数理解析研究所講究録
第444巻 1981年 209-235

有限鏡映群の不変式と 孤立特異点の flat coordinate system*

埼玉大学理学部　矢野環

§0. はじめに　これは「"Weyl群の不変式" 齋藤恭司(数解研), 矢野環(埼玉), 関口次郎(都立), 加藤満生(琉球) 渡部敏(山形)」と題した講演の記録である。

有限鏡映群は、その不変式環が多項式環になること，不変式の次数の積が群の位数であること，などがよく知られている。([2],[3],[5],[6])。一方，孤立特異点のA, D, E型とよばれるものが，まさにA, D, E型の<u>Lie環</u>のnilpotent varietyの特異性に由来すること([28])，B, C, F, G型でも同様であること([29])，又，それらの別の立場からの解釈([25],[26])さらに，Coxeter群 $H_3, H_4, I_2(m)$ に対するそれらの対応する類似([36],[38])なども明らかにされている。(表1, 2, 3, 4参照)

そこで，超曲面孤立特異点の理論から，上述の対応関係をたどって，有限鏡映群の性質を見なおしてみることができる。特に我々は，有限Coxeter群の不変式環の生成元を，<u>uniqueに指定</u>しうる方法を見出した。([32],[33],[34])。これは、A, D, E型特異点のversal deformationのparameter space

* この論説の目次は最後 p.20 にある。

に，ある "linear structure" を導入するものと理解され ([35] [36])，現在，一般の孤立特異点に対しての理論が整備されつつある．(K. Saito, On the periods of primitive integrals の一部分，などがその周辺の理論を含む予定）．特に単純楕円型特異点においては，上述の "linear structure" (deformation の parameter space の flat coordinate system とよぶ) の存在は，齋藤により非線型一階微分方程式の形にまとめられていたが，矢野はそれを線型化し，古典的な楕円函数を係数にもつ flat coordinate system を確定した。この線型化に用いる手法は，佐藤幹夫等による τ 函数の理論との類似をうかがわせ，齋藤は特異点の変形の τ-函数を定義している。

さて，有限鏡映群にもどって，複素鏡映群 (u.g.g.r.) を考察しよう。それらは [5] ですでに分類されていたが，興味ある状況で登場したのは，[14] [ ] ではないかとおもわれる。[14] は Weyl 群に特別な形で embed される u.g.g.r. を分類し，[ ] では graded Lie algebra の "Weyl 群" が u.g.g.r. になることを示した。Coxeter 群の場合と同様に，不変式を deformation の parameter space とみなす試みは 表4 にもなされた。又，Brieskorn-Slodowy 流の formulation も近々完成する予定である。[15] において定義された invariants $\{n_1, \cdots, n_\ell\}$ は，u.g.g.r. の reflecting hyperplanes が寺尾の意味で free arrangement をなす

ことより定まる logarithmic vector fields の weights と一致する([31]).
u.g.g.r. の discriminant の特異性から定まる不変量 H を矢野が定義し，寺尾は又 log. vec. f. から $2n/\ell$ という量の重要性を指摘し，それらと既知の不変量との奇妙な関係が知られている．(表5). しかしそれらの関係は，[15] における奇妙な duality と同じく，分類結果にもとづいた推論であり，現在理論的整備が行なわれつつある。

以下において，上記の概況に関し，紙数の許すかぎり説明を加えてみたい。

§1. 有限鏡映群の不変式環

G：有限群　　k：体，$ch(k) \nmid |G|$（$|G|$は G の位数．
以下では $k \simeq \mathbb{R}, \mathbb{C}$ しか必要としないが，これが最もひろい条件である）．

$V \simeq k^\ell$，　$\rho : G \to GL(V)$ faithful linear rep.
以下では $G \subset GL(V)$ とみなす．V^*を V の dual space とし，V^* の symmetric algebra $S(V^*)$ の G－不変部分環を，

$$R = S(V^*)^G \quad \text{とする．} \quad (= k[V^*]^G)$$

R は Cohen-Macaulay であり，Hochster-Eagon Amer. J Math (1971), Dade (1971) によれば，次が成立する．

Theorem 1.1 $\exists P_1, \dots, P_\ell \in R$, algebraically independent homogeneous elements, $\deg P_i \mid |G|$, $\{P_i\}$: R-sequence, and $\exists Q_1, \dots, Q_\delta \in R$ s.t. $R = \bigoplus_{i=1}^{\delta} Q_i\, k[P_1, \dots, P_\ell]$.

<u>Definition</u> 1.2. $\delta(G) = \min\{\delta \mid \text{such } \delta \text{ as in Thm 1.1}\}$.

<u>Corollary</u> 1.3 $|G| = \prod \deg P_i / \delta(G)$ （$|G|$はGの位数）

特に $\delta(G) \leq |G|^{\ell-1}$ //

<u>Remark</u> 1.4. Huffman Sloane, Adv in Math (197) によれば，評価 $\delta(G) \leq |G|^{\ell-1}$ が漸近的に best possible であること，$\delta(G)$ の大きくなるものの具体的例などがのべられている。

<u>Definition</u> 1.5 ① $g \in GL(V)$ が reflection（鏡映）であるとは，g は semi-simple であり，$\mathrm{rank}(1-g) = 1$ となること．

（order $g = 2$ とは仮定しない．）

② $\mathrm{Ker}(1-g) = H_g$ を g の reflecting hyperplane と呼ぶ．

（$\exists L$，$V = L \oplus H_g$，L上に g は原始 ord g 乗根で作用する．これは明らかなことではなく，一般の場合 Maschke の定理を要する）

<u>Theorem</u> 1.6（例えば Bourbaki Lie 環 4,5,6 章の Ch V no 5.5 Th. 4）

G は reflection で生成される $\Leftrightarrow$ $\delta(G) = 1$．

（即ち，Th. 1.1 Cor 1.3 より $R \simeq k[P_1, \cdots, P_\ell]$，$|G| = \prod \deg P_i$）. //

この定理の $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ の場合は [3] [5] によりなされた．尚しばしば Chevalley の定理とよばれるが，[6] は一般的な証明を与えただけであり，何事かをつけ加えたものではなく，不適当な呼び名であるとおもわれる。[6] では reflection を order 2 にかぎっているが，証明は一般の order で適用される。Weyl 群の不変式環で $R \simeq k[P_1, \cdots, P_\ell]$ $\prod \deg P_i = |G|$ は [2] にある．

少なくとも $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ を $\mathrm{ch}\, k = 0$ に拡げたとはいえる．

<u>Theorem</u> 1.7. (Coxeter - Shephard - Todd) $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ の場合，鏡映で生成される有限群は次の list の群の直積である．

① $k = \mathbb{R}$, ([3]) a. A_ℓ, D_ℓ, E_6, E_7, E_8 (versal def)
(<u>Coxeter 群</u>) b. B_ℓ, F_4, G_2. ("versal" def)
c. H_3, H_4, $I_2(p)$ $p=5, p\geq 7$. (free def)

② $k = \mathbb{C}$ ([5]) a. $G(r,1,\ell)$, $G(r,r,\ell)$, No. 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 14, 16,
(<u>u.g.g.r.</u>) 17, 18, 20, 21, 24, 25, 26, 27, 29, 32, 33, 34.
b. $G(r,p,\ell)$ $2\leq p$ r, 7, 11, 12, 13, 15, 19, 22, 31. /

<u>Remark</u> 1.8 ① Th. 1.6 より ① V/G (schemeとして) $\simeq k^\ell$ であり，その座標環が R となっている。Th. 1.7 ① においては，V/G は G の対応する type の deformation の parameter space となる。① a. では A, D, E 型 versal deformation ① b. ではある意味で "versal" な def ① c. は free deformation. a. b. は Weyl 群として知られている。
② Th. 1.7 ② において，a. の群は ℓ (次元) 個の鏡映で生成され，24, 27 以外は complex polytope の対称群である．b. では $\ell+1$ 個の鏡映で生成され，complex polytope の対称群となるのは $G(r,p,\ell)$ と 31 である。(講演のとき言いまちがえたらしい) //

§ 2. <u>Flat generator system</u>

Coxeter 群の不変式環の生成元 $P_1, \cdots, P_\ell$ に unique な指定の方法がある。これを <u>flat generator system</u> と呼ぶ．この flat という言葉は，flat connection と関係があるだろう

うということ，$\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}} V/G$ に linear structure を与えるので，"平坦"といってよいであろう，というので齋藤により命名された。しかし，この用語に異論もあるので，将来代わるかもしれない。

仮定：以下 G は既約，すなわち V への作用は既約と仮定．$V^* \simeq \mathbb{R}^l$ に G-不変正定値内積が定数倍をのぞき unique に存在する．これを $(\ |\ )$ と記そう．（何かとってG上で平均すればよい．既約であるから それしかない）．

$$(dP|dQ) = \sum_{ij} \frac{\partial P}{\partial \xi_i} \frac{\partial Q}{\partial \xi_j} (\xi_i | \xi_j)$$

と定義する．ここで dP は P の外微分，$\xi_1, \cdots, \xi_l$

Definition 2.1. R の homogeneous generator system $P_1, \cdots, P_l$ が *flat* であるとは，$L = \sum_{i=1}^{l} \mathbb{R} P_i$ とおくとき，① $D \cdot (d \cdot | d \cdot) : R \times R \longrightarrow R$，$D = \partial / \partial P_l$，$\deg P_1 \leq \cdots \leq \deg P_l$ を L に制限すると，$\mathbb{R}$-valued であり，② L 上の non-degenerate bilinear form を与えることを言う．

Theorem 2.2. flat generator system は存在し，L は unique である．//

この定理は初め [32] において，$A, B, D, E_6, F_4, G_2, H_3, H_4, I_2(p)$ に対して証明した．方法は，[18] [19] [20] などで決定してあった不変式環の具体的構造（[22] にまとめて出る）を用いて実際に構成し，さらに uniqueness は一般的に示すものであった．

その後 [35] により E_7, E_8 も含めた一般的証明ができた。又、E_7, E_8での具体的構成も [33] [34] においてなされている。

Example 2.3. $I_2(p)$. (order $2p$ の dihedral group).

$V^* = \mathbb{R}\xi_1 + \mathbb{R}\xi_2$, $\{\xi_1, \xi_2\}$ orthonormal basis とする. $u = \xi_1 + \sqrt{-1}\,\xi_2$ とおけば $x_2 = u\bar{u}$ $(= \xi_1^2 + \xi_2^2)$, $x_p = (\sqrt{-1})^p(u^p + (-\bar{u})^p)$ が R の生成元である. $(dx_2 | dx_2) = 4x_2$, $(dx_2 | dx_p) = 2p\,x_p$, $(dx_p | dx_p) = 4p^2 x_2^{p-1}$ となり, x_2, x_p が flat generator system である.

(念のため. 2つの鏡映は $u \to -\bar{u}$, $u \to \exp(-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{p})\,\bar{u}$ である)

Example 2.4 A_l ($l+1$ 次対称群)

$V^* = \sum_{i=1}^{l+1} \mathbb{R}\xi_i \big/ \mathbb{R}(\sum_{i=1}^{l+1}\xi_i)$ に, $\xi_i \mapsto \xi_{\sigma(i)}$ $\sigma \in \mathfrak{S}_{l+1}$ を作用する。(V が $\sum \mathbb{R}e_i$ の中の $\xi_1 + \cdots + \xi_{l+1} = 0$ で定まる l次元部分空間になる).

p_i $(i=2,\dots,l+1)$ を $\xi_1, \dots, \xi_{l+1}$ の i次基本対称式 (modulo $p_1 = \sum\xi_i$) とする.

記号 $P_i^d = \sum_{\substack{i_1+\cdots+i_d=i \\ 2\le i_j \le l+1}} p_{i_1}\cdots p_{i_d}$ と定め, さらに $\alpha \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{C}$

$$(1 + cP)_i^\alpha = \sum_{d\ge 0} \binom{\alpha}{d} c^d P_i^d$$ という略記法を用いる。

(又, $\log(1 + cP)_i = \sum_{d\ge 1} \frac{(-c)^d}{d} P_i^d$ と定める)

$$\boxed{x_i = \frac{l+1}{i-1}(1 + P)_i^{\frac{1}{l+1}(i-1)}} \qquad i = 2, \dots, l+1$$

が flat generator system を与える。これは逆にとけば,

$$\boxed{\begin{cases} p_i = \dfrac{l+1}{l+1-i}\left(1 - \dfrac{1}{l+1}X\right)_i^{-(l+1-i)} & i = 2, \dots, l \\ p_{l+1} = -(l+1)\log\left(1 - \dfrac{1}{l+1}X\right)_{l+1} \end{cases}}$$

となる. 略記法は Pと同様.

この略記法は、斎藤が A, B, D 型の flat generator system を構成したときに採用したものだが、当初は評判が悪かった。しかし後に §3 で見るように、この略記法は極めて有効である。尚、$(dx_i|dx_j)$ を x_i の式として explicit に書き下す公式はまだ見つけていない。

我々は flat coördinate system を構成したとき、Coxeter群の不変式環の basis の unique な指定の方法は今までなかって、我々の方法が初めてだとおもっていた。しかし、[11] に、特別な調和函数として unique に指定する方法が与えられていた。さらに関口は Weyl群に対して、もう一種類 unique な指定の方法があることを指適した (§3 Definition 3)
都合3通りの方法があることになる。

§3. Brieskorn-Slodowy 理論, Kostant の generator system.

この§ではいわゆる B-S$\overbrace{\text{理論}}^{\text{Th. 3.8}}$を説明し、特異点の理論との関係を示す。さらに、関口によって定義された、Kostant流の R の生成元のとり方について説明する。

(3.1) $\mathfrak{g}$: simple Lie algebra $/\mathbb{C}$, G: $\mathfrak{g}$ の adjoint group
(この§では G は鏡映群ではない. $W(G)$ が今までの G にあたる)
$\mathfrak{h}$: $\mathfrak{g}$ の a Cartan subalgebra, $l = \operatorname{rank} \mathfrak{g}$ $(= \dim \mathfrak{h})$
$W(G)$: $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の Weyl 群 (A, B, D, E, F, G 型の Coxeter群)
$Z_{\mathfrak{g}}(X)$: $X \in \mathfrak{g}$ の centralizer, $\mathfrak{g}^*, \mathfrak{h}^*$: それぞれの dual space

$X\in\mathfrak{g}$ は $\mathrm{ad}(X); Y\mapsto [X,Y]$ が semisimple, nilpotent に応じて, X が semisimple, nilpotent と呼ばれる。

$\mathcal{N}(\mathfrak{g})=\{X\in\mathfrak{g}\mid X:\text{nilpotent}\}$.

Theorem 3.2 (Chevalley) canonical surjection $S(\mathfrak{g}^*)\to S(\mathfrak{h}^*)$ は algebra isomorphism $S(\mathfrak{g}^*)^G \xrightarrow{\sim} S(\mathfrak{h}^*)^{W(G)}$ を induce する。

Definition 3.3 Invariant morphism (又は adjoint quotient)

$\chi:\mathfrak{g}\longrightarrow \mathfrak{h}/W(G)$ は次の様に定義される.

$\mathfrak{g}\ni X=X_s+X_n$ を semi-simple, nilpotent part とするとき, $([X_s,X_n]=0)$

$X\longmapsto X_s\longmapsto GX_s\cap\mathfrak{h}\longmapsto (GX_s\cap\mathfrak{h})/W(G)$ (これは一点である)

Remark 3.4 χ は具体的には $\mathfrak{h}/W(G)$ の座標環 $S(\mathfrak{h}^*)^{W(G)}\simeq\mathbb{C}[P_1,\cdots,P_l]$ より定めればよい. P の G-不変性より $P(X_s)$ $(=P(gX_s)\ {}^\exists g\in G\ gX_s\in\mathfrak{h})$ は一意的な意味をもつので

$\mathfrak{g}\ni X\longmapsto \chi(X)=(P_1(X_s),\cdots,P_l(X_s))\in\mathfrak{h}/W(G)$.

Theorem-Definition 3.5 (Kostant-Steinberg-Dynkin)

① $X\in\mathcal{N}(\mathfrak{g})$ に対し, $\dim Z_{\mathfrak{g}}(X)-\operatorname{rank}\mathfrak{g}$ は非負偶数.

② $\{X\in\mathcal{N}(\mathfrak{g})\mid \dim Z_{\mathfrak{g}}(X)=l\}$ $(\{X\in\mathcal{N}(\mathfrak{g})\mid \dim Z_{\mathfrak{g}}(X)=l+2\})$ は空でない単一 G-orbit となる. 各元を regular (subregular) nilpotent element と呼ぶ.

Definition 3.6 $X\in\mathfrak{g}$ の G-orbit $G\cdot X$ の tangent space の補空間を S とする. $\mathfrak{g}=\overset{=\{[X,Y]\mid Y\in\mathfrak{g}\}}{T_X(G\cdot X)}\oplus S$. このとき $X+S=S_X$ を X における $G\cdot X$ の transversal slice と呼ぶ. 特に

S を Killing form に関する直交補空間にとった場合, orthogonal slice と呼ぶ. ($X \in \mathcal{N}(\mathfrak{g})$ のとき TDS (X,Y,H) (Jacobson-Morozov) により $X+Z_{\mathfrak{g}}(Y)$ が orthogonal slice)

Theorem 3.7. (Kostant) X_0: regular nilpotent

S_{X_0}: orthogonal slice $\Rightarrow$ $\chi|_{S_{X_0}}: S_{X_0} \simeq \mathfrak{h}/W(G)$ biholomorphic //

(これは, $\forall X \in \mathfrak{g}$, $\operatorname{codim} GX = l$ $\overset{(特に X \in S_{X_0} のときOK)}{\Rightarrow}$ $GX \cap S_{X_0} = \{1pt\}$ より).

Theorem 3.8 ([28], [29]). X_0: subregular nilpotent

S_{X_0}: transversal slice $\chi|_{S_{X_0}}: S_{X_0} \longrightarrow \mathfrak{h}/W(G)$.

① $\chi^{-1}_{S_{X_0}}(0) = S_{X_0} \cap \mathcal{N}(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ の type と同じ type の rational double point と locally biholomorphic. (即ち $\mathfrak{g}$ が A型なら A型 rat. double)

② $t \in \mathfrak{h}/W(G)$ に対し, $\chi^{-1}_{S_{X_0}}(t)$ は ①でのべた rational double pt. の (versal) deformation に locally biholomorphic. //

表1 (p.) に rational double points の表をあげた. B_l, C_l, F_4, G_2 型の rational double pt とはそれぞれ $A_{2l-1}, D_{l+1}, E_6, D_4$ 型に等しい ~~である~~.

(versal) deformation も 表1, 表2 にある. 尚, 適当な slice をとれば, global に isomorphic にできる(①②とも).

さて, Th. 3.7 の状況を詳しく見てみよう. X_0 を regular nilpotent, $\{X_0, H_0, Y_0\}$ を principal S-triple とすれば, $ad(H_0)$ の $Z_{\mathfrak{g}}(Y_0)$ での固有値は $-(2d_i-1)$ $i=1,\dots,l$ $d_i = \deg P_i$ である. この固有ベクトルを u_i とすれば, $Z_{\mathfrak{g}}(Y_0) = \sum \mathbb{C} u_i$.

従って, $S_{X_0} \ni X_0 + \sum q_i u_i \longmapsto (P_1(q), \dots, P_l(q)) \in \mathfrak{h}/W(G)$ が biholomorphic なることより, $S(\mathfrak{h}^*)^{W(G)} \simeq \mathbb{C}[q_1, \dots, q_l]$ と思える.

Definition 3.9 ([30]) $\langle g_1, \cdots, g_\ell \rangle$ を不変式環のKostant流生成元の系とよぶ.(構成より $\sum \mathbb{C} g_i$ は unique に定まる.)

Example 3.10. A_ℓ. (Example 2.4参照).

$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ とればたしかに regular nilpotent.

orthogonal slice は $\left\{ X_g = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & 0 \\ g_2 & 0 & -1 & & \\ g_3 & g_2 & 0 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ g_{\ell+1} & \cdots & g_3 & g_2 & 0 \end{pmatrix} \right\} \in X_0 + \sum g_i \cdot \begin{array}{c} \\ i) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

invariant morphism は $\det(\lambda + X) = \sum_{i=0}^{\ell+1} p_i(X) \lambda^{\ell+1-i}$ による

$X \longmapsto (p_1(X), \cdots, p_\ell(X))$ として与えられている.

$$\det(\lambda + X_g) = \sum_i (1-Q)_i^{-(\ell+2-i)} \lambda^{\ell+1-i} \qquad (\text{Remark } 3.11)$$

より $\boxed{p_i = (1-Q)_i^{-(\ell+2-i)}}$ である. ここで Example 2.4 と同様の略記法を用いた. $Q_i^d = \sum g_{i_1} \cdots g_{i_d}$ $\quad i_1 + \cdots + i_d = i \quad 2 \le i_j \le \ell+1$.

この表示が 2.4. における p_i の表示をあたかも X について微分し, $X = (\ell+1) Q$ とおいたものであることに気付くであろう. 実際, 我々が flat generator system を構成した直後, 岩堀先生は,「我々の $\{x_i\}$ が上記 $\{g_i\}$ と同じものではないか?」と問題にされた. 同じではないのだが, よく似ている。

Remark 3.11 上記 $\boxed{}$ を示しておく. ただの計算だが.

$GL(\infty)$ の generic element A の固有値を $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$, $\sum_j |\varepsilon_j| < \infty$ とする

$\sigma_j = \sum_{i=1}^{\ell+1} \varepsilon_i^j \ (j \ge 1)$, $\overline{p}_j(A) = \chi_{\left.\begin{smallmatrix}\square\\ \vdots \\ \square\end{smallmatrix}\right\} j}(A) = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{\ell+1})$ の j 次基本対称式 $(j \ge 0)$

$g_j(A) = \chi_{\underbrace{\square\cdots\square}_{j}}(A) = \sum \varepsilon_{i_1} \cdots \varepsilon_{i_j}$ $(j \ge 0)$ とおく.

$$\exp\left(-\sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j \frac{t^j}{j}\right) = \sum_{h=0}^{\infty} (-)^h \overline{p}_h t^h = \left(\sum_{j=0}^{\infty} g_j t^j\right)^{-1} \text{ である.}$$

従って、 $\sum (-)^h \bar{p}_h t^h = \sum_{j\geq 0} (-)^j (g_1 t + g_2 t^2 + \cdots)^j$

$$= \sum_j \sum_k \sum_d (-)^j \binom{j}{k} Q_d^{j-k} g_1^{\,k} t^{k+d}$$

$$= \sum_h (-)^h \Big(\sum_{k=0}^{h} (-)^k (1+Q)_k^{-(h-k+1)} g_1^{\,h-k} \Big) t^h .$$

一方よく知られているように、

$$\bar{p}_h = \chi_{\text{日}\}h} = \det \begin{vmatrix} g_1 & 1 & & 0 \\ g_2 & g_1 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ g_h & \cdots & g_2 & g_1 \end{vmatrix} = \sum_{k=0}^{l+1} (-)^k (1+Q)_k^{-(l+2-k)} \lambda^{l+1-k}$$

従って、$h=l+1$ ととって、 $g_1 = \lambda$ とおけば、少し符号をかえて所用の式をうる。

<u>Remark</u> 3.12 表 1 より A_l の versal deformation は

$$x^{l+1} + t_2 x^{l-1} + t_3 x^{l-2} + \cdots + t_{l+1}.$$

Thm 3.8 により、実は t_i は基本対称式 p_i と同一視される。従って、Ex 3.10 より $x^{l+1} + \sum_{i\geq 2} (1-Q)_i^{-(l+2-i)} x^{l+1-i}$ が $\{g_i\}$ 座標を用いた deformation の式である。又、flat coördinate x_i (Ex. 2.4) に対し、$\frac{1}{l+1} x_i = s_i$ とおけば次式をうる。

$$\frac{1}{l+1} x^{l+1} + \sum_2^{l} (1-S)_i^{-(l+1-i)} \frac{x^{l+1-i}}{l+1-i} - \log(1-S)_{l+1}$$

$$\sum_{h\geq 0} \Big(\sum_{i=0}^{h} (1-Q)_i^{-(h+1-i)} x^{h-i} \Big) t^h = \sum \det \begin{pmatrix} x & -1 & & 0 \\ g_2 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & -1 \\ g_h & \cdots & g_2 & x \end{pmatrix} t^h = (1-g(t)-xt)^{-1}$$

$$g(t) = \sum_{j\geq 2} g_j t^j$$

(この式は前から分かっていた)

又、$\sum_{h\geq 1} \Big(\sum_{i=0}^{h-1} (1-S)_i^{-(h-i)} \frac{x^{h-i}}{h-i} - \log(1-S)_h \Big) t^h = -\log(1-s(t)-xt) \qquad s(t) = \sum_{j\geq 2} s_j t^j$

即ち、$-\log(1-xt-s(t))$ を展開し、t^{l+1} の係数をとれば A_l 型 sing. の versal deformation が flat coördinates $\{s_2 \cdots s_{l+1}\}$ によって表示されている。 ($(ds_i \mid ds_{l+1-j}) = -\delta_{i,j} s_{l+1}$ for A_l)

即ち, $\boxed{\exp\left(-\sum_{l\geq 0}\tilde{F}_{A_l}(x,s)\frac{t^{l+1}}{l+1}\right) = 1-xt-s(t)}$ $\quad s(t)=\sum_{j\geq 2} s_j t^j$

同様にして,

$$\sum_{l\geq 1}\tilde{F}_{B_l}(x,s)\frac{t^{2l}}{2l} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+xt-s(t)}{1-xt-s(t)}\right) \qquad s(t)=\sum_{j\geq 1} s_{2j}t^{2j}$$

$$\coth\left(\sum\tilde{F}_{B_l}(x,s)\frac{t^{2l}}{2l}\right) = 1-xt-s(t).$$

$$s(t)=\sum_{j\geq 1} s_{2j}t^{2j}$$

$$\sum_{l\geq 1}\tilde{F}_{C_l}(x,y,s)\frac{t^{2l}}{2l} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\sqrt{x}t-s(t)}{1-\sqrt{x}t-s(t)}\right) - xy^2\log\frac{1+t}{1-t}$$

$$\sum\tilde{F}_{D_{l+1}}(x,y,s)\frac{t^{2l}}{2l} = \sum\tilde{F}_{C_l}(x,y,s)\frac{t^{2l}}{2l} + 2y\sum s'_{l+1}\frac{t^{2l}}{2l}.$$

により $\left(\begin{array}{l}\text{B D 型 Weyl群の flat generator system}\\ \text{B, D, C 型 deformation での flat coordinate}\end{array}\right)$ が得られる。

次の形の命題が得られていることに注意せよ. (この頁最上の式と p.11 最下の式)

<u>Proposition</u> 3.13. $(-1)\times(l+1)$ 乗和, $-(\varepsilon_1^{l+1}+\cdots+\varepsilon_{l+1}^{l+1})$ を $\chi_{\square}, \chi_{\square\square}, \cdots \chi_{\underbrace{\square\cdots\square}_{l+1}}$ の多項式として表示せよ. その式において, $x=-\chi_{\square}$, $s_i=-\chi_{\underbrace{\square\cdots\square}_{i}}$ を代入した式 $\tilde{F}_{A_l}(x,s)$ が A_l 型の versal deformation の flat coordinate による表示である。あるいは, $(-)^l\sum\varepsilon_i^{l+1}$ を基本対称式 $p_1, p_2, \cdots$ により表示し, $x=p_1$, $s_i=(-)^{i-1}p_i$ とおいたものも同じく $\tilde{F}_{A_l}(x,s)$ を与える.

<u>Example</u> 3.14 $\sigma_1=p_1$, $\sigma_2=p_1^2-2p_2$, $\sigma_3=p_1^3-3p_2p_1+3p_3$

$\sigma_4=p_1^4-4p_2p_1^2+4p_3p_1+2p_2^2-4p_4$ これより.

$$\tilde{F}_{A_1}=x, \quad \frac{1}{2}\tilde{F}_{A_2}=\frac{x^2}{2}+s_2, \quad \frac{1}{3}\tilde{F}_{A_3}=\frac{x^3}{3}+s_2x+s_3$$

$$\frac{1}{4}\tilde{F}_{A_4}=\frac{x^4}{4}+s_2x^2+s_3x+s_4+\frac{1}{2}s_2^2.$$

要するに, flat generators は A_l 型の場合, $\frac{1}{l+1}\sum\varepsilon_i^{l+1}$ を基本対称式で表示した時, p_1^i $0\leq i\leq l-1$ の係数にあらわれる.

*

§4 Flat coordinate system, Free deformation.

(4.1) $f: \mathbb{C}^{n+1},0 \to \mathbb{C},0$ を isolated sing point 0 をもつ holomorphic function. $\widehat{F}: \mathbb{C}^{n+1}\times S,0 \to \mathbb{C},0$ を f の unfolding で parameter space $(S,0)$ $\dim S = m$ をもつものとする.

$(\mathbb{C}^{n+1},0)$, $(S,0)$ の local coordinate を $(x_0,\cdots,x_n)$; $(t_1,\cdots,t_m)$ とし, 次の条件をみたす $\widetilde{F}$ のみを考える.

(4.1.1) $\widetilde{F}: \mathbb{C}^{n+1}\times S,0 \to \mathbb{C},0$ holomorphic

(4.1.2) $\widetilde{F}|_{\mathbb{C}^{n+1}\times\{0\},0} = f$

(4.1.3) $\partial\widetilde{F}/\partial t_m\,(x,t) \equiv c_m \neq 0$.

(4.1.4) $\{\partial\widetilde{F}/\partial t_i\,(x,0)\}_{1\leq i\leq m}$ は $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+1},0}/(\partial f/\partial x_0,\cdots,\partial f/\partial x_n)$ で一次独立.

これより,
$$\begin{cases} \widetilde{F}(x,t) = F(x,t') + c_m t_m, & t'=(t_1,\cdots,t_{m-1}) \\ \dfrac{\partial F}{\partial t_i}(0,0) = 0, & i = 0,\cdots,m-1 \end{cases}$$
と表される. さらに, (4.1.1)〜(4.1.4) をみたす他の座標系 $(s_1,\cdots,s_m)$ については, 次式が成立する.

$$\frac{\partial s_i}{\partial t_m} = 0 \quad 1\leq i\leq m-1, \quad \frac{\partial s_m}{\partial t_m} = c \ (\neq 0)$$
定数

適当に代表をとり, $X = \{(x,t) \mid \widetilde{F}(x,t)=0\}$, $S = \{(t)\}$ $T = \{(t')\}$ とおき, map φ, p を次式で定める.

$$\varphi: X \to S \qquad (x,t') \longmapsto \left(t', -\frac{1}{c_m}F(x,t')\right)$$
$$p: S \to T \qquad (t',t_m) \longmapsto (t')$$

Definition 4.2 1. $\Omega_\varphi = \varphi_*\left(\Omega_X^{n+1}/\sum_{i=1}^{m-1} dt_i\wedge\Omega_X^n + dF\wedge\Omega_X^n\right)$

2. $\Omega_{\varphi,T}$: $e_i = \left[\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial t_i}(x,t)\,dx_0\wedge\cdots\wedge dx_n\right]$ $i=1,\cdots,m$ が Ω_φ 内

で生成した $\mathcal{O}_T$-submodule (座標系のとり方にはよらない)

<u>Definition</u> 4.3([36]) unfolding $X \to S$ が <u>*free*</u> であるとは，
$\Omega_{\varphi, T}$ が $\mathcal{O}_S$-module になっており，$\mathcal{O}_T$-free rank m であること.
($X \to S$ が versal であれば free である (齋藤)).

Ω_φ の2元 $f_i = [g_i(x, t)dx]$ $i=1,2$ に対して，$X \to T$ によった residue symbol により内積を定める.(齋藤)

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \mathrm{Res}_{X/T} \begin{pmatrix} g_1(x,t)\, g_2(x,t)\, dx \\ \frac{\partial F}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_T.$$

<u>Definition</u> 4.4 rational double point の free deformation
$X \to S \to T$ が与えられたとき，S の local coördinate system $(t_1, \cdots, t_m)$ が *flat* であるとは，次の条件がみたされることをいう. (存在すれば下記 L は unique)

$L = \sum \mathbb{C} e_i \subset \Omega_{\varphi, T}$，$e_i = [\frac{\partial F}{\partial t_i} dx]$ $i = 1, \cdots, m$ とおくと
$\langle \, , \rangle : L \times L \to \mathcal{O}_T$ は定数値非退化である。
(これは versal の時の定義を free deformation の拡張した定義である)

<u>Theorem</u> 4.5 ([36]) τ を Coxeter group の type とする.
このとき，"τ 型の free deformation" $X \to S$ が存在し，次をみたす.

1. $X \to S$ の $\underset{\{t \in S \mid \varphi^{-1}(t) \text{ is singular}\}}{\overset{\|}{\text{discriminant set}}}$ は τ 型 Coxeter 群の discriminant と biholomorphic.
2. flat coördinate system が存在し，τ 型の flat

generator system と同一視される.//

この構成は「Coxeter system の folding」の理論によりなされる. 表3に H, I 型の pre deformation を, flat coördinate system (s) による表示でしるす.

<u>Definition</u> 4.6 Coxeter system (W, S) が Coxeter system (W', S') に <u>fold</u> される (記号で $(W,S) \rightsquigarrow (W', S')$) とは:

1. $S = \bigsqcup S_i$ と分割があり, $s_i' =$ (S_i が W で生成した部分群の長さ最大の元) (存在しないときは id. とする) とおき, $\Sigma' = \{s_i' \mid s_i' \neq id\}$. Σ' の生成した W の部分群を W'' とするとき, (W'', Σ') が Coxeter system であり $(W'', \Sigma') \simeq (W', S')$. さらに, $\forall i$, S_i の任意の2元が可換のとき, orthofolding と呼ぶ.

<u>Theorem</u> 4.7 ① 既約有限 Coxeter 系の ortho folding は下記でつくされる. 1. root 系の folding の induce するもの (i.e.,

$A_{2l-1} \rightsquigarrow B_l$, $D_{l+1} \rightsquigarrow C_l$, $E_6 \rightsquigarrow F_4$, $D_4 \rightsquigarrow G_2$.

2. 2つの exceptional なもの $D_6 \rightsquigarrow H_3^{(\pm)}$, $E_8 \rightsquigarrow H_4$.

3. Perfect folding $W \rightsquigarrow I_2(h(W))$ ここに $h(W)$ は W の Coxeter 数.

② $W \overset{ortho}{\rightsquigarrow} W'$ のとき, W の標準表現空間 V に部分空間 $\exists V'$ があり, W' は V' に標準表現で作用している. 又,

$S(V^*)^{W'} \simeq S(V^*)^W / (V'$ 上 0 となる不変式$)$ //

従って, orthofolding $W \rightsquigarrow W'$ により, W型 deformation の parameter space S_W の subspace $S_{W'}$ が定まる.

これにより unfolding $X_W \to S_W$ を

ひきもどし、$X_{W'} \to S_{W'}$ を得るが、

これが W' 型の free $\overset{\text{unfolding}}{\text{deformation}}$ である

$$\begin{tikzcd}
 & X_{W'} \arrow[rr, hook] \arrow[dd] & & X_W \arrow[dd] \\
V' \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "/W'"'] & & V \arrow[dr, "/W"'] & \\
 & S_{W'} \arrow[rr, hook] \arrow[d, phantom, "\wr"] & & S_W \arrow[d, phantom, "\wr"] \\
 & L_{W'} \arrow[rr, hook] & & L_W
\end{tikzcd}$$

<u>Proposition 4.8</u> 上述のもとで、flat coördinate system の定める linear subspace を L_W, $L_{W'}$ とすれば、内積をこめて $L_{W'} \hookrightarrow L_W$ は linear embedding である。

<u>Example 4.9</u> E_6 の flat coördinate system (s_i) (F_4).

$$\tilde F_{E_6}(x,s) = x^4 + y^3 + s_2 x^2 y + s_5 xy + \left(s_6 - \frac{1}{24}s_2^3\right)x^2 + \left(s_8 + \frac14 s_2 s_6 - \frac{1}{576}s_2^4\right)y$$
$$+ \left(s_9 - \frac{1}{12}s_2^2 s_5\right)x + s_{12} - \frac{1}{24}s_2^2 s_8 + \frac18 s_6^2 - \frac{1}{288}s_2^3 s_6 - \frac{1}{24}s_2 s_5^2$$

$\tilde F_{F_4}$ は $s_5 = s_9 = 0$ とおけばよい。

<u>Example 4.10</u> E_7 の flat coördinate system (s_i) $([33])$

$$t_2 = s_2,\ t_5 = s_5,\ t_6 = s_6 - \frac49 s_2^3,\ t_8 = s_8 - \frac43 s_2 s_6 + \frac19 s_2^4,\ t_{10} = s_{10}$$
$$t_{12} = s_{12} - s_2 s_{10} - \frac16 s_2^2 s_8 - \frac56 s_6^2 + \frac59 s_2^3 s_6 - \frac{1}{3^4} s_2^6$$
$$t_{14} = s_{14} - \frac13 s_2 s_{12} - \frac13 s_6 s_8 + \frac{1}{18} s_2^3 s_8 + \frac16 s_2 s_6^2 - \frac{1}{54} s_2^4 s_6$$
$$t_{18} = s_{18} - \frac13 s_2^2 s_{14} - \frac23 s_6 s_{12} - s_8 s_{10} + \frac43 s_2 s_6 s_{10} - \frac19 s_2^4 s_{10} - \frac13 s_2 s_8^2$$
$$+ \frac13 s_2^2 s_6 s_8 + \frac{4}{27} s_6^3 - \frac19 s_2^3 s_6^2 + \frac{1}{2\cdot 3^4} s_2^6 s_6 + \frac{109}{2\cdot 3^9} s_2^9.$$

但し

$$\tilde F_{E_7}(x,t) = -\frac13(x^3 y + y^3) + t_2 x y^2 + t_6 y^2 + t_8 xy + t_{10} x^2 + t_{12} y + t_{14} x + t_{18}.$$

<u>Example 4.11</u> E_8 の flat coörd. $([34])$.

$$\tilde F_{E_8}(x,t) = -\left(\frac15 x^5 + \frac13 y^3\right) + t_1 x^3 y + t_4 x^2 y + t_6 x^3 + t_7 xy + t_9 x^2 + t_{10} y + t_{12} x + t_{15}.$$

$$t_1 = s_1,\ t_4 = s_4 - 2s_1^4,\ t_6 = s_6 - 2s_1^2 s_4 + \frac65 s_1^6,\ t_7 = s_7 - 2s_1 s_6 - \frac23 s_1^3 s_4 + \frac{19}{15} s_1^7$$

$$t_9 = s_9 - \frac{3}{2}s_1^2 s_7 - s_1^3 s_6 - \frac{3}{2}s_1 s_4^2 + \frac{23}{5}s_1^5 s_4 - \frac{28}{15}s_1^9$$

$$t_{10} = s_{10} - s_1 s_9 - \frac{1}{2}s_1^3 s_7 - s_4 s_6 + \frac{3}{2}s_1^4 s_6 + \frac{1}{2}s_1^2 s_4^2 - \frac{2}{15}s_1^6 s_4 - \frac{11}{45}s_1^{10}$$

$$t_{12} = s_{12} - s_1^2 s_{10} - \frac{4}{3}s_1^3 s_9 - 2s_1 s_4 s_7 + \frac{12}{5}s_1^5 s_7 - s_6^2 + 2s_1^2 s_4 s_6 - \frac{7}{30}s_1^6 s_6$$
$$- \frac{1}{3}s_4^3 + \frac{7}{3}s_1^4 s_4^2 - \frac{107}{30}s_1^8 s_4 + \frac{82}{75}s_1^{12}$$

$$t_{15} = s_{15} - s_1^3 s_{12} - s_1 s_4 s_{10} + \frac{4}{5}s_1^5 s_{10} - s_6 s_9 + \frac{7}{15}s_1^6 s_9 - \frac{1}{2}s_1 s_7^2 + \frac{1}{2}s_1^2 s_6 s_7$$
$$- \frac{1}{2}s_4^2 s_7 + \frac{5}{3}s_1^4 s_4 s_7 - \frac{29}{30}s_1^8 s_7 + \frac{1}{2}s_1^3 s_6^2 + \frac{1}{2}s_1 s_4^2 s_6 - \frac{43}{30}s_1^5 s_4 s_6$$
$$+ \frac{14}{45}s_1^9 s_6 + \frac{1}{3}s_1^3 s_4^3 - \frac{43}{45}s_1^7 s_4^2 + \frac{421}{450}s_1^{11} s_4 - \frac{103}{450}s_1^{15}.$$

H4 の flat coordinate は $s_4 = s_7 = s_9 = s_{12} = 0$ とすればよい.

§5. n.g.g.r. (ユニタリー鏡映群)

n.g.g.r. は Thm 1.7 ② で分類されている.

不変式環の生成元の次数を $d_1 \le d_2 \le \cdots \le d_\ell = h$, $m_i = d_i - 1$.

discriminant を不変にする logarithmic vector field $X_1, \cdots, X_\ell$ の weight $+1$ を $n_1 \le n_2 \le \cdots \le n_\ell$ とする.

Theorem 5.1 ([15]) $n_\ell < h-1 \Leftrightarrow m_i + n_{\ell+1-i} = h \Leftrightarrow$ ℓ 個の鏡映で生成されている. //

discriminant の reduced な定義式を $D=0$ とし, この次数 (weight $(d_1, \cdots, d_\ell)$ ではかったもの) を d とする.

$$\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{\ell} d_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{H(G)}$$ により $H(G)$ を定義する. (今野)

Theorem 5.2. 1. $H(G)$ は自然数である.

2. $H(G) \le \max\{h, n_\ell + 1\}$.

3. $H(G) = \max\{h, n_\ell + 1, H(G)\}$ $\Leftrightarrow$ G は order 2 の鏡映で生成される

寺尾宏明は $t=\frac{2}{\ell}\sum n_i$ について次の事実を見出した.

<u>Theorem</u> 5.3　1. t は自然数である.

2. $t=h$ or $n_\ell+1$.

この2つについては, 次の関係がある. (つまり, ($t=H$ と $H=h$ or $n_\ell+1$ で maximal) がだいたい同値)

<u>Proposition</u> 5.4　1. $t=H \Rightarrow H=h$ or $n_\ell+1$. かつ No. 3 以外ではこのとき H は maximal.

2. $H=h \Rightarrow t=H$ かつ $G(4,2,2)$ 以外ではこのとき H は maximal.
3. $H=n_\ell+1 \Rightarrow t=H$ かつ No. 3 以外では H は maximal

以上の <u>Thm</u> 5.1, 5.2, 5.3, <u>Prop</u> 5.4 はすべて分類にもとづいて示されている. 不変量 h, $n_\ell+1$, H, t は表5にまとめてある.

(Coxeter 群ではすべて等しい.)

さて, Vinberg [ ] において graded Lie Algebra の "Weyl group" を定義しており, u.g.g.r になっている。それは表4で第2行目に0をつけたもの, No. 13 である。又, 表4に対応する deformation (i.e., discriminant set 同士が biholo) を記した.

u.g.g.r. について幾何にも色々興味あることがあるが、又の機会にゆずる.

§6. Flatto の不変式.

G を Coxeter 群 V^* の orthonormal basis を $\xi_1,\cdots,\xi_\ell$ とする. G を既約とし, $P_1(\xi),\cdots,P_\ell(\xi)$ を次の方式で定める.

<u>Definition</u> 6.1.　1. $P_1(\xi)=\xi_1^2+\cdots+\xi_\ell^2$

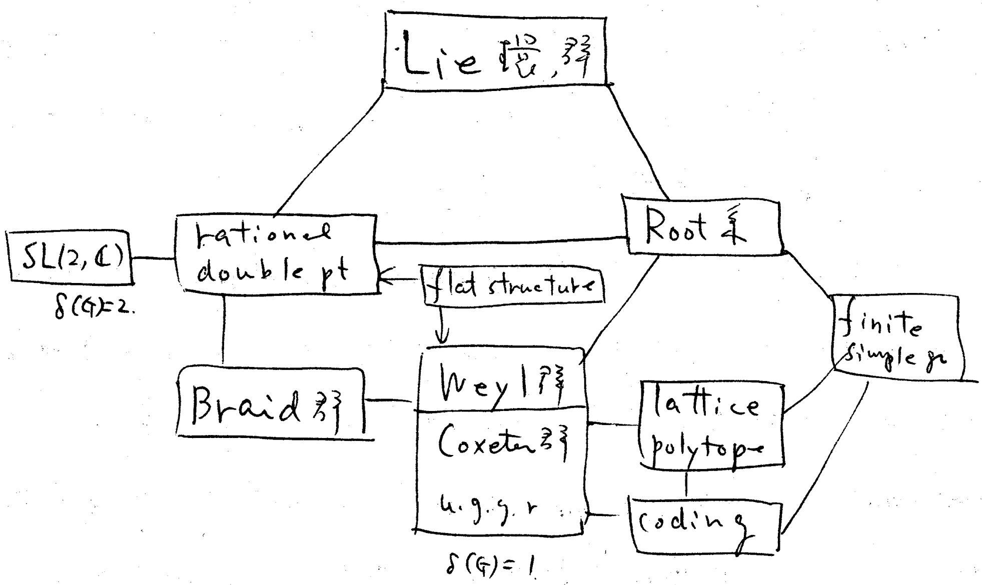
2. $\{P(\xi) \mid P_i(\frac{\partial}{\partial\xi})P(\xi)=0 \quad i=1,\cdots,k\}$ の basis を

$P_{k+1}(\xi)$, ($P_{\frac{\ell}{2}}(\xi)$ and $P_{\frac{\ell}{2}+1}(\xi)$ if $G=D_\ell$ $\left(\begin{array}{l} k=\frac{\ell}{2}-1 \\ \ell : \text{even}\end{array}\right)$) とする。

<u>Theorem</u> 6.2 ([11]) Definition 6.1 の方法により, $F=\sum_{i=1}^{\ell}\mathbb{C}P_i$ は unique に定まる.

<u>Remark</u> 6.3 $P_i(\xi)$ $i\geq 2$ は定義より調和多項式である. 具体的に決定するのは相当たいへんであるが, この $P_i(\xi)$ が flat invariants と一致するのは $\ell=2$ の場合のみと思われる

§7. 概観



目次.

§8.

$$f_{A_\ell} = x^{\ell+1} + yz, \quad f_{D_\ell} = x^{\ell-1} - xy^2 + z^2,$$

$$f_{E_6} = x^4 + y^3 + z^2, \quad f_{E_7} = x^3y + y^3 + z^2,$$

$$f_{E_8} = x^5 + y^3 + z^2.$$

$$\tilde{F}_{A_\ell} = f_{A_\ell} + \sum_{i=2}^{\ell+1} t_i x^{\ell+1-i}, \qquad \tilde{F}_{D_\ell} = f_{D_\ell} + \sum_{i=1}^{\ell-1} t_{2i} x^{\ell-1-i} + 2t_\ell' y,$$

$$\tilde{F}_{E_6} = f_{E_6} + t_2x^2y + t_5xy + t_6x^2 + t_8y + t_9x + t_{12},$$

$$\tilde{F}_{E_7} = f_{E_7} + t_2xy^2 + t_6y^2 \pm t_8xy + t_{10}x^2 + t_{12}y + t_{14}x + t_{18},$$

$$\tilde{F}_{E_8} = f_{E_8} + t_2x^3y + t_8x^2y + t_{12}x^3 + t_{14}xy + t_{18}x^2 + t_{20}y + t_{24}x + t_{30}.$$

表1. rational double points とその versal deformation.

B_ℓ	$f_{A_{2\ell-1}} + t_2x^{2\ell-2} + t_4x^{2\ell-4} + \cdots + t_{2\ell}$
C_ℓ	$f_{D_{\ell+1}} + t_2x^{\ell-1} + t_4x^{\ell-2} + \cdots + t_{2\ell}$
F_4	$f_{E_6} + t_2x^2y + t_6x^2 + t_8y + t_{12}$
G_2	$x^3 + y^3 + t_2xy + t_6$ (D_4 の sub)
BC_ℓ	$f_{A_{2\ell}} + t_2x^{2\ell-1} + t_4x^{2\ell-3} + \cdots + t_{2\ell}x$

表2 ADE 以外の root 系に対応する deformation.

H_3
$$f_{D_6} + s_2x^4 + \frac{7}{20}s_2^2x^3 + \left(s_6 + \frac{1}{20}s_2^3\right)x^2 + \left(\frac{3}{10}s_2s_6 + \frac{1}{400}s_2^4\right)x + \left(s_{10} + \frac{1}{100}s_2^2s_6 + \frac{1}{50000}s_2^5\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}s_6y.$$

H_4
$$-\left(\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}y^3\right) + s_2x^3y - 2s_2^4x^2y + \left(s_{12} + \frac{6}{5}s_2^6\right)x^3 + \left(-2s_2s_{12} + \frac{19}{15}s_2^7\right)xy + \left(-s_2^3s_{12} - \frac{28}{15}s_2^9\right)x^2 + \left(s_{20} + \frac{3}{2}s_2^4s_{12} - \frac{11}{45}s_2^{10}\right)y + \left(-s_2^2s_{20} - s_{12}^2 - \frac{7}{30}s_2^6s_{12} + \frac{82}{75}s_2^{12}\right)x + s_{30} + \frac{4}{5}s_2^5s_{20} + \frac{1}{2}s_2^3s_{12}^2 + \frac{14}{45}s_2^9s_{12} - \frac{103}{450}s_2^{15}.$$

$I_2(2k+1)$ $\quad f_{A_{2k}} + \sum_{j=1}^{k} \frac{(2k+2-2j,\, j-1)}{j!\,(2k+1)^{j-1}} s_2^{j} x^{2k+1-2j} + s_{2k+1}$

$I_2(2k)_A$ $\quad f_{A_{2k-1}} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(2k+1-2j,\, j-1)}{j!\,(2k)^{j-1}} s_2^{j} x^{2k-2j} + s_{2k} + \frac{s_2^{k}}{k(2k)^{k-1}}$

$I_2(2k)_D$ $\quad f_{D_{k+1}} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(2k+1-2j,\, j-1)}{j!\,(2k)^{j-1}} s_2^{j} x^{k-j} + s_{2k} + \frac{s_2^{k}}{k(2k)^{k-1}}$

$I_2(12)_E$ $\quad f_{E_6} + s_2 x^2 y - \frac{1}{24} s_2^3 x^2 - \frac{1}{576} s_2^4 y + s_{12}$

$I_2(18)_E$ $\quad -\frac{1}{3}(x^3 y + y^3) + s_2 x y^2 - \frac{4}{9} s_2^3 y^2 + \frac{1}{9} s_2^4 x y - \frac{1}{81} s_2^6 y + \frac{179}{2\cdot 3^9} s_2^9$

$I_2(30)_E$ $\quad -\frac{1}{5}(x^5 + y^3) + s_2 x^3 y - 2 s_2^4 x^2 y + \frac{6}{5} s_2^6 x^3 + \frac{19}{15} s_2^7 x y - \frac{28}{15} s_2^9 x^2$

$\quad - \frac{11}{45} s_2^{10} y + \frac{82}{75} s_2^{12} x + s_{30} - \frac{103}{450} s_2^{30}$

表3. H, I 型の free deformation.

			discriminant.
$G(r,1,\ell)$	∘	$f_{A_{r\ell}} + t_r x^{r(\ell-1)} + t_{2r} x^{r(\ell-2)} + \cdots + t_{\ell r}$	B_ℓ
$G(r,2,\ell)$	∘	$f_{D_{\frac{r\ell}{2}}} + t_r x^{\frac{r}{2}(\ell-1)-1} + \cdots + t_{r(\ell-1)} x^{\frac{r}{2}-1} + 2 t'_{\frac{r\ell}{2}} y$	$t' \Delta_\ell(1, t_r, \cdots, t_{r(\ell-1)}, t'^2)$
~~No.4~~ $[\;]^r$		$f_{A_{r-1}} + t_r$	A_1
No.4	∘	$x^3 + y^3 + t_4 x + t_6$	A_2
5	∘	$f_{E_6} + t_6 x^2 + t_{12}$	B_2
8	∘	$f_{E_6} + t_8 y + t_{12}$	A_2
16	∘	$f_{E_8} + t_{20} y + t_{30}$	A_2
20		$f_{E_8} + t_{12} x^3 + \frac{1}{5} t_{12}^2 x + t_{30}$	$I_2(5)$
25	∘	$f_{E_6} + t_6 x^2 + t_9 x + t_{12}$	A_3
26	∘	$f_{E_7} + t_6 y^2 + t_{12} y + t_{18}$	C_3
32	∘	$f_{E_8} + t_{12} x^3 + t_{18} x^2 + t_{24} x + t_{30}$	A_4
31	∘	$f_{E_8} + t_8 x^2 y + t_{12} x^3 + t_{20} y + t_{24} x$	(複雑)

9	$f_{F_8} + t_8 x^2 y + t_{24} x$	G_2
10	$f_{E_8} + t_{12} x^3 + t_{24} x$	B_2
12	$f_{E_6} + t_6 x^2 + t_8 y + \frac{1}{8} t_6^2$	$(t_8/3)^3 + (t_6/4)^4$
22	$f_{E_8} + t_{12} x^3 + t_{20} y + \frac{1}{5} t_{12}^2 x$	$(t_{20}/3)^3 - (t_{12}/5)^5$

表4 u. g. g. r. に対応する deformation

No.	h	n_e+1	H	No.	type	h	n_e+1	H	$2n/l$	bd	
3	r	2 =	2	23	H_3	10	10	10	10	•	
4	6	4	3	24	·	14	12	14	14		
5	12	8	4	25	·	12	8	4	8	•	
6	12	10	6	26	·	18	14	6	14	•	
7 ×	12	14	6	27	·	30	26	30	30		
8	12	6	3	28	F_4	12	12	12	12	•	
9	24	18	6	29	·	20	18	20	20		
10	24	14	4	30	H_4	30	30	30	30	•	
11 ×	24	26	6	31	×	24	30 =	30	30	•	
12 ·	8	12 =	12	32	·	30	20	5	20	•	
13 ·	12	18 =	18	33	·	18	16	18	18		
14	24	20	8	34	·	42	38	42	42		
15 ·	24	26	10	35	E_6	12	12	12	12	•	
16	30	12	3	36	E_7	18	18	18	18	•	
17	60	42	6	37	E_8	30	30	30	30	•	
18	60	32	4	1	A_l	$l+1$	$l+1$	$l+1$	$l+1$	•	
				$G(r,1,l)$	•	lr	$(l-1)r+2$	$2l$	$(l-1)r+2$	•	$r \geq 2$
19 ×	60	62	6	$G(6,2,2)$	×	6	8	6	8	•	
20	30	20	5	$G(r,2,l)$	×	$(l-1)r$	$(l-1)r+2$	$4(l-1)+2$	$(l-1)r+2$	•	$r \geq 6$
21	60	50	10	$G(r,r/2,l)$	×	$(l-1)r$	$(l-1)r+2$ =	$(l-1)r+2$	$(l-1)r+2$	$(l=2)$	$r \geq 4$
22 ×	20	30 =	30	$G(r,p,l)$	×	$(l-1)r$	$(l-1)r+2$	$2(l-1)p+2$	$(l-1)r+2$	$(l=2)$	$3 \leq p < \frac{r}{2}$
				$G(r,r,l)$	•	$(l-1)r$	$(l-2)r+2$	$(l-1)r$	$(l-1)r$	$(r=2)$	$l \geq r \geq 2$
						$(l-1)r$	$(l-1)(r-1)+1$	$(l-1)r$	$(l-1)r$	or $(l=2)$	$2 \leq l < r$

表5 u. g. g. r. の色々な invariants

Classical works

[1] F.Brioschi: Sulla risoluzione delle equozioni di quinto grado, Annali di Math.,SerI,1(1858), 256-259.

[2] G.Racah: Sulla caratterizzazione dello rappresentazioni..., Rend.Circ.Mat.Palermo,8(1950),108-113.

[3] H.S.M.Coxeter: The product of generators of a finite groups generated by reflections, Duke Math.,18(1951),765-782.

[4] J.S.Frame: The classes and representations of the groups of 27 lines and 28 bitangents, Annali di Math.,32(1951),83-119.

[5] G.C.Shephard and J.A.Todd: Finite unitary reflection groups, Can.J.Math.,6(1954),274-304.

[6] C.Chevalley: Invariants of finite groups generated by reflections, Amer.J.Math.,77(1955),778-772.

[7] A.J.Coleman: The Betti numbers of the simple groups, Canad. J.Math., 10(1958),349-356.

[8] R.Steinberg: Finite reflection groups, Trans.Amer.Math. Soc., 91(1959),493-504.

[9] " : Invariants of finite reflection groups, Canad.J. Math.,12(1960),616-618.

[10] L.Solomon: Invariants of finite reflection groups, Nagoya M.J.,22(1963),57-64.

Nowadays

[11] L.Flatto: Invariants of finite reflection groups and mean value problems II, Amer.J.Math.,92(1970),552-561.

[12] R.P.Stanley: Relative invariants of finite groups generated by pseudoreflections, J.Alg.,49(1977),134-148.

[13] L.Flatto: Invariants of finite reflection groups, L'Enseignement math., 24(1978),237-292.

[14] T.A.Springer: Regular elements of finite reflection groups, Inventiones Math.,25(1974),159-198.
[15] P.Orlik and L.Solomon: Unitary reflection groups and Cohomology, Inventiones Math.,59(1980),77-94.

Logarithmic vector fields

[16] K.Saito: Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields, J.Fac.Sci.Univ.Tokyo, (1980),
[17] V.I.Arnold: Wave front evolution and equivalent Morse lemma, Commu.P.Appl.Math.,29(1976),557-582.
[18] Yano T.,Sekiguchi J.: Coxeter groups ni fuzui suru weighted homogeneous polynomial no microlocal structrue (with an Appendix on GL(2)), RIMS Kokuroku 281, 1975,40-105.
[19] J.Sekiguchi and T.Yano: The algebra of invariants of the Weyl groups $W(F_4)$, Sci.Rep.Saitama Univ.Ser.A 9(1979),21-32.
[20] J.Sekiguchi and T.Yano: A note on the Coxeter group of type H_3, Sci.Rep.Saitama Univ.Ser.A 9(1079),33-44.
[21] T.Yano and J.Sekiguchi: Microlocal structrue of weighted homogeneous polynomials associated with finite Coxeter groups, I, Tokyo J.Math. 2(1979),193-220.
[22] " and " : " ,II, Tokyo J.Math. (1981), to appear.
[23] T.Yano: On a generator system of $W(E_7)$ invariant ring, to appear.
[24] A.B.Guivental': Displacement of invariants of groups that are generated by reflections and are connected with simple singularities of functions, Functional Anal.Appl.14 (1980), 81-89.

Singularities, Lie algebras

[25] V.I.Arnold: Normal forms of functions near defenerate critical points, the Weyl groups A_k, D_k, E_k and the Lagrangean singularities, Functional Anal.Appl.6(1972),3-25.

[26] " : Critical points of functions on a manifold with boundary , the simple Lie groups B_k,C_k,F_4 and singularities of the evolutes, Uspehi Mat.Nauk 33(1978),91-105.

[27] " : Indices of singular points of 1-forms on a manifold with boundary, displacement of invariants of groups, generated by reflection and sungular points of projections of smooth surfaces, Uspehi Mat.Nauk 34(1979),3-38.

[28] E.Brieskorn: Singular elements of semi-simple algebraic groups, Actes Congres Intern.Math. 1970, t.2,279-284.

[29] P.Slodowy: Simple singularities and simple algebraic groups, Lecture Note in Math., 815

[30] J.Sekiguchi: logarithmic vector fields along the discriminant set of a Weyl group, submitted to J.Math.Soc.Japan.

[31] H.Terao: Free arrangement of hyperplanes,

Flat coördinate system

[32] K.Saito,T.Yano and J.Sekiguchi: On a certain generator system of the ring of invariants of a finite reflection group, Comm. in Algebra 8(1980),373-408.

[33] T.Yano: Flat coördinate system of type E_7, to appear in Proc. Japan Acad.

[34] M.Kato and S.Watanabe: Flat coördiante system for the versal deformation of rational double point of type E_8, to appear.

[35] K.Saito: On a linear structure of a quotient variety by a finite reflection group, Preprint RIMS-288, Res.Ins.Math.Sci. Kyoto Univ., accepted with proviso by Commun. in Algebra.

[36] T. Yano: Free deformations of isolated singularities, Sci. Rep.Saitama Univ.Ser A 9(1980),61-70.

[37] T.Yano and M.Kato: Free deformations of simple elliptic singularities, Sci.Rep.Saitama Univ.Ser A 9(1980),71-79.

[38] T.Yano: Deformation of isolated singularities and folding of Coxeter systems, in preparation.

[39] T.Yano: Deformation s of rational double points associated with unitary reflection groups, Sci.Rep.Saitama Univ.Ser A 10(1981).