数理解析研究所講究録
第444巻 1981年 175-179

置換群と不変式 — Wielandt の仕事の紹介

大阪大学教養部　　平峰 豊

Wielandt の Lecture Note "Permutation groups through invariant relations and invariant functions" (Ohio State University) の主として後半の部分の内容を紹介した。この中で、Wielandt は置換群を不変式論の立場からみて、その間の関係を調べ、それを素数巾次数の置換群の研究に応用した。(上記 Lecture Note [1] 参照)

§1. Invariant relations

Ω を集合、G をその上に作用している群とする。群 G の Ω^k ($= \underbrace{\Omega \times \cdots \times \Omega}_{k\text{コ}}$) への作用を次により定義する。

$$(\alpha_1, \cdots, \alpha_k)^g = (\alpha_1^g, \cdots, \alpha_k^g)$$

$$(\ g \in G\ ,\ (\alpha_1, \cdots, \alpha_k) \in \Omega^k\ )$$

Ω^k の部分集合を k-relation という。G-不変な k-relation の全体の集合を k-rel G で表わす。k-rel G が群 G の置換群としての性質を反映している。これに関して次が成

りたつ.

<u>定理</u> Ω^k の G-orbits への分解を $\Omega^k = \sum_{\lambda\in\Lambda} \Phi_\lambda$ とおくとき

$$\Phi \in k\text{-rel}\ G \Longleftrightarrow {}^\exists \Lambda' \subset \Lambda \quad \Phi = \sum_{\lambda\in\Lambda'} \Phi_\lambda$$

<u>例</u>. $k=2$, $\Phi_1 = \{(\alpha,\alpha) \mid \alpha\in\Omega\}$, $\Phi_2 = \{(\alpha,\beta) \mid \alpha \neq \beta \in \Omega\}$ とおくと $\Phi_1, \Phi_2 \in 2\text{-rel}\ G$

<u>例</u>. 次が成りたつ.

$$G:2\text{重可移} \Longleftrightarrow 2\text{-rel}\ G = \{\phi, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_1 \cup \Phi_2\}$$

<u>§2. Invariant functions</u>

G-invariant relation を "function" の言葉で言い換えることを考える.

F を体とし $|\Omega| = n$ とする. F_k で Ω^k で定義され値を F にとる関数全体を表わすものとする:

$$F_k = \{ f : \Omega^k \longrightarrow F \}$$

明らかに F_k は(自然な和と積に関して)F 上の commutative associative algebra となる. k-relation Φ に対して

$$f_\Phi(\xi) = \begin{cases} 1 & (\xi \in \Phi) \\ 0 & (\xi \notin \Phi) \end{cases}$$

と定めると明らかに $f_\Phi \in F_k$ である. これを Φ の特性関数という. F_k は

$\{f_P \mid P \in \Omega^k\}$ を basis としてもつから $\dim_F F_k = n^k$ が成りたつ。また群 G の F_k への作用を次により定義する：

$$f^g(\zeta) = f(\zeta^{g^{-1}}) \qquad f \in F_k,\ g \in G \quad (\forall \zeta \in \Omega^k)$$

これにより F_k は G-algebra となる。F_k は次に定義する F_kG を G-subalgebra として持ち、これが重要な役割をもつ：$F_kG = \{ f \in F_k \mid f^g = f \quad \forall g \in G \}$

これを用いて §1 で定義した k-rel G は次のように言い換えることができる。

<u>定理</u> $\Phi \in k\text{-rel}\ G \rightleftarrows f_\Phi \in F_kG$

さらに次が成りたつ。

<u>定理</u> $\dim_F F_kG = |\mathrm{orb}(G, \Omega^k)|$.

<u>定理</u> $\dim_F \mathrm{Hom}_G(F_1, F_1) \geqq 2$. ここで等号が成立するための必要十分条件は G が 2 重可移となることである。

<u>定理</u> M_1, M_2 を F_k の G-submodules とするとき

(i) $M_1 \cap M_2$, $M_1 + M_2$, M_1M_2, $M_1 : M_2 = \{f \in F_k \mid fM_2 \leq M_1\}$ は F_k の G-submodules となる。

(ii) $M_1 \leq M_2$ ならば $M_1 : M_2$ は G-subalgebra となる。

上の定理の(ii)により、F_k の G-submodule M を一つ定めるごとに $M : M$ なる G-subalgebra が対応するが、$k = 1$ で

ある場合については次がなりたつ。これは置換群における primitive という概念を"function"の言葉で言い換えたものとなっている.

<u>定理</u> G が Ω 上 primitive

$\Longleftrightarrow$ 定数関数全体 C_1 を含む F_1 の G-subalgebra は C_1 と F_1 だけに限る.

<u>§3 次数が素数巾の可移群への応用.</u>

$GF(q)$ 上の n 次元ベクトル空間 V の affine 変換全体の集合を $Aff(n, q)$ と表わす。また. 置換群 (G, Ω) が uniprimitive であるとは. primitive. かつ2重可移でないこととする。

次の定理が. Burnside によって. character theory を用いて証明されていた. [2]

<u>定理</u> (Burnside) G が degree p (素数) の uniprimitive な置換群であるとすれば. G の p-Sylow 群は G で normal かつ $G \leq Aff(1, p)$ が成りたつ.

<u>定理</u> (Burnside) G が degree p^e の uniprimitive な置換群で. かつ G が p^e-cycle を含めば $e=1$ が成りたつ.

Wielandt は $F = GF(p^e)$ に対して Invariant function を考え. G に含まれる p^e-cycle t をとり $M_k = \ker_{F_1}(t-1)^k$ ($k=0, \cdots, p^e$) なる t-modules の性質を調べることにより

上記のBurnsideの定理の別証を与えた。

さらにGのdegreeがp^2（pは素数）である可移群に関して次のことを証明した。（詳しくは[1]を参照）

<u>定理</u>（Wielandt）Gをdegree p^2（pは素数）の可移群とし．Hをそのp-Sylow群の一つとするとき．次の(i)～(iv)のいずれかが成りたつ：

(i) $H \triangleleft G$, $G \leq \mathrm{Aff}(2, p)$.

(ii) Gはprimitiveでない。

(iii) $G \triangleright {}^{\exists}N$; $G/N \simeq \mathbb{Z}_2$ かつ Nはprimitiveでない。

(iv) Gは2重可移群である。

文献

[1] Helmut W. Wielandt, "Permutation groups through invariant relations and invariant functions", Lectures given at The Ohio State University, Columbus, Ohio, 1969.

[2] W. Burnside, "Theory of Groups of Finite Order" 2nd ed. Cambridge Univ. Press, London reprinted 1958, Chelsea, N.Y.