを$\deg_i\varphi$と書く。

φが分離的同次かつ同重ならφは$\mathcal{H}$の固有ベクトルであり

$$\mathrm{index}(\varphi)=\sum_{i=1}^{N} w_i \deg_i(\varphi) - 2w(\varphi)$$

となる。

$\mathbb{C}[\xi_i^{(l)}]$ の subspace U が、分離的同次, 同重な多項式で張られる時

$$U(d_1,\cdots,d_N;p) \underset{\mathrm{def.}}{\equiv} \{\varphi\in U \mid \varphi\text{は分離的同次,同重}, \deg_i\varphi=d_i, w(\varphi)=p\}$$

$$U(u,p) \underset{\mathrm{def}}{\equiv} \{\varphi\in U \mid \varphi\text{は}\mathcal{H},\mathcal{Z}\text{の固有ベクトル}, \mathrm{index}\,\varphi=u, w(\varphi)=p\}$$

$$U^{[u]} \underset{\mathrm{def.}}{\equiv} \{\varphi\in U \mid \varphi\text{は}\mathcal{H}\text{の固有ベクトル}, \mathrm{index}\,\varphi=u\}$$

とおく。$U^{[u]}=\bigoplus_p U(u,p)$, $U(u,p)=\bigoplus_{u=\sum w_i d_i-2p} U(d_1,\cdots,d_N;p)$ となる。

定義3. $\mathfrak{S} \underset{\mathrm{def}}{=} \{\varphi \in R \mid \mathfrak{D}\varphi = 0\}$ とおく。$\mathfrak{S}$ は R の部分環であり，半不変式環と呼ぶ。$\mathfrak{S}$ の元を 不変式と呼ぶ。

$\mathfrak{D}$ は(3)より ξ_i-degree を保ち，weight を1つ下げるので $\mathfrak{S}$ は同重・分離的同次な多項式で張られる。よって

$$\mathfrak{S} = \bigoplus \mathfrak{S}(d_1,\cdots,d_N; p) = \bigoplus \mathfrak{S}(u,p) = \bigoplus \mathfrak{S}^{[u]}$$

と直和分解される。

注3) $\mathfrak{D}$ の作用はパラメーター $w=(w_1,\cdots,w_N)$ を含まないので、$\mathbb{C}[\xi_i^{(l)}]$ の部分環として $\mathfrak{S}$ は w に無関係に定まる。上の直和分解は w に依存する。

$\mathfrak{D}$，即ち $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=F$ の R 上の作用，は locally nilpotent である。従って $\begin{pmatrix}1&0\\t&1\end{pmatrix}=\exp tF$ $(t\in\mathbb{C})$ の作用を $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\mathfrak{D}^n}{n!}$ と定義できる。$\xi_i^{(l)}$ への作用は

$$\begin{pmatrix}1&0\\t&1\end{pmatrix}\xi_i^{(l)} = \sum_{n=0}^{l}\binom{l}{n}t^n\,\xi_i^{(l-n)} \qquad \text{—— (4)}$$

命題2

$\varphi(\cdots,\xi_i^{(l)},\cdots) \in \mathbb{C}[\xi_i^{(l)}]$ について

$$\varphi\in\mathfrak{S} \iff \begin{pmatrix}1&0\\t&1\end{pmatrix}\varphi=\varphi \quad \forall t\in\mathbb{C}$$

注4). (4)式より

$$\begin{pmatrix}1&0\\t&1\end{pmatrix}\varphi = \varphi\Big(\cdots,\sum_{n=0}^{l}\binom{l}{n}t^n\,\xi_i^{(l-n)},\cdots\Big)$$

補題1. $(w_1, p_1), (w_2, p_2) \in \mathbb{C}^2$ とする。$w_1+w_2 \notin \mathbb{N}$ なら
$V_{(w_1,p_1)} \otimes V_{(w_2,p_2)}$ は完全可約で、各既約因子は $\lambda_{(w_1+w_2-2n,\, p_1+p_2)}$
$(n \in \mathbb{N})$ を lowest weight とする lowest weight module である。

証明は注1. の前半から容易にわかる。

注5) $w \notin \mathbb{N}$ の時 $V_{(w,p)} \otimes V_{(-w,p)} \supset {}^{\exists}U \simeq \tilde{V}_{(0,2p)}$
従って完全可約ではない。

この補題1より

定理1 (Gram's theorem)

$w = (w_1, \cdots, w_N)$ が次の性質 (C) を持つとする。

$$\text{(C)} \quad \left.\begin{array}{l} (p_1, \cdots, p_N) \in \mathbb{N}^N \\ \sum_{i=1}^N w_i p_i \in \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow p_i \neq 0 \text{ なる } i \text{ に対し } w_i \in \mathbb{N}$$

この時 R は完全可約である。そして
$$R = \mathfrak{S} \oplus \Delta \mathfrak{S} \oplus \Delta^2 \mathfrak{S} \oplus \cdots$$
とベクトル空間として直和分解される。

$\mathfrak{S}(u, p) \ni \varphi \neq 0$ をとってくれば、定理1より、$\varphi, \Delta\varphi, \Delta^2\varphi, \cdots$
が $V_{(u,p)}$ に同型な R の submodule を張る。即ち半不変式を
全て求める事と R 中の既約因子をとり出すことは同値である。

§3. 応用I. 保型形式と半不変式

補題2. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$, $h(z)$: 正則函数 とする。
$w \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{N}$ に対し

$$\frac{1}{w(w-1)\cdots(w-l+1)}\left(\frac{d}{d\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)}\right)^{l}\left((cz+d)^{-w}h(z)\right)$$
$$=\sum_{p=0}^{l}(-1)^{p}\binom{l}{p}\frac{\left(\frac{d}{dz}\right)^{l-p}h(z)}{w(w-1)\cdots(w-l+p+1)}\cdot c^{p}(cz+d)^{-w+2l-p}$$

<u>定義4.</u> $w=(w_1,\cdots,w_N)\in\mathbb{C}^N$, $h_1(z),\cdots,h_N(z)$を$\mathbb{C}$内のある領域上の正則函数とする。(但し$w_i\in\mathbb{N}$ならh_iは高々w_i次多項式)

A : $\left(\frac{d}{dz}\right)^{l}h_i$ $(1\leq i\leq N,\ l=0,1,2,\cdots)$の多項式全体のなす環とする。この時 準同型

$$\Phi_{(w;h_1,\cdots,h_N)} : \mathbb{C}[\xi_i^{(l)}]\longrightarrow A$$
$$\text{を}\qquad \xi_i^{(l)}\longmapsto\frac{\left(\frac{d}{dz}\right)^{l}h_i}{w_i(w_i-1)\cdots(w_i-l+1)}$$

で定める。

注6) $(\mathbb{C}[\xi_i^{(l)}],\Delta)$, $(A,\frac{d}{dz})$は共にdifferential algebra.
$\Phi_{(w;h_1,\cdots,h_N)}$はdifferential algebraとしての準同型である。

即ち
$$\Phi_{(w;h_1,\cdots,h_N)}\circ\Delta=\frac{d}{dz}\circ\Phi_{(w;h_1,\cdots,h_N)}$$

<u>定理2.</u> $SL(2,\mathbb{C})$の部分群Γが$\mathbb{C}$内のある領域にproperly discontinuousに作用しているとする。$h_1(z),\cdots,h_N(z)$をそれぞれ重さ$2k_1,\cdots,2k_N$のΓに関する保型形式とする。

$w=(-2k_1,\cdots,-2k_N)=(w_1,w_2,\cdots,w_N)$とおく。

この時 $\Phi_{(w;h_1,\cdots,h_N)}(\mathfrak{S}^{[u]})$の各元は$\Gamma$に関する重さ$-u$の保型形式である。

(証明) $\varphi \in \mathfrak{S}(d_1,\cdots,d_N;p)$, $u=\sum w_i d_i-2p$

について $\Phi(z)=\Phi_{(w;h_1,\cdots,h_N)}(\varphi)$ が重さ $-u$ の保型形式

であることを示せばよい。

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ に対し

$$\Phi\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)=\varphi\left(\cdots,\frac{1}{w_i\cdots(w_i-l+1)}\left(\frac{d}{d\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)}\right)^l h_i\left(\frac{az+b}{cz+d}\right),\cdots\right)$$

$$=\varphi\left(\cdots,\frac{1}{w_i\cdots(w_i-l+1)}\left(\frac{d}{d\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)}\right)^l (cz+d)^{-w_i}h_i(z),\cdots\right)$$

$$\underset{\text{補題2}}{=}\varphi\left(\cdots,(cz+d)^{-w_i+2l}\sum_{p=0}^{l}\binom{l}{p}\frac{\left(\frac{d}{dz}\right)^{l-p}h_i(z)}{w_i\cdots(w_i-l+p+1)}\cdot t^p,\cdots\right)$$

ここで $t=-c(cz+d)^{-1}$

$$\underset{\S 2\,(4)\text{式}}{=}(cz+d)^{-u}\,\Phi_{(w;h_1,\cdots,h_N)}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}\varphi\right)$$

$$\underset{\text{命題2}}{=}(cz+d)^{-u}\,\Phi_{(w;h_1,\cdots,h_N)}(\varphi)=(cz+d)^{-u}\,\Phi(z) \quad /\!/$$

Γ が $SL(2,\mathbb{C})$ 中 Zariski dense (例えば $\{z \mid \mathrm{Im}\,z>0\}$ に作用する第1種フックス群)なら定理2の逆も成り立つ。即ち

<u>定理3.</u> Γ の Zariski closure が $SL(2,\mathbb{C})$ に等しいとする。$h_1,\cdots,h_N$ をそれぞれ重さ $2k_1,\cdots,2k_N$ の保型形式とし、$w=(-2k_1,\cdots,-2k_N)=(w_1,\cdots,w_N)$ とおく。$f\in\mathbb{C}[\xi_i^{(l)}]$ に対して $\Phi_{(w;h_1,\cdots,h_N)}(f)$ が Γ に関する重さ $2m$ の保型形式になったとすれば、$\varphi\in\mathfrak{S}^{[-2m]}$ があって

$$\Phi_{(w;h_1,\cdots,h_N)}(f)=\Phi_{(w;h_1,\cdots,h_N)}(\varphi)$$

となる。

(証明) $F(z)=\Phi_{(w;h_1,\dots,h_N)}(f)$ とおく。

任意の $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\Gamma$ に対し

$$0=F\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)-(cz+d)^{2m}F(z)$$

$$=f\left(\cdots,\ s^{-w_i+2\ell}\sum_{p=0}^{\ell}\binom{\ell}{p}\frac{t^p}{w_i\cdots(w_i-\ell+p+1)}\left(\frac{d}{dz}\right)^{\ell-p}h_i(z),\cdots\right)$$

$$-s^{2m}f\left(\cdots,\ \frac{1}{w_i\cdots(w_i-\ell+1)}\left(\frac{d}{dz}\right)^{\ell}h_i(z),\cdots\right)\qquad\text{—— }(*)$$

ここで

$$s=cz+d,\qquad t=-c(cz+d)^{-1}$$

Γ が $SL(2,\mathbb{C})$ 中 Zariski dense だから、任意の $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{C})$ について $(*)$ が成立する。s,t を独立変数と思える。

$$f=\sum_n f^{[n]}\qquad f^{[n]}\in\mathfrak{S}^{[n]}$$

とすれば $(*)$ の右辺

$$=\sum_n\left(s^{-n}\Phi_{(w;h_1,\dots,h_N)}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}f^{[n]}\right)-s^{2m}\Phi_{(w;h_1,\dots,h_N)}\left(f^{[n]}\right)\right)$$

s^{-n} の係数を比較して、$n\neq-2m$ のとき $\Phi_{(w;h_1,\dots,h_N)}(f^{[n]})=0$

となり、はじめから $f\in R^{[-2m]}$ としてよい。次に $s=1$ とおけば

$$\Phi_{(w;h_1,\dots,h_N)}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}f-f\right)=0$$

$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}$ を施すと、

$$\Phi_w(\partial f)=0\text{、従って}\qquad\Phi(\Delta\partial f)=\frac{d}{dz}\Phi(\partial f)=0$$

一方 $w=(-2k_1,\dots,-2k_N)$ は定理1の条件(C)を満たすので

$$f=\sum_{k=0}^{m-1}\Delta^k\varphi_k\qquad\varphi_k\in\mathfrak{S}^{[-2m+2k]}$$

と書ける。一般に $\varphi\in\mathfrak{S}^{[u]}$ に対し

$$\Delta\partial\Delta^k\varphi=k(u-k+1)\Delta^k\varphi$$

よって $\Delta\vartheta f = \sum_{k=0}^{m-1} k(-2m+k+1)\Delta^k\varphi_k$

$= \sum_{k=1}^{m-1} k(-2m+k+1)\Delta^k\varphi_k$

従って $k(-2m+k+1) \neq 0 \quad (1 \leq k \leq m-1)$ より

$\Phi_{(w;h_1,\cdots,h_N)}(\Delta^k\varphi_k) = 0$

よって $\Phi_{(w;h_1,\cdots,h_N)}(f) = \Phi_{(w;h_1,\cdots,h_N)}(\varphi_0)$

そして $\varphi_0 \in \mathfrak{S}^{[-2m]}$ //

§4. 応用II 微分不変式

4.1. Laguerre-Forsyth の標準型

独立変数 u，未知函数 x の n 階線型常微分方程式

$$L_n(p|u,x) = \left(\frac{d}{du}\right)^n x + \sum_{\ell=1}^{n}\binom{n}{\ell}p_\ell(u)\left(\frac{d}{du}\right)^{n-\ell}x = 0$$

を考える。(ここで $p_1,\cdots,p_\ell$ はある領域で正則又は有理型函数)

変数変換 $\rho_{u,\lambda}:(z,y) \longmapsto (u,x) = (u(z),\lambda(z)y)$ により

$L_n(p|u,x)=0$ は、独立変数 z，未知函数 y の n 階線型常微分方程式 $L_n(q|z,y)=0$ に変換される。即ち

$$(5) \qquad \frac{\left(\frac{du}{dz}\right)^n}{\lambda(z)}\left\{\left(\left(\frac{du}{dz}\right)^{-1}\frac{d}{dz}\right)^n(\lambda(z)y) + \sum_{\ell=1}^{n}\binom{n}{\ell}p_\ell(u(z))\left(\left(\frac{du}{dz}\right)^{-1}\frac{d}{dz}\right)^{n-\ell}(\lambda(z)y)\right\}$$

を整理した式

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n y + \sum_{\ell=1}^{n} q_\ell(z)\left(\frac{d}{dz}\right)^{n-\ell}y$$

が $L_n(q|z,y)$ である。$L_n(q|z,y)$ を $\rho_{u,\lambda}^* L_n(p|u,x)$ とも書く。

注7) $\rho_{z,\mu} : (w, v) \longmapsto (z, y) = (z(w), \mu(w)v)$

$\rho_{u,\lambda} \circ \rho_{z,\mu} = \rho_{u,\nu}$ とすれば

$$\rho_{u,\nu}{}^* L_n(p|u,x) = \rho_{z,\mu}{}^*(\rho_{u,\lambda}{}^* L_n(p|u,x))$$
$$= \rho_{z,\mu}{}^* L_n(q|z,y)$$

となる。

うまい $\rho_{u,\lambda}$をとり形を簡単にする事を考えよう。

定義5　$L_n(p|u,x) = \left(\frac{d}{du}\right)^n x + \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell} P_\ell(u) \left(\frac{d}{dz}\right)^{n-\ell} x$

について、$P_1 = 0$の時、半標準型であると呼び、半標準型が更に $P_2 = 0$である時、Laguarre-Forsythの標準型と呼ぶ。

未知函数のみの変換 $\rho_{id,\lambda} \begin{cases} u = u \\ x = \lambda(u) y \end{cases}$ により

$\rho_{id,\lambda}^* L_n(p|u,x)$が半標準型になるのは

$$\lambda(u) = C e^{-\int P_1(u)\,du} \quad \cdots\cdots\cdots (6)$$

となることが必要十分。従って

命題3　$\rho_{id,\lambda}$なる変換の範囲で半標準型は存在して一意。

半標準型に独立変数の変換も許した$\rho_{u,\lambda}$を施すとLaqurre-Forsythの標準型に直せる。即ち

定理4　(Laqurre-Forsyth)

$L_n(p|u,x)$を半標準型とする。

$\rho_{u,\lambda} : (z, y) \longmapsto (u, x) = (u(z), \lambda(z) x)$

が、$\eta' - \frac{1}{2}\eta^2 = \frac{6}{n+1} P_2(u)$,　$\lambda(u) = C z'^{\frac{1-n}{2}}$

(ここで、$\eta = \frac{z''}{z'}$、$'$ は $\frac{d}{du}$ を表わす）を満たす時

$\rho_{u,\lambda}{}^* L_n(p|u,x) = L_n(q|z,y)$ は Lagurre-Forsyth の標準型になる。

また $L_n(p|u,x)$ が Lagurre-Forsyth の標準型のとき

$\rho_{u,\lambda}{}^* L_n(p|u,x)$ が再び L.-F. 標準型になるのは

$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, e \right) \in SL(2,\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times$ をとり $\rho_{u,\lambda}$ が

$$\begin{cases} u = \dfrac{az+b}{cz+d} \\ x = \dfrac{e}{(cz+d)^{n-1}} y \end{cases}$$

となる事が必要かつ十分である。

証明は ㊱[1] P.145 – P.150 参照

4.2 微分不変式

<u>定義 6.</u> $L_n(p|u,x) = \left(\frac{d}{du}\right)^n x + \sum_{l=1}^{n} \binom{n}{l} p_l(u) \left(\frac{d}{du}\right)^{n-l} x$

$\rho_{u,\lambda} : (z,y) \mapsto (u,x) = (u(z), \lambda(z) y)$

$\rho_{u,\lambda}{}^* L_n(p|u,x) = L_n(q|z,y) = \left(\frac{d}{dz}\right)^n y + \sum_{l=1}^{n} \binom{n}{l} q_l(z) \left(\frac{d}{dz}\right)^{n-l} y$

とする。

$P_l^{(i)}$ $(1 \leq l \leq n,\ i = 0,1,2,\cdots)$ を不定元とする多項式

$F(\cdots, P_l^{(i)}, \cdots) \in \mathbb{C}[P_l^{(i)}]$ が重さ m の微分不変式であるとは

$\rho_{u,\lambda}{}^* \left(F\left(\cdots, \left(\frac{d}{du}\right)^i p_l(u), \cdots\right) (du)^m \right) = F\left(\cdots, \left(\frac{d}{dz}\right)^i q_l(z), \cdots\right) (dz)^m$

が、任意の $L_n(p|u,x)$ と $\rho_{u,\lambda}$ について成り立つ時にいう。

また F が重さ m の微分不変式であるとき $F(\cdots,(\frac{d}{du})^j P_i(u),\cdots)(du)^m$ を $L_n(p|u,x)$ の不変 m 重微分形式という。

命題4. $P_1(u),\cdots,P_n(u)$ は $(\frac{d}{du})^j P_i(u)$ $(1\leq i\leq n,\ j=0,1,2,\cdots)$ が代数的独立であると仮定する。$L_n(p|u,x)$ の Laguerre-Forsyth の標準型

$$\rho_{u,\lambda}{}^* L_n(p|u,x)=L_n(q|z,y)=(\frac{d}{dz})^n y+\sum_{l=3}^{n}\binom{n}{l}q_l(z)(\frac{d}{dz})^{n-l}y$$

を一つとる。

多項式 $\varphi(\cdots,Q_l{}^{(k)},\cdots)\in\mathbb{C}[Q_l{}^{(k)}\mid 3\leq l\leq n,\ k=0,1,2,\cdots]$

について

$\varphi(\cdots,(\frac{d}{dz})^k q_l(z),\cdots)(dz)^m$ が $L_n(q|z,y)$ の不変 m 重微分形式

$\Leftrightarrow$ $(\sigma,e)=(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix},e)\in SL(2,\mathbb{C})\times\mathbb{C}^\times$ に対し

$$\rho_{\sigma,e}\begin{cases} z=\dfrac{aw+b}{cw+d}\\ y=\dfrac{e}{(cw+d)^{n-1}}v\end{cases}$$ とおき

$$\rho_{\sigma,e}{}^* L_n(q|z,y)=(\frac{d}{dw})^n v+\sum_{l=3}^{n}\binom{n}{l}r_l(w)(\frac{d}{dw})^{n-l}v$$

とすれば

$$\rho_{\sigma,e}{}^*(\varphi(\cdots,(\frac{d}{dz})^k q_l(z),\cdots)(dz)^m)=\varphi(\cdots,(\frac{d}{dw})^k r_l(w),\cdots)(dw)^m$$

が任意の $(\sigma,e)\in SL(2,\mathbb{C})\times\mathbb{C}^\times$ について成り立つ。

この時、重さ m の微分不変式 $\Psi(\cdots,P_i{}^{(j)},\cdots)$ が一意的に定まり、

$$\rho_{u,\lambda}{}^*(\Psi(\cdots,(\frac{d}{du})^j P_i(u),\cdots)(du)^m)=\varphi(\cdots,(\frac{d}{dz})^k q_l(z),\cdots)(dz)^m$$

(証明) ⇒と後半は定義と$(\frac{d}{du})^j P_i$ が代数的独立であるから明らか。

⇐については ㉟[ ] P.157 − P.159 参照 //

この命題4により，不変m重微分形式は，$\varphi(\cdots, Q_\ell^{(k)}, -)$
$\in \mathbb{C}[Q_\ell^{(k)} \mid 3 \le \ell \le n,\ k=0,1,2,\cdots]$ であって次の性質を持つものを見つける事に帰着される。

$L_n(q|z,y)$，$L_n(r|w,v) = \rho_{(\sigma,e)}^{*} L_n(q|z,y)$ $((\sigma,e) \in SL(2,\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times)$
を Laqurre-Forsyth の標準型とする。

$\rho_{(\sigma,e)}^{*}\left(\varphi(\cdots,(\frac{d}{dz})^k q_\ell(z),\cdots)(dz)^m\right) = \varphi(\cdots,(\frac{d}{dw})^k r_\ell(v),-)(dw)^m$
が任意の $L_n(q|z,y)$ と $(\sigma,e) \in SL(2,\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times$ について成り立つ。
このようなφもm重不変式と呼ぶことにする。

注8) $r_3(w),\cdots,r_n(w)$ は σのみによりeには無関係に定まる。

$\mathbb{C}[Q_\ell^{(k)}]$上の derivation Y_1, Y_2 を

$$Y_1 = \sum_{\ell=3}^{n} \sum_{k=0}^{\infty} (\ell+k) Q_\ell^{(k)} \frac{\partial}{\partial Q_\ell^{(k)}}$$

$$Y_2 = \sum_{\ell=3}^{n} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\ell(\ell-1) Q_{\ell-1}^{(k)} + k(2\ell+k-1) Q_\ell^{(k-1)} \right) \frac{\partial}{\partial Q_\ell^{(k)}}$$

とおく。

<u>補題3.</u>

$\varphi \in \mathbb{C}[Q_\ell^{(k)}]$ がm重微分不変式 $\Leftrightarrow \begin{cases} Y_1\varphi = m\varphi \\ Y_2\varphi = 0 \end{cases}$

(証明) $\varphi(\cdots,(\frac{d}{dz})^k q_\ell,\cdots) \in \mathbb{C}[Q_\ell^{(k)}]$ と $(\sigma,e) \in SL(2,\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times$
に対して，

$$\omega(\sigma) = (\rho_{\sigma,e}^{-1})^* \left(\varphi(\cdots, (\tfrac{d}{dw})^* r_\ell, \cdots)(dw)^m \right)$$

とおく。ここで $\rho_{\sigma,e}{}^* L_n(q|z,y) = L_n(r|w,v)$.

$\omega = \omega((\,^1_0\,^0_1))$ とおく。(注8より $\omega(\sigma)$ は e のとり方によらぬ)

φ が m 重不変式であることと

$$\omega(\exp tX) = \omega \quad (\forall t \in \mathbb{C},\ \forall X \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))$$

は同値。これは

$$\frac{d}{dt}\omega(\exp tX) = 0 \quad (\forall X \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))$$

実は $\frac{d}{dt}\omega(\exp tX)\Big|_{t=0} = 0$ と同値

[∵ $t = t_0$ での微分を考える。$\sigma = \exp t_0 X$ とおく。

$\rho_{\sigma,e}{}^* L_n(q|z,y) = L_n(r|w,v)$,

$\omega'(\exp tX)$ を $\omega(\exp tX)$ の時と同様に定義したもの

とすれば $\omega(\exp(t+t_0)X) = (\rho_{\sigma,e}^{-1})^* \omega'(\exp tX)$

よって $\frac{d}{dt}\omega(\exp(t+t_0)X)\Big|_{t=0} = (\rho_{\sigma,e}^{-1})^* \left(\frac{d}{dt}\omega'(\exp tX)\Big|_{t=0}\right)$

$= 0$]

さて $X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ に対し

$$\frac{d}{dt}\omega(\exp tX)\Big|_{t=0}$$
$$= \left\{ 2(-\gamma z + \alpha)(Y_1\varphi - m\varphi)(\cdots, (\tfrac{d}{dz})^i q_\ell(z), \cdots) - \gamma Y_2\varphi(\cdots, (\tfrac{d}{dz})^i q_\ell, \cdots) \right\} (dz)^m$$

任意の α, γ について成立するには

$$Y_1\varphi = m\varphi, \quad Y_2\varphi = 0$$

($q_3(z), \cdots, q_n(z)$ を $(\frac{d}{dz})^i q_\ell(z)$ が代数的独立になるようなものがあるから。)

命題5. $3 \leq m \leq n$ に対し

$$\theta_m = \frac{(m-2)!\, m!}{2(2m-3)!} \sum_{k=0}^{m-3} (-1)^k \frac{(2m-k-2)!}{(m-k-1)!\,(m-k)!\,k!} Q_{m-k}^{(k)}$$

とおくと

θ_m は m 重微分不変式である。特に $\theta_3 = Q_3$ は3重微分不変式

$\theta_3, \cdots, \theta_n$ を基本微分不変式と呼ぶ。

$\mathbb{C}[Q_\ell^{(k)}]$ は $D(Q_\ell^{(k)}) = Q_\ell^{(k+1)}$ で決まる derivation により differential algebra とみなせる。 $\theta_m^{(k)} = D^k(\theta_m)$ とおくと、$\mathbb{C}[\theta_m^{(k)}] = \mathbb{C}[Q_\ell^{(k)}]$ である。微分不変式を θ_m の微分多項式で表わしてみると、

定理5. $w = (w_3, \cdots, w_n) = (-6, -8, \cdots, -2n)$ とおく。

$F(\cdots, \xi_\ell^{(k)}, \cdots) \in \mathbb{C}[\xi_\ell^{(k)}]$ について

$F\left(\cdots, \dfrac{\theta_\ell^{(k)}}{w_\ell(w_\ell - 1)\cdots(w_\ell - k + 1)}, \cdots\right)$ が重さ m の微分不変式

$\Leftrightarrow$ $F \in \mathfrak{S}^{[-2m]}$

証明は ③ [1] P.164 – P.167 を参照

4.3 射影曲線の不変量

$\mathbb{P}^{n-1}$ 内の曲線

$\varphi : D \ni z \longmapsto (\varphi_0(z) : \cdots : \varphi_{n-1}(z)) \in \mathbb{P}^{n-1}$

を考える。（ D は $\mathbb{C}$ 内のある領域 ）

$\varphi_0, \cdots, \varphi_{n-1}$ は線型独立と仮定する。

$$\begin{pmatrix} P_1(z) \\ \vdots \\ P_n(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \binom{n}{1}\left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1}\varphi_0, & \cdots, & \varphi_0 \\ \vdots & & \vdots \\ \binom{n}{1}\left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1}\varphi_{n-1}, & \cdots, & \varphi_{n-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \left(\frac{d}{dz}\right)^n \varphi_0 \\ \vdots \\ \left(\frac{d}{dz}\right)^n \varphi_{n-1} \end{pmatrix}$$

とおけば

$\varphi_0, \cdots, \varphi_{n-1}$ は $L_n(P \mid z, y) = 0$ の基本解になる。

$L_n(P \mid z, y)$ の m 重微分不変型式は局所座標 z や射影変換によらない。つまりこの射影曲線の射影不変量を与える。$\theta_3, \cdots, \theta_n$ を基本不変式とすると、$\Omega_3 = \theta_3 (dz)^3, \cdots, \Omega_n = \theta_n (dz)^n$ を基本微分型式と呼ぶ。genus g が 3 以上の代数函数体 F（定数体は $\mathbb{C}$）に対し、対応するリーマン面 M の $\mathbb{P}^{g-1}$ への cannonical map に関する基本微分型式は有理多重微分型式を与える。これは一変数代数函数体の双有理不変量を与える。この基本微分型式について次が成り立つ。

命題6. F : genus $g \geq 3$ の $\mathbb{C}$ 上の1変数代数函数体について (1), (2) は同値

(1) すべての基本微分型式は 0 である。

(2) F は hyper elliptic

§5. 終わりに

微分不変式については Wilczynski（㊱ [63]）を参照。不変式論的なアプローチはあまりなされていないようである。その方面の応用として

寺西鎮男：Fricke path について
代数幾何学シンポジウム記録（城崎町
1978年12月）
がある。