数理解析研究所講究録
第455巻 1982年 40-52

3値論理関数の閉集合の束について

電通大　　町田 元

§0. 準備

自然数 $k>1$ に対して、集合 $\{0, 1, \cdots, k-1\}$ を E_k とおく。E_k 上の n 変数関数 f、すなわち、$f:(E_k)^n \to E_k$ を<u>k 値論理関数</u>とよぶ。（2値論理関数はブール関数にほかならない。）　k 値論理関数の全体を $P_k^{(n)}$ とおき、さらに、$P_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_k^{(n)}$ とおく。

k は1つに固定して考えるので、添字 k は省略することが多い。また、k 値論理関数を単に関数という。

射影関数 pr_i^n（すなわち、任意の $x=\langle x_1, x_2, \cdots, x_n\rangle \in E^n$ に対して $pr_i^n(x) = x_i$）の全体を PR（$= PR_k$）と表わす。

射影関数を用いて関数の合成を行うことにより、変数の交換、同一視などが自由に行えることに注意する。

P の部分集合 $F \subseteq P$ に対して、(1) $F \cup PR$ を含み、かつ、(2) 関数の合成に関して閉じている集合全体を考え、そ

の中で最小のものをFの閉包とよび、[F]と表わす。上に注意したことにより、任意の$f \in [F]$に対して、fから変数の交換、同一視を施こして得られる関数もまた[F]に属する。Fは[F]=Fであるとき閉集合とよばれる。

各$k > 1$について、閉集合の全体$\mathcal{L}_k$は集合の包含関係に関して束(lattice)をなす。$\mathcal{L}_k$は最大元P_kおよび最小元PR_kをもつ。

閉集合全体を考え、束$\mathcal{L}_k$の構造を決定するのが、われわれの研究の窮極の目標である。$\mathcal{L}_2$(すなわち、ブール関数の場合)は、すでにPost[9]により完全に決定されている。([3]参照。)しかしながら、$k \geqq 3$については$\mathcal{L}_k$は極めて複雑な構造をもつようで、まだあまり多くのことはわかっていない。

$\mathcal{L}_2$に比べて$\mathcal{L}_k$($k \geqq 3$)の構造が複雑であることは、次の結果からも推察することができよう。

$$\begin{cases} \mathrm{card}(\mathcal{L}_2) = \aleph_0 \\ \mathrm{card}(\mathcal{L}_k) = \aleph_1 \qquad (\forall k \geqq 3) \end{cases}$$

(集合Xに対して、card(X)はXの濃度を表わす。)$k \geqq 3$に対する結果は、Janov and Mučnik [2] による。

本稿の目的は、$\mathcal{L}_k$、とくに$\mathcal{L}_3$の構造についてこれまでに知られている主要な結果をまとめるとともに、筆者が得た

最近の結果を紹介することである。なお、比較のため $\mathcal{L}_2$ の性質についても触れる。

§1. 極大閉集合

$\mathcal{L}-\{P\}$ における極大元を極大閉集合とよぶ。極大閉集合をすべて求める問題は、$k=3$ については Jablonskii [1] が解き、さらに、すべての $k \geqq 3$ について Rosenberg [10] が完全に解決した。ここでは、$k=2, 3$ の場合について述べる。なお、$k=3$ については、Rosenberg による関係 (relation) を用いた表示で示す。

定理([9]). $k=2$ のとき、極大閉集合は次の5個である。

(1) $M_0 = \{ f \in P \mid f(0, \cdots, 0) = 0 \}$

(2) $M_1 = \{ f \in P \mid f(1, \cdots, 1) = 1 \}$

(3) $M_2 = \{ f \in P \mid f:$ 単調非減少関数$\}$

(4) $M_3 = \{ f \in P \mid f:$ 自己双対関数$\}$

(5) $M_4 = \{ f \in P \mid f:$ 線型関数$\}$

定理([1], [10]). $k=3$ のとき、極大閉集合は次の18個である。

(1) $D(0) = Pol(\{0\})$

(2) $D(1) = Pol(\{1\})$

(3) $D(2) = Pol(\{2\})$

(4) $D(0,1) = Pol(\{0, 1\})$

(5) $D(1,2) = Pol(\{1, 2\})$

(6) $D(2,0) = Pol(\{2, 0\})$

(7) $C(0) = Pol(\{\binom{0}{0}, \binom{1}{1}, \binom{2}{2}, \binom{0}{1}, \binom{1}{0}, \binom{0}{2}, \binom{2}{0}\})$

(8) $C(1) = Pol(\{\binom{0}{0}, \binom{1}{1}, \binom{2}{2}, \binom{1}{2}, \binom{2}{1}, \binom{1}{0}, \binom{0}{1}\})$

(9) $C(2) = Pol(\{\binom{0}{0}, \binom{1}{1}, \binom{2}{2}, \binom{2}{0}, \binom{0}{2}, \binom{2}{1}, \binom{1}{2}\})$

(10) $E(0) = Pol(\{\binom{0}{0}, \binom{1}{1}, \binom{2}{2}, \binom{1}{2}, \binom{2}{1}\})$

(11) $E(1) = Pol(\{\binom{0}{0}, \binom{1}{1}, \binom{2}{2}, \binom{2}{0}, \binom{0}{2}\})$

(12) $E(2) = Pol(\{\binom{0}{0}, \binom{1}{1}, \binom{2}{2}, \binom{0}{1}, \binom{1}{0}\})$

(13) $O(0) = Pol(\{\binom{0}{0}, \binom{1}{1}, \binom{2}{2}, \binom{2}{0}, \binom{0}{1}, \binom{2}{1}\})$

(14) $O(1) = Pol(\{\binom{0}{0}, \binom{1}{1}, \binom{2}{2}, \binom{0}{1}, \binom{1}{2}, \binom{0}{2}\})$

(15) $O(2) = Pol(\{\binom{0}{0}, \binom{1}{1}, \binom{2}{2}, \binom{1}{2}, \binom{2}{0}, \binom{1}{0}\})$

(16) $Perm = Pol(\{\binom{0}{1}, \binom{1}{2}, \binom{2}{0}\})$

(17) $L = Pol\left(\left\{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in E^3 \;\middle|\; c \equiv 2(a+b) \pmod 3\right\}\right)$

(18) $S = Pol\left(\left\{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in E^3 \;\middle|\; \#\{a, b, c\} \leqq 2\right\}\right)$

ただし、$V = \{v_1, \cdots, v_m\}$ $(v_i \in E^r)$ に対して

$$Pol(V) = \{ f \in P \mid \forall u_1, \cdots, u_n \in V \text{ に対して } f(u_1, \cdots, u_n) \in V \}$$

と定める。

§2. 準極大閉集合

$\mathcal{L}-(\{P\}\cup\{M \mid M$: 極大閉集合$\})$ における極大元、すなわち、極大閉集合のすぐ“下”に位置する閉集合を<u>準極大閉集合</u>とよぶ。$k=3$ の場合は、[4], [5]により完全に準極大閉集合の決定がなされたが、$k>3$ についてはまだほとんど調べられていない。$k=3$ の場合の一つの例として、前節の定理中の $O(1)$ ($=\{f\in P \mid f$: 単調非減少関数$\}$) に含まれる準極大閉集合を次に示す。なお、$O(1)$ を O と表わす。

<u>定理</u>([5]). ($k=3$ の場合)　O ($=O(1)$) に含まれる準極大閉集合は次の13個である。

(1)　$M_0 = O\cap D(0)$

(2)　$M_1 = O\cap D(2)$

(3)　$M_2 = O\cap D(0,1)$

(4)　$M_3 = O\cap D(1,2)$

(5)　$M_4 = O\cap D(2,0)$

(6)　$M_5 = O\cap C(0)$

(7)　$M_6 = O\cap C(1)$

(8) $M_7 = O \cap C(2)$

(9) $M_8 = O \cap E(0)$

(10) $M_9 = O \cap E(2)$

(11) $M_{10} = O \cap S$

(12) $M_{11} = [\, \{max\} \cup O^{(1)} \,]$

(13) $M_{12} = [\, \{min\} \cup O^{(1)} \,]$

ただし、(12), (13) において、$O^{(1)} = O \cap P^{(1)}$ である。

§3. 極大系列

開集合の列 $\mathcal{C} = \langle F_1, F_2, \cdots, F_r \rangle$ が次の条件をみたすとき、$\mathcal{C}$ を極大系列 (maximal chain) とよぶ。

(1) $F_1 = PR$,

(2) $F_r = P$,

(3) すべての i ($1 \leqq i < r$) について

(3-1) $F_i \subsetneqq F_{i+1}$,

(3-2) $F_i \subsetneqq F \subseteq F_{i+1}$ ($F \in \mathcal{L}$) ならば $F = F_{i+1}$.

極大系列 $\mathcal{C}$ に対して、r を $\mathcal{C}$ の長さという。

Szendrei [11] は、最短の長さの極大系列について調べ、次の結果を得た。

定理（[11]）.

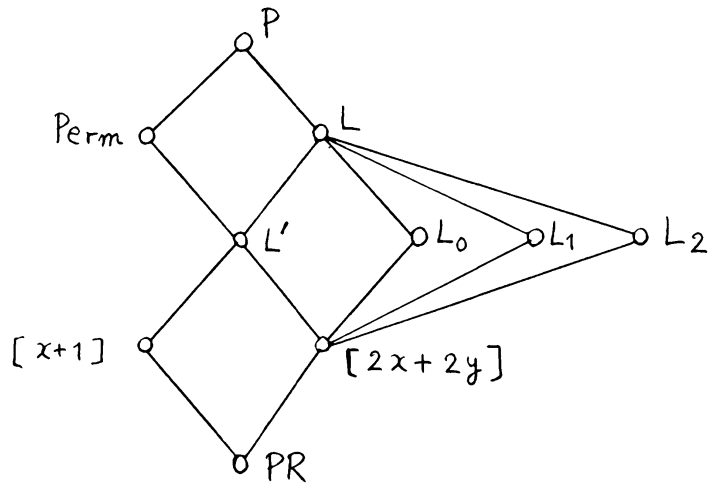
(i)　k = 奇素数とする。

- 長さ4以下の極大系列は存在しない。
- 長さ5の極大系列は $(k-2)!\,(k+4)$ 個存在する。

(ii)　k = 合成数とする。

長さ5以下の極大系列は存在しない。

Szendrei はさらに奇素数の場合の長さ5の極大系列をすべて求めているが、とくに $k=3$ の場合は次図に示す7個である。



なお、$L' = \{\, a_0x_0 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1} + a \mid a_0 + \cdots + a_{n-1} \equiv 1 \pmod 3 \,\}$,

$L_i = \{\, a_0x_0 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1} + a \mid a = (1 - a_0 - \cdots - a_{n-1})\cdot i \,\}$

$(i = 0, 1, 2)$

である。

一方、$k=2$ のときは、最短の極大系列の長さはやはり5であるが、長さ5の極大系列は14個存在する。

§4. 極小閉集合

$\mathcal{L}-\{PR\}$ における極小元を<u>極小閉集合</u>とよぶ。極小閉集合をすべて求める問題は $k \geqq 3$ については未解決である。ここでは、$k=3$ の場合に得られている部分的な結果について述べる。

極小閉集合Fは、1つの関数 $f \in P$ によって生成される($F=[f]$)のであるが、その生成元が本質的1変数関数であるか、または、本質的 m 変数関数($m \geqq 2$)であるかによって事情がやや異なるので、それらを分けて考えるため次のような定義を行う。

<u>定義</u>. 閉集合Fが<u>1-極小閉集合</u>であるとは、次の(1),(2)をみたすことである。

(1) $\exists f \in P^{(1)}-\{id\}$, $F=[f]$,

(2) $\forall F' \in \mathcal{L}$ に対して、$PR \subsetneqq F' \subseteq F$ ならば $F'=F$ である。

また、閉集合Fが<u>2-極小閉集合</u>(<u>本質的極小閉集合</u>)であるとは、次の(1),(2)をみたすことである。

(1) $F \cap (\bigcup_{m=2}^{\infty} P^{ess(m)}) \neq \phi$,

(2) $\forall F' \in \mathcal{L}$ に対して、 $F' \subsetneqq F$ ならば $F' \subseteq (P^{ess(0)} \cup P^{ess(1)})$.

ただし、 $P^{ess(m)}$ $(m \geqq 0)$は、本質的m変数関数の全体を表わす。

2－極小閉集合も１つの元で生成される。１－極小閉集合はいずれも $\mathcal{L}-\{PR\}$ における極小元であるが、２－極小閉集合は必ずしも極小元であるとは限らない、すなわち、この節の冒頭で述べた意味で極小閉集合であるとは限らない。

（４－a） １－極小閉集合

任意の $k>1$ に対して次の結果が成り立つ。

定理（［８］，Machida）． $f \in P^{(1)}$ とする。

(i) f ＝全単射のとき、

$[f]$: 1－極小 $\Longleftrightarrow$ f の order は 素数である

(ii) $f \neq$ 全単射のとき、

$[f]$: 1－極小 $\Longleftrightarrow$ $f|_{Range(f)} = id_{Range(f)}$

（＝ Range(f) 上の恒等関数）

とくに、$k=3$ の場合、１－極小閉集合は13個存在する。

各々に対する生成元 $f_1, \cdots, f_{13}$ ($\in P^{(1)}$) を次の表に示す。(各関数を、0、1,2 に対する値で表示する。)

f	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}
f(0)	0	2	1	1	0	0	0	0	1	2	0	1	2
f(1)	2	1	0	2	1	1	0	2	1	1	0	1	2
f(2)	1	0	2	0	0	1	2	2	2	2	0	1	2

(4-b) 2-極小閉集合

任意の2-極小閉集合Fに対して、ある $f \in P^{ess(2)} \cup P^{ess(3)}$ が存在して、$F = [f]$ となる。従って、2-極小閉集合を求めるには、その生成元を $P^{(3)}$ の中で探せば十分である。

一方、任意の $f \in P^{(3)}$ は

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i_1, i_2, i_3, a_{i_1 i_2 i_3} \in E} a_{i_1 i_2 i_3} x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3}$$

と一意的に表わされる。 $f \in P^{(3)}$ をこのように表わしたとき、$\{ a_{i_1 i_2 i_3} \mid i_1, i_2, i_3 \in \{1, 2\} \} \neq \{0\}$ であるならば、fの <u>rank</u> は3であるという。2-極小閉集合Fについて、Fの生成元の rank がすべて3であるとき、Fの <u>rank</u> は3であるという。

また、fの上のような表現に対して、$\alpha(f)$, $\beta(f)$, $\gamma(f)$ を次のように定める。

$$\alpha(f) = \sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=\text{even}\\ \neq 0}} a_{i_1 i_2 i_3} \pmod 3,$$

$$\beta(f) = \sum_{i_1+i_2+i_3=\text{odd}} a_{i_1 i_2 i_3} \pmod 3,$$

$$\gamma(f) = a_{000} .$$

rank 3 の 2 - 極小閉集合について次の定理が成り立つ。

<u>定理</u>（[12]）. Fを rank 3 の 2 - 極小閉集合とし、$f \in P^{(3)}$ をその生成元とする。Fは次の各関数が生成するどの閉集合とも相異なると仮定する。

$$a(x_1^2 x_2^2 x_3^2 + x_1^2 x_2^2 + x_2^2 x_3^2 + x_3^2 x_1^2),$$

$$a(x_1^2 x_2^2 x_3^2 + x_1^2 x_2^2 + x_2^2 x_3^2 + x_3^2 x_1^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

$$(a = 1, 2)$$

このとき、

$$\alpha(f) = 0,$$

$$\beta(f) = 1,$$

$$\gamma(f) = 0$$

である。

References

[1] Jablonskii, S.V., Functional constructions in a k-valued logic (Russian), *Trudy Mat. Inst. Steklov* 51 (1958) 5-142.

[2] Janov, Ju.I., A.A.Mučnik, Existence of k-valued closed classes without a finite basis (Russian), *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 127 (1959), 44-46.

[3] Kuntzmann, J., *Fundamental Boolean Algebra*, Blackie and Son Limited, London-Glasgow, 1967.

[4] Lau, D., Submaximale Klassen von P_3, Preprint, WPU Rostock, 1980.

[5] Machida, H., On closed sets of three-valued monotone logical functions, Colloq. Math. Soc. J. Bolyai, Vol.28, *Finite algebras and multiple-valued logic*, North-Holland, 1980, pp.441-467.

[6] Machida, H., Essentially minimal closed sets in multiple-valued logic, *Trans. IECE Japan*, Vol.E64, No.4, 1981, pp.243-245.

[7] Machida, H., A theorem on essential minimality in k-valued logic. To appear.

[8] Pöschel, R., L.A. Kalužnin, *Funktionen-und Relationen-algebren*, Math. Reihe B.67, Birkhäuser Verlag, Basel-Stuttgart, 1979.

[9] Post, E.L., *The two-valued iterative systems of mathematical logic*, Annals of Math. Studies No.5 (Princeton Univ. Press, 1941)

[10] Rosenberg, I.G., Uber die functionale Vollständigkeit in dem mehrwertigen Logiken. *Rozpravy Cs. Akademie Ved. Ser. Math. Nat. Sci.*, 80 (1970), 3-93.

[11] Szendrei, Á., Short maximal chains in the lattice of clones over a finite set, Preprint CRMA-1019, Montreal, 1981.

〈追加〉

[12] Machida, H., Toward a classification of minimal closed sets in 3-valued logic, to appear.