数理解析研究所講究録
第444巻 1981年 118-141

巾零行列からなる共役類の閉包の定義 ideal と Weyl 群の表現について

東北大学 理学部 谷崎俊之

§0. 序

複素数体上の単純Lie環に対して、そのadjoint表現での不変式環とnilpotent varietyの関係を記述するKostantの古典的な結果[11]は、その後対称空間等に対する拡張が与えられ（Kostant－Rallis[12], Vinberg[22]）、また特異点理論等へ応用されて、威力を発揮している。（Brieskorm[2], Slodowy[18]）

最近De Concini－Procesiの論文[3]において、Weyl群の表現とも関連して、Kostantの結果をある方向で拡張しようとする試みが行なわれ、A_n型単純Lie環に対してある結果が得られたので、これを解説する。主要結果は§4の定理1及び§5の定理2であるが、ここではDe Concini－Procesiの原論文[3]とは少し違う方法で証明を与える。特に定理2の証明は原論文の証明に比べて非常に簡単になっている。

この小文を書くにあたり、Springer表現の事等々親切に

教えて下さった堀田良之先生に感謝します。

§1. Kostant の結果 [11] の復習

G を $\mathbb{C}$ 上の reductive な連結線型代数群，T を G の極大 torus とし，その Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{t}$ とする。また $\mathfrak{g}$ 中の nilpotent element 全体のつくる $\mathfrak{g}$ の subvariety を N とする。このとき N の定義 ideal $I(N) := \{f \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}] \mid f|_N = 0\}$ は，次の様に不変式環を用いて記述される。すなわち，G の $\mathfrak{g}$ 上での adjoint 表現での不変式環を $\tilde{J} = \mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G$ とするとき，$\tilde{J}$ は $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]$ の graded subalgebra であるが，$\tilde{J}^+ = \bigoplus_{k>0} (\tilde{J})_k$ とおくとき，

定理 (Kostant)

$$I(N) = \mathbb{C}[\mathfrak{g}]\,\tilde{J}^+$$

(従って，adjoint 表現に関して，N は Mumford [17] の意味での unstable point の全体になっている。)

また $\tilde{J}$ は algebra として，有限個の斉次代数独立な生成系 $f_1, f_2, \dots, f_\ell$ ($\ell = \dim T$) を持つので

$$I(N) = (f_1, \dots, f_\ell)$$

となる。

さて $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{t}$ に関する Weyl 群を W として，$J = \mathbb{C}[\mathfrak{t}]^W$ とおくとき，$\tilde{J}$ と J の間に次の関係が成立する。

<u>定理</u> (Chevalley)

制限写像を $\mathbb{C}[\mathfrak{g}] \xrightarrow{\delta} \mathbb{C}[\mathfrak{t}]$ とするとき

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}[\mathfrak{g}] \arrow[r, "\delta"] & \mathbb{C}[\mathfrak{t}] \\
\tilde{J} \arrow[u, hook] \arrow[r, "\sim"] & J \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

である。

いま J は graded algebra なので同様に J^+ を定義すると、次の事はよく知られている。

<u>命題</u>

$$\mathbb{C}[\mathfrak{t}]/\mathbb{C}[\mathfrak{t}]J^+ \cong H^*(G/B,\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}[W] \quad (W\text{-加群として})$$

(ただし，B は T を含む Borel 部分群とする。)

さて algebra $\mathbb{C}[\mathfrak{t}]/\mathbb{C}[\mathfrak{t}]J^+$ は、次の様に幾何学的に解釈できる。
$\mathbb{C}[\mathfrak{t}] = \mathbb{C}[\mathfrak{g}]/I(\mathfrak{t})$ ($I(\mathfrak{t})$ は $\mathfrak{t}$ の定義 ideal) なので

$$\mathbb{C}[\mathfrak{t}]/\mathbb{C}[\mathfrak{t}]J^+ \cong \mathbb{C}[\mathfrak{g}]/I(\mathfrak{t})+\mathbb{C}[\mathfrak{g}]\tilde{J}^+ = \mathbb{C}[\mathfrak{g}]/I(\mathfrak{t})+I(N)$$

である。よって $\mathbb{C}[\mathfrak{t}]/\mathbb{C}[\mathfrak{t}]J^+$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環 $\mathfrak{t}$ と nilpotent variety N との scheme 論的な意味での intersection $\mathfrak{t}\cap N$ の関数環 $\mathbb{C}[\mathfrak{t}\cap N]$ になっている。$\mathfrak{t}$ と N の集合論的な意味での intersection は $\{0\}$ なので $\mathfrak{t}\cap N$ は原点 $\{0\}$ の上に support を持つ non-reduced な scheme である。

(この節で述べた事のA型での実例については §3.1 を参照されたい。)

§2. 問題の定式化

nilpotent variety N は G の作用に関して有限個の共役類にわかれるが、このうちで最も次元の高い共役類が唯一つあり、この共役類に含まれる $X \in \mathfrak{g}$ を regular nilpotent element という。一般の $X \in \mathfrak{g}$ に対して $O_X = \mathrm{Ad}(G)\cdot X$ と書くとき、X が regular nilpotent ならば $N = \overline{O_X}$ である。我々の目標は§1 に於ける N を一般の $X \in N$ に対する $\overline{O_X} \subset N$ で置き換えたとき、§1. での話がどの様に拡張されるかを調べる事である。勝手な $X \in N$ に対しても $\mathbb{C}[\mathfrak{h} \cap \overline{O_X}]$ $\left(= \mathbb{C}[\mathfrak{g}]/I(\mathfrak{h}) \cap I(\overline{O_X}) = \mathbb{C}[\mathfrak{h}]/\varrho(I(\overline{O_X}))\right)$ には自然に W－加群の構造が入る。

問題 1. $\mathbb{C}[\mathfrak{h} \cap \overline{O_X}]$ の W－加群としての構造を求めよ。

Weyl 群の表現についてはこれまで多くの研究があり、各 nilpotent conjugacy class に対して種々の cohomology を使って幾つかの方法で表現の構成がなされている。
(Cf. Springer [20], [21], Slodowy [19], Kazhdan－Lusztig [9], Lusztig [16])

問題 2. $\mathbb{C}[\mathfrak{h} \cap \overline{O_X}]$ と Springer 表現 ([20], [21]) との間に何らかの関係があるか。

さて $\mathbb{C}[\mathfrak{h} \cap \overline{O_X}]$ を調べるためには、$\overline{O_X}$ の定義 ideal $I(\overline{O_X})$ を調べたい訳である。

問題 3. $I(\overline{O_X})$ を求めよ。具体的には ideal $I(\overline{O_X})$ の有限個

からなる生成系 $f_1,\cdots,f_r$ を与えよ。

§1. で述べた様に X が regular nilpotent なときには問題3に対する答はあるが、一般の $X\in N$ に対しては、解答は知られていない。(A_n 型のときでもない。)

以下紹介する De Concini — Procesi の結果は $G=GL_n(\mathbb{C})$ のときに、上の問題1及び2に対する答を与えるものである。§3 以降では $G=GL_n(\mathbb{C})$ のときのみ扱う。

§3. $GL_n(\mathbb{C})$ の nilpotent variety

3.1 $G=GL_n(\mathbb{C})$, $T=\left\{\begin{bmatrix} g_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & g_n\end{bmatrix} \middle| g_i\in\mathbb{C}^\times\right\}$ とおくときその Lie 環は $\mathfrak{g}=M_n(\mathbb{C})$, $\mathfrak{t}=\left\{\begin{bmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n\end{bmatrix} \middle| x_i\in\mathbb{C}\right\}$ となる。また $g\in G$, $X\in\mathfrak{g}$ に対して $\mathrm{Ad}(g)\cdot X = gXg^{-1}$ であり、nilpotent variety N は $N=\{$巾零行列$\}=\{$固有値が全て 0 である行列$\}$ で与えられる。$\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{t}$ に関する Weyl 群を W とするとき、W は n次対称群 S_n と同型でその $\mathfrak{t}$ への作用は、

$$w\cdot\begin{pmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{w^{-1}(1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_{w^{-1}(n)}\end{pmatrix}$$

となる。さらに $X\in\mathfrak{g}$ に対して

$$\det(tI-X) = t^n - f_1(X)t^{n-1} + f_2(X)t^{n-2} - \cdots + (-1)^n f_n(X)$$

$$(f_1(X)=\mathrm{Trace}(X),\quad f_n(X)=\det X)$$

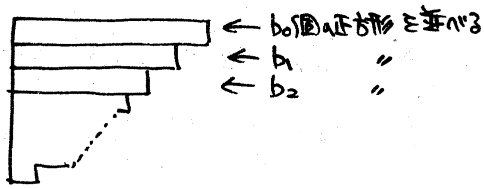
とおくとき $\tilde{J}=\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G=\mathbb{C}[f_1,\cdots,f_n]$, $J=\mathbb{C}[\mathfrak{t}]^W=\mathbb{C}[f_1|_{\mathfrak{t}},\cdots,f_n|_{\mathfrak{t}}]$ となる。ここで $f_i\begin{pmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n\end{pmatrix}$ は $x_1,\cdots,x_n$ の i次基本対称式である事に注意しておく。

3.2 nilpotent conjugacy class の parametrization

$X, Y \in \mathfrak{g} = M_n(\mathbb{C})$ が共役であるためにはその Jordan 標準形が一致する事が必要十分なので {nilpotent conjugacy class} は n の分割の集合と1対1に対応する事がわかる。ここで、n の分割とは、自然数からなる有限列 $\alpha = (b_0 \geq b_1 \geq \cdots\cdots)$ であって $\sum_i b_i = n$ なるものとする。n の分割 $\alpha = (b_0 \geq b_1 \geq \cdots)$ に対して

$$X \underset{GL_n(\mathbb{C})}{\sim} \begin{bmatrix} N_{b_0} & & \\ & N_{b_1} & \\ & & \ddots \end{bmatrix}, \quad N_\ell = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}}^{\ell}$$

となる X を Type α の nilpotent element という事にして、Type α の nilpotent element 全体からなる共役類を $\mathcal{O}_\alpha$ とかく。



また $\alpha = (b_0 \geq b_1 \geq \cdots)$ を図式的に表わすときに、右図の様な大きさが n の Young 図形で書く。以上まとめて

$$\{\text{nilpotent conjugacy class}\} \leftrightarrow \{n \text{ の分割}\} \leftrightarrow \{\text{大きさ } n \text{ の Young 図形}\}$$

また、n の分割 $\alpha = (b_0 \geq b_1 \geq, \cdots\cdots)$ に対してその双対分割 $\check{\alpha} = (c_0 \geq c_1 \geq \cdots\cdots)$ を $c_i = \#\{j \mid b_j \geq i+1\}$ で定義する。

operation $\alpha \longmapsto \check{\alpha}$ は Young 図形の転置に対応する。

3.3 closure relation

n の分割全体の集合に次の様な半順序をいれる。

定義 $\alpha = (b_0 \geq b_1 \geq \cdots)$, $\tau = (b_0' \geq b_1' \geq \cdots)$ に対して

$\alpha \geq \tau \iff \sum_{\ell=0}^{j} b_\ell \geq \sum_{\ell=0}^{j} b'_\ell$ (ただし長さが違うときには、適

当に 0 を補って考えるものとする。）

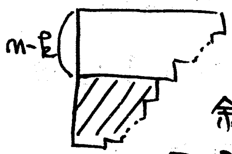
<u>命題</u>（Gerstenhaber [4], Cf. 草場 [15]）

$$\sigma \succ \tau \iff \tau' \succ \sigma' \iff \overline{O_\sigma} \supset O_\tau$$

簡単にこの命題の証明を述べよう。以下述べる証明は [4] の証明とは違う。$\sigma \succ \tau \iff \tau' \succ \sigma'$ は Young 図形の対応を調べればわかるので $\sigma \succ \tau \iff \overline{O_\sigma} \supset O_\tau$ を示せばよい。

（$\overline{O_\sigma} \supset O_\tau \Longrightarrow \sigma \succ \tau$ の証明）

一般に $X \in \mathfrak{g}$ に対して $d_\ell^X(t) := ((tI-A)$ の ℓ 次小行列式の最大公約式$)$ とおくとき，$\sigma = (b_0 \geqq b_1 \geqq \cdots)$ に対して $X \in O_\sigma$ ならば $d_\ell^X(t) = t^{U_\sigma(\ell)}$（ただし $U_\sigma(\ell) = b_{m-\ell} + b_{m-\ell+1} + \cdots\cdots$）となる事がわかる。



斜線部分の面積が $U_\sigma(\ell)$

$X \in O_\sigma$, $X' \in O_\tau$, $\overline{O_\sigma} \supset O_\tau$ ならば $d_\ell^X(t) \mid d_\ell^{X'}(t)$ $(\ell = 1, 2, \cdots, m)$ なので、$U_\sigma(\ell) \leqq U_\tau(\ell)$ $(\forall \ell)$，よって $\sigma \succ \tau$ である。

（$\sigma \succ \tau \Longrightarrow \overline{O_\sigma} \supset O_\tau$ の証明）

簡単な考察により、$b_\ell = b'_\ell$ $(\ell \neq i, j)$, $b_i = p$, $b_j = q$, $b'_i = p-1$, $b'_j = q+1$ $(p \geqq q+2)$ のとき示せばよい事がわかる。よってさらに $\sigma = (p \geqq q)$，$\tau = (p-1 \geqq q+1)$（ただし $p \geqq q+2$）のときに示せばよい。

$$X_\varepsilon = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\qquad\quad}^{p-1} & \overbrace{\quad}^{q+1} \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{matrix} & \varepsilon \\ \hline & \begin{matrix} 0 & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & 0 \end{matrix} \end{array}\right] \end{array}$$

とおくとき $\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \neq 0 \Longrightarrow X_\varepsilon \in O_\sigma \\ \varepsilon = 0 \Longrightarrow X_\varepsilon \in O_\tau \end{array} \right.$ なので $\overline{O_\sigma} \supset O_\tau$

（証明おわり）

上の証明から次の事がわかる。

系 $X\in\overline{O_\alpha} \Longleftrightarrow (tI-X)$ の k 次小行列式は全て $t^{u_\alpha(k)}$ でわりきれる。
$({}^\forall k=1,2,\cdots,n)$

いま n の分割 α に対して $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]=\mathbb{C}[X_{ij}\mid 1\leqq i,j\leqq n]$ の有限部分集合 $\{f_i^\alpha\}$ を

$$\{f_i^\alpha\}=\left\{\begin{array}{c}(tI-(X_{ij}))\text{ の } k \text{ 次小行列式の}\\ t^m\text{ の係数}\end{array}\;\middle|\;\begin{array}{l}k=1,\cdots,n\\ m\leqq u_\alpha(k)-1\end{array}\right\}$$

により定義すると

系 $X\in\overline{O_\alpha} \Longleftrightarrow f_i^\alpha(X)=0\quad({}^\forall i)$

De Concini–Procesi の原論文[3]では、全く別の方法により
$X\in\overline{O_\alpha} \Longleftrightarrow g_i^\alpha(X)=0\quad({}^\forall i)$ となる $\{g_i^\alpha\}$ を構成して §2 の
問題3に関して次の予想をしている。

予想 (De Concini–Procesi) $\quad I(\overline{O_\alpha})=(g_i^\alpha)$

ここでは、次の予想を記しておく。

予想 (谷崎) $\quad I(\overline{O_\alpha})=(f_i^\alpha)$

§4. $\mathbb{C}[\mathfrak{t}\cap\overline{O_\alpha}]$ のW-加群としての構造

4.1 簡単のため $\mathbb{C}[\mathfrak{t}\cap\overline{O_\alpha}]=\mathbb{C}[X_{ij}]\big/ I(\mathfrak{t})+I(\overline{O_\alpha})$ を
A_α と記す事にする。

定理1 $A_\alpha \cong \mathrm{Ind}_{H_{\check{\alpha}}}^{S_n}(1_{H_{\check{\alpha}}})\quad$ (W-加群として)

(ここで $\check{\alpha}=(c_0\geqq c_1\geqq\cdots)$ に対して $H_{\check{\alpha}}=S_{c_0}\times S_{c_1}\times\cdots\subset S_n$)

系 $\dim A_\alpha = \binom{n}{\alpha} := \dfrac{n!}{c_0!\,c_1!\cdots\cdots}$

定理1の証明は、次の2段階にわけられる。

① $A_\alpha \hookleftarrow \mathrm{Ind}_{H_\alpha}^{S_n}(1_{H_\alpha})$ を示す。

② §3.3 で与えた $\{f_i^\alpha\} \subset I(\overline{O_\alpha})$ に対して

$\overline{A_\alpha} = \mathbb{C}[X_{ij}]/_{(f_i^\alpha)+I(\phi)}$ とおくとき $\dim \overline{A_\alpha} \leqq \binom{n}{\alpha}$

A_α は $\overline{A_\alpha}$ の quotient になっているので①,②から定理1が従う事は明らかである。①は Kraft [13] に証明してあるらしい。今のところこの preprint が手に入ってないので、よくわからないが、Borho－Kraft [1] の結果を用いるらしい。[1] では、共役類の閉包が normal variety であるという仮定のもとで、種々の事を証明しているが、Kraft－Procesi [14] で A_n 型のときは任意の $\overline{O_\alpha}$ が normal になる事が示されたので、[1] の結果がそのまま使える。(ただし、一般の単純 Lie 環の nilpotent conjugacy class の場合は、その閉包が normal variety になるとは限らない。反例についても Kraft－Procesi [14] を見よ。)

4.2 以下②を示す。De Concini－Procesi [3] では、別の $\{g_i^\alpha\} \subset I(\overline{O_\alpha})$ を用いて議論しているが、ここでは §3.3 で与えた $\{f_i^\alpha\}$ でも同様にできる事を示す。

記号 • $A^{(m)} = \mathbb{C}[X_1,\dots,X_m] = \mathbb{C}[X]$

• $\alpha = (b_0 \geq b_1 \geq \cdots)$ に対して

$$K_\alpha = \left(\begin{array}{c|c} (t-X_{i_1})\cdots\cdots(t-X_{i_k}) \in A^{(m)}[t] & k=1,2,\dots,m \\ \text{の } t^m \text{ の係数} & 1\leq i_1<\cdots<i_k\leq m \\ & m \leq u_\alpha(k)-1 \end{array}\right)$$

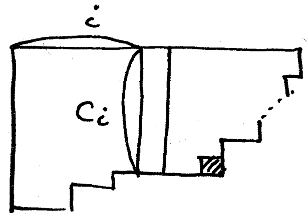
このとき $\overline{A_\alpha} = \overline{A_\alpha^{(m)}} = A^{(m)}/K_\alpha$ であるが、我々の示したいのは次の事であった。

主張 $\dim_{\mathbb{C}} \overline{A_\alpha} \leq \binom{m}{\alpha}$

証明は m に関する帰納法による。$m=1$ のときは明らかなので、以下 $m \geq 2$ として $(m-1)$ まで主張が正しいとする。

定義 m の分割 $\alpha=(b_0 \geq b_1 \geq \cdots)$ があるとき、$c_i \neq 0$ なる i に対して $(m-1)$ の分割 α^i を次の様に定義する。

α に対応する Young 図形が右図で与えられているとき、▨のところの box を除いて得られる Young 図形に対応する $(m-1)$ の分割を α^i とする。



定義 algebra homomorphism $A^{(m)} \xrightarrow{\Phi} A^{(m-1)}$ を

$X_j \mapsto X_j$ $(j \neq m)$, $X_m \mapsto 0$ により定義する。

以下の方針は次のとおり。

(I) Φ は $\overline{A_\alpha^{(m)}} \xrightarrow{\Phi_i} \overline{A_{\alpha^i}^{(m-1)}}$ なる全射準同型を引きおこす。

(II) $\overline{A_\alpha^{(m)}}$ の ideal J_i を $J_i = \overline{A_\alpha^{(m)}}\cdot X_m^i$ により定義するとき J_i/J_{i+1} は $\overline{A_\alpha^{(m)}}$−加群だが、さらに $\overline{A_{\alpha^i}^{(m-1)}}$−加群の構

造が入る。(i.e. $(\mathrm{Ker}\,\Phi_i)\cdot X_m^{i} \subset (X_m^{i+1})$)

(III) $c_i = 0$ のとき $J_i = 0$ (i.e. $X_m^{i} = 0$ in $\overline{A_\alpha^{(m)}}$)

(I), (II), (III) から主張が示される事を見ておこう。J_i/J_{i+1} は $\overline{A_{\alpha^i}^{(m-1)}}$ - module として single generator を持つので、

$\dim (J_i/J_{i+1}) \leqq \dim \overline{A_{\alpha^i}^{(m-1)}} \leqq \binom{m-1}{\alpha^i}$ (∵ 帰納法の仮定)

よって $\dim \overline{A_\alpha^{(m)}} = \sum_{\substack{i \geq 0 \\ c_i \neq 0}} \dim (J_i/J_{i+1}) \leqq \sum_i \binom{m-1}{\alpha^i} = \binom{m}{\alpha}$ となる。

(III) の証明は (II) の証明の一部分に含まれるので (I) (II) を示せばよい。

α^i の定義から、次の補題はすぐわかる。

<u>補題</u>　$1 \leqq k \leqq m$, $u_\alpha(k) \geqq 1$　$1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqq m$ として、

$(t - X_{i_1}) \cdots\cdots (t - X_{i_k})$ の t^m の係数を D_m とする。

(i) $i_k = m$ のとき

$$\Phi(D_m) \in [K_{\alpha_2} \text{ の generator system}] \Leftrightarrow \begin{cases} m \leqq u_\alpha(k) & (k \leqq m - c_i) \\ m \leqq u_\alpha(k) - 1 & (k > m - c_i) \end{cases}$$

(ii) $i_k < m$ のとき

$$\Phi(D_m) \in [K_{\alpha_2} \text{ の generator system}] \Leftrightarrow \begin{cases} m \leqq u_\alpha(k+1) - 1 & (k < m - c_i) \\ m \leqq u_\alpha(k+1) - 2 & (k \geqq m - c_i) \end{cases}$$

よって (I) の正しい事がわかる。また $\overline{A_\alpha^{(m)}}$ の ideal $\mathrm{Ker}\,\Phi_i$ は次の様な生成系を持つ事もわかる。

補題 $\mathrm{Ker}\,\Phi_i = (X_m)$

$$+\left(\begin{matrix}(t-X_{c_1})\cdots(t-X_{c_k})\text{の}\\ t^m\text{の係数}\end{matrix}\;\middle|\;\begin{matrix}c_k<m\\ m\leqq u_\alpha(k+1)-1\ \ (k\leqq m-c_i-1)\\ m\leqq u_\alpha(k+1)-2\ \ (k\geqq m-c_i)\end{matrix}\right)$$

$$+\left(\begin{matrix}(t-X_{c_1})\cdots(t-X_{c_k})\text{の}\\ t^{u_\alpha(k)}\text{の係数}\end{matrix}\;\middle|\;\begin{matrix}c_k=m\\ k\leqq m-c_i\end{matrix}\right)$$

(II) を示すには，$(\mathrm{Ker}\,\Phi_i)X_m^i\subset(X_m^{i+1})$ (in $\overline{A_\alpha^{(m)}}$) を示せばよい。すなわち，次の事を示せばよい。

補題

(i) $X_m^i(t-X_{c_1})\cdots(t-X_{c_k})$ の t^m の係数 $\in(X_m^{i+1})$ (in $\overline{A_\alpha^{(m)}}$)

ただし $c_k<m$，$m\leqq u_\alpha(k+1)-1$ $(k\leqq m-c_i-1)$

$m\leqq u_\alpha(k+1)-2$ $(k\geqq m-c_i)$

(ii) $X_m^i(t-X_{c_1})\cdots(t-X_{c_k})$ の $t^{u_\alpha(k)}$ の係数 $\in(X_m^{i+1})$ (in $\overline{A_\alpha^{(m)}}$)

ただし $c_k=m$，$k\leqq m-c_i$

(証明) 以下の議論は全て $\overline{A_\alpha^{(m)}}[t]$ で考える事とする。

まず (i) を示す。$(t-X_{c_1})\cdots(t-X_{c_k})=t^k+a_{k-1}t^{k-1}+\cdots+a_1t+a_0$ とおく。$\overline{A_\alpha^{(m)}}[t]$ 中で考えているので

$$(t-X_m)(t-X_{c_1})\cdots(t-X_{c_k})=(t-X_m)(t^k+a_{k-1}t^{k-1}+\cdots+a_0)$$

の t^m の係数は全て 0 である。(ただし $m\leqq u_\alpha(k+1)-1$)

よって展開すると

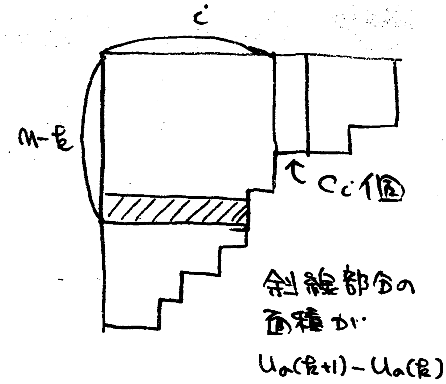
$$-a_0X_m=0$$

$$a_0-a_1X_m=0$$

$$a_1 - a_2 X_n = 0$$

$$\vdots$$

$$a_{u_a(k+1)-2} - a_{u_a(k+1)-1} X_n = 0$$



$$a_m X_n^{i} = a_{m+1} X_n^{i+1} \in (X_n^{i+1})$$
$$(m \leqq u_a(k+1)-2)$$

なので $k \leqq n - c_i - 1,\ m = u_a(k+1)-1$ としてよい。このとき $u_a(k+1) - u_a(k) \leqq i$ である。(上図参照)

よって $a_{u_a(k+1)-1} X_n^{i} = a_{u_a(k+1)-2} X_n^{i-1}$

$$\vdots$$

$$= a_{u_a(k)-1} X_n^{i-(u_a(k+1)-u_a(k))}$$

$a_{u_a(k)-1} = 0$ in $\overline{A_\sigma^{(a)}}$ なので (i) が示された。

次に (ii) を示す。$(t - X_{i_1})\cdots(t - X_{i_{k-1}}) = t^{k-1} + b_{k-2}t^{k-2} + \cdots + b_0$ とおく。$(t - X_{i_1})\cdots(t - X_{i_k}) = (t - X_n)(t^{k-1} + b_{k-2}t^{k-2} + \cdots + b_0)$ なので

$$\left((t - X_{i_1})\cdots(t - X_{i_k}) \text{ の } t^{u_a(k)} \text{ の係数}\right) \cdot X_n^{i}$$
$$= b_{u_a(k)-1} X_n^{i} - b_{u_a(k)} X_n^{i+1}$$

となるが、$k-1 \leqq n - c_i - 1$ なので (i) により $b_{u_a(k)-1} X_n^{i} \in (X_n^{i+1})$

よって (ii) も示された。　　　　(証明おわり)

<u>注意</u>　定理1の証明から $A_a = \bigoplus_i X_n^{i} A_{\sigma_i}^{(n-1)}$ と書ける事がわかる。これから帰納的に A_a の base が与えられる。特に graded algebra A_a の最高次の部分の基底は、type a の

Young 図形上の standard tableaux と1対1に自然に対応してあたえられる。§5の定理2からもわかるが、A_α の最高次の部分は W-加群としては $\alpha^\vee$ に対応する既約表現(Cf. 岩堀[7], 彌永-杉浦[8])になっている。また standard tableaux によりあたえられる base は、いわゆる Young の標準基底(Cf. 彌永-杉浦[8])になっている様である。

§5. Springer 表現との関係

5.1 代数多様体 $\mathcal{B}$ とその cohomology 環 $H^*(\mathcal{B})$ について。

$G = GL_n(\mathbb{C}) = GL(V)$ $(V = \mathbb{C}^n)$ として V の complete flag の全体を $\mathcal{B}$ と書く。すなわち

$$\mathcal{B} = \{(0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = V) \mid \dim V_i = i \ (\forall i)\}$$

いま、$B = \{(g_{ij}) \in GL_n(\mathbb{C}) \mid g_{ij} = 0 \ (i > j)\}$ とおくとき B は G の Borel 部分群であるが、次の様な1対1の対応がある。

$$\begin{array}{ccccc} \{G\text{の Borel 部分群}\} & \leftrightarrow & G/B & \leftrightarrow & \mathcal{B} \\ \psi & & \psi & & \psi \\ gBg^{-1} & \leftrightarrow & gB & \leftrightarrow & \{(V_i) \mid V_i = \bigoplus_{j=1}^{i} \mathbb{C}ge_j\} \end{array}$$

(ただし、$\mathbb{C}^n$ の standard base を $e_1, \cdots, e_n$ とする。)

さて G/B は非特異射影代数多様体なので、$\mathcal{B}$ にも非特異射影代数多様体の構造が入る。また $\mathcal{B}$ の cohomology 環 $H^*(\mathcal{B}) = H^*(\mathcal{B}, \mathbb{C})$ は次の様に記述できる。$\mathcal{B}$ 上の Trivial vector bundle

$\mathcal{B}\times V$ の k 次元の subbundle で各点 $(V_i)\in\mathcal{B}$ での fibre が V_k になっているものを、記号を乱用してまた V_k と書く事にし、line bundle V_k/V_{k-1} の Chern 類を $\overline{x}_k\in H^2(\mathcal{B})$ とする。

命題（Cf. Kleiman [10]）

i) cohomology 環 $H^*(\mathcal{B})$ は $\overline{x}_1,\cdots,\overline{x}_m$ で生成される。

ii) 多項式環 $\mathbb{C}[\mathfrak{t}]=\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_m]$ から $H^*(\mathcal{B})$ への準同型

$$\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_m]\xrightarrow{\ \pi\ }H^*(\mathcal{B})\qquad(\pi(x_i)=\overline{x}_i)$$

の Kernel は ideal として $x_1,\cdots,x_m$ の基本対称式 $f_1,\cdots,f_m$ により生成される。

従って環同型

$$\mathbb{C}[\mathfrak{t}\cap N]=\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_m]/(f_1,\cdots,f_m)\xrightarrow[\sim]{\ \overline{\pi}\ }H^*(\mathcal{B})$$

が得られた。

5.2　Springer 表現

$\mathcal{B}$ には次の様にして Weyl 群 $W=\mathfrak{S}_m$ の右からの作用が定義できる。$(V_i)\in\mathcal{B}$ とするとある $g\in GL_m(\mathbb{C})$ に対して $V_i=\bigoplus_{j=1}^{i}\mathbb{C}ge_j$ とかける。$w\in W=\mathfrak{S}_m$ に対して

$$(V_i)\cdot w=(V_i')\qquad ここで\ V_i'=\bigoplus_{j=1}^{i}\mathbb{C}g(e_{w^{-1}(j)})$$

よって W は $H^*(\mathcal{B})$ に左から作用する。このとき環同型写像 $\mathbb{C}[\mathfrak{t}\cap N]\xrightarrow[\sim]{\ \overline{\pi}\ }H^*(\mathcal{B})$ は W－加群としての同型写像にもなっている。

いま m の分割 η に対して Type η の nilpotent element X_0 を

固定して、$\mathcal{B}$ の部分代数多様体 $\mathcal{B}_\eta$ を

$$\mathcal{B}_\eta = \{(V_i)\in\mathcal{B} \mid X_0(V_i)\subset V_{i-1}\quad (i=1,2,\cdots,n)\}$$

により定義する。$\mathcal{B}$ を{Borel 部分群}と同一視すると

$\mathcal{B}_\eta = \{B' :$ Borel 部分群 $\mid B'$ の Lie 環が X_0 を含む$\}$ と書ける。

さて、Springer [20] [21] は $\mathcal{B}_\eta$ の cohomology 環 $H^*(\mathcal{B}_\eta)$ にも奇妙な方法で W-加群の構造を定義したが、$\eta_0=(1\geq 1\geq\cdots\cdots)$ に対しては $\mathcal{B}_{\eta_0}=\mathcal{B}$ となり、Springer の与えた $H^*(\mathcal{B})$ の W-加群の構造は、はじめに与えた自然なものと一致する。（ただし一般の η に対しては、$H^*(\mathcal{B}_\eta)$ の W-加群の構造は $\mathcal{B}_\eta$ への何らかの W の作用から導びかれたものとはならない。）この Springer 表現について次の事が知られている。

<u>命題</u> $\mathcal{B}_\eta \hookrightarrow \mathcal{B}$ により導びかれる環準同型を

$H^*(\mathcal{B}) \xrightarrow{\rho_\eta} H^*(\mathcal{B}_\eta)$ とする。

(i) ρ_η は W-加群としての準同型である。

(ii) ρ_η は全射である。

(iii) $H^*(\mathcal{B}_\eta)\cong \mathrm{Ind}_{H_\eta}^{S_n}(1_{H_\eta})$ （W-加群として）

(i) は Hotta-Springer [6] に証明してあるが自明な事ではない。また (ii) も同じく [6] に証明があるが、A_n 型以外の群については対応する事実は一般には成立しない。(iii) は Macdonald の結果（未発表）であるが、Hotta-Shimomura [5] に2種類の証明

が書いてある。

5.3 主定理

定理1及び命題5.2により $A_{\check{\eta}} = \mathbb{C}[\mathfrak{t}\cap\overline{O_{\check{\eta}}}]$ と $H^*(B_\eta)$ はW-加群として同型であるが、これらの間に次の様な自然な同型写像がある事を主張するのが、次の定理2である。

定理2 次のdiagramを可換にする様な同型 j_η（環同型でかつW-加群としての同型）が唯一つある。

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}[\mathfrak{t}\cap N] \arrow[r, "\overline{\pi}", "\sim"'] \arrow[d, "\pi_{\check{\eta}}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H^*(B) \arrow[d, "\rho_\eta"] \\
A_{\check{\eta}} \arrow[r, "\sim", "j_\eta"'] & H^*(B_\eta)
\end{tikzcd}$$

（ただし $\pi_{\check{\eta}}$ は自然な全射準同型）

$\pi_{\check{\eta}}$ 及び ρ_η は全射準同型であり $\dim A_{\check{\eta}} = \dim H^*(B_\eta)$ なので Ker $\pi_{\check{\eta}}$ の生成系（§4で与えてある。）の $\rho_\eta\circ\overline{\pi}$ による像が $H^*(B_\eta)$ 中で消える事を示せば定理2は証明される。De Concini-Procesi の原論文では別の方法で Ker $\pi_{\check{\eta}}$ の生成系を定義し、それを用いて上記の事を示しているが、§4で与えた様な生成系を用いると以下の様により簡単に証明できる。

5.4 Grassman多様体とSchubert多様体

$1 \leqq l \leqq n$ に対して、$V=\mathbb{C}^n$ の l 次元部分空間全体のつくる Grassman 多様体を $Gr_l(V)$ と書く。V のflag $(\cdots\cdots \subset X_0^2(V) \subset X_0(V) \subset V)$ を細分して、V のcomplete flag

$(0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_m = V)$ をひとつとり固定する。

$0 \leqq \lambda_0 \leqq \lambda_1 \leqq \cdots \leqq \lambda_\ell \leqq m-\ell$ なる整数の列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\ell)$ に対して、次の様にして定義される $Gr_\ell(V)$ の subvariety Y_λ を λ に対応する Schubert 多様体という。

$$Y_\lambda = \{ W \in Gr_\ell(V) \mid \dim(W \cap V_{\lambda_i + i}) \geqq i \quad ({}^\forall i = 1, \cdots, \ell) \}$$

命題 (c.f. [10]) (i) $Y_\lambda \supset Y_\mu \Longleftrightarrow \lambda_i \geqq \mu_i \; ({}^\forall i = 1, \cdots, \ell)$

(このとき $\lambda \geqq \mu$ と書く事にする。)

(ii) $\overset{\circ}{Y}_\lambda = Y_\lambda - \bigcup_{\mu \lneqq \lambda} Y_\mu$ とおくとき

$Gr_\ell(V) = \coprod_\lambda \overset{\circ}{Y}_\lambda$ であり、これは $Gr_\ell(V)$ の cell 分割を与える。

命題 自然な projection $\mathcal{B} \xrightarrow{P} Gr_\ell(V)$ $(P((V_i)) = V_\ell)$ に関して $P(\mathcal{B}_\eta) \subset Y_{\lambda_0}$。

ここで $\lambda_0 = (\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{u_n^\vee(\ell)\text{個}}, \underbrace{m-\ell, m-\ell, \cdots, m-\ell}_{(\ell - u_n^\vee(\ell))\text{個}})$

(証明) $\mathcal{B}_\eta$ の定義式により、$(V_i) \in \mathcal{B}_\eta$ ならば $V_\ell \supset X_0^{m-\ell}(V)$。

$\dim X_0^{m-\ell}(V) = \operatorname{rank} X_0^{m-\ell} = u_n^\vee(\ell)$ なので (V_i) の定義から $X_0^{m-\ell}(V) = V_{u_n^\vee(\ell)}$ となる。従って $i \leqq u_n^\vee(\ell)$ のとき $\dim(V_\ell \cap V_i) = \dim V_i = i$。また $i > u_n^\vee(\ell)$ のとき $\dim(V_\ell \cap V_{(m-\ell)+i}) \geqq i$。よって証明おわり。

5.5 Grassmann 多様体の cohomology 環

定義 $0 \leqq \lambda_1 \leqq \cdots \leqq \lambda_\ell$ なる自然数の列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\ell)$ に対して

$$[\lambda_1, \cdots, \lambda_\ell] = \begin{vmatrix} X_1^{\lambda_1} & X_2^{\lambda_1} & \cdots\cdots & X_\ell^{\lambda_1} \\ X_1^{\lambda_2+1} & X_2^{\lambda_2+1} & \cdots\cdots & X_\ell^{\lambda_2+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_1^{\lambda_\ell+\ell} & X_2^{\lambda_\ell+\ell} & \cdots\cdots & X_\ell^{\lambda_\ell+\ell} \end{vmatrix} \in \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_\ell]$$

とおき

$$S_\lambda(X_1, \cdots, X_\ell) = \frac{[\lambda_1, \cdots, \lambda_\ell]}{[0, \cdots, 0]}$$

により定義される ℓ 変数の対称多項式 $S_\lambda(X_1, \cdots, X_\ell)$ を Schur 関数と呼ぶ。

注意 ℓ 変数 $X_1, \cdots, X_\ell$ の j 次基本対称式を $h_{\ell,j}$ と書く。
(i.e. $(t - X_1) \cdots (t - X_\ell) = t^\ell - h_{\ell,1} t^{\ell-1} + h_{\ell,2} t^{\ell-2} - \cdots + (-1)^\ell h_{\ell,\ell}$)
このとき $h_{\ell,j} = S_{\underbrace{(0, \cdots, 0, \underbrace{1, \cdots, 1}_{j\text{個}})}_{\ell\text{個}}}$

命題 (Cf. Kleiman [10])

(i) $B \xrightarrow{p} Gr_\ell(V)$ から引きおこされる準同型 $H^*(Gr_\ell(V)) \xrightarrow{p^*} H^*(B)$ は単射であり、その像は最初の ℓ 個の Chern 類 $\overline{X}_1, \cdots, \overline{X}_\ell$ の対称多項式全体である。
(よって以下 $H^*(Gr_\ell(V))$ は $H^*(B)$ の部分環とみなす。)

(ii) Schur 関数 $S_\lambda(\overline{X}_1, \cdots, \overline{X}_\ell)$ が non-zero であるためには $\lambda_\ell \leqq n - \ell$ である事が必要十分である。

(iii) non-zero な Schur 関数 $S_\lambda(\overline{X}_1, \cdots, \overline{X}_\ell)$ の全体は、

cell 分割 $Gr_\ell(V)=\coprod_\lambda \overset{\circ}{Y}_\lambda$ からできる homology 群

$H_*(B)$ の base の dual base になっている。

すなわち $\langle S_\lambda(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_\ell),\ \overset{\circ}{Y}_\mu\rangle = \delta_{\lambda\mu}$

5.6 定理2の証明

定理1の証明からわかる様に、我々の示すべき事は次の事である。

主張 $1\leqq \ell\leqq m$ に対して、$\rho_m\left(h_{\ell,j}(\bar{x}_{i_1},\dots,\bar{x}_{i_\ell})\right)=0$ in $H^*(B_m)$

ただし $1\leqq i_1<i_2<\cdots<i_\ell\leqq m$, $j\geqq \ell-(u^{\vee}_m(\ell)-1)$

ρ_m は W-加群としての準同型なので（命題5.2 (1)）

$i_1=1,\ i_2=2,\dots,i_\ell=\ell$ としてよい。よって 5.5 の注意から

さらに次の事を示せばよい。

主張′ $1\leqq \ell\leqq m$ に対して $\rho_m\left(S_{(0,\dots,0,\underbrace{1,\dots,1}_{j})}(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_\ell)\right)=0$

ただし $j\geqq \ell+1-u^{\vee}_m(\ell)$

§5.5 から $p(B_m)\subset Y_{\lambda_0}$ なので、次の可換図式が成立する。

$$\begin{tikzcd}
H^*(B) \arrow[d, "\rho_m"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H^*(Gr_\ell(V)) \arrow[l, "p^*"'] \arrow[d, "i^*"] \\
H^*(B_m) & H^*(Y_{\lambda_0}) \arrow[l, "k^*"]
\end{tikzcd}$$

$j\geqq \ell+1-u^{\vee}_m(\ell)$ のとき $\lambda_0 \not\geqq (0,\dots,0,\underbrace{1,\dots,1}_{j})$

従って $i^*\left(S_{(0,\dots,0,\underbrace{1,\dots,1}_{j})}(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_\ell)\right)=0$

ゆえに

$$\rho_m\left(S_{(0,\dots,0,\underbrace{1,\dots,1}_{j})}(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_\ell)\right)=k^*\circ i^*\left(S_{(0,\dots,0,\underbrace{1,\dots,1}_{j})}(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_\ell)\right)=0$$

よって定理2が示された。

文献表

[1] Borho W., Kraft H.: Über Bahnen und deren Deformationen bei linearen Aktionen reduktiver Gruppen.
Comment. Math. Helvetici 54 (1979) 61–104

[2] Brieskorn E.: Singular elements of semisimple algebraic groups
Actes, Congrès interm. Math. (1970) Tome 2. 279-284

[3] De Concini C., Procesi C.: Symmetric functions, conjugacy classes and the flag variety
preprint (1980)

[4] Gerstenhaber M.: On dominance and varieties of commuting matrices
Ann. of Math. 73 (1961) 324-348

[5] Hotta R., Shimomura N.: The fixed point subvarieties of unipotent transformations on generalized flag varieties

and the Green functions.

Math. Ann. 241 (1979) 193–208

[6] Hotta R., Springer T. A. : A specialization theorem for certain Weyl group representations and an application to the Green polynomials of unitary groups.

Inventiones math. 41 (1977) 113–127

[7] 岩堀長慶：対称群と一般線型群の表現論

岩波講座基礎数学 (1978)

[8] 彌永昌吉, 杉浦光夫：応用数学者のための代数学

岩波 (1960)

[9] Kazhdan D., Lusztig G. : A Topological approach To Springer's representations.

Advances in Math. 38 (1980) 222–228

[10] Kleiman S.L. : Rigourous foundations of Schubert's enumerative calculus.

Proc. of Symp. in Pure Math. Vol XXVIII (1976)

[11] Kostant B. : Lie groups representations on polynomial rings.

Amer. J. Math. 85 (1963) 327–404

[12] Kostant B., Rallis S. : Orbits and representations associated with symmetric spaces.

Amer. J. Math. 93 (1971) 753–809

[13] Kraft. H. : preprint

to appear in Proc. Torun Conference — Asterisque

[14] Kraft H., Procesi C. : Closures of conjugacy classes of matrices are normal.

Inventiones math. 53 (1979) 227—247

[15] 草場公邦：行列特論

裳華房 (1979)

[16] Lusztig G. : Green polynomials and singularities of unipotent classes. preprint (1980)

[17] Mumford D. : Geometric invariant theory

Springer-Verlag (1965)

[18] Slodowy P. : Simple singularities and simple algebraic groups

Springer Lecture Notes in Math 815 (1980)

[19] ———— : Four lectures on simple groups and singularities

Communications of the Mathematical Institute,

Rijksuniversiteit Utrecht Vol 11 (1980)

[20] Springer T.A. : Trigonometric sums, Green functions of finite groups and representations of Weyl groups.

Inventiones Math. 36 (1976) 173—207

[21] ——— : A construction of representations of Weyl groups.
Inventiones math. 44 (1978) 279–293

[22] Vinberg È. B. : The Weyl group of a graded Lie algebras.
Math. USSR Izvestija 10 (1976) No: 3.