

数論的函数の特徴付けの問題

CNRS, 統教研

J.-L. Maucclair

都立大・理

村田 玲音

自然数の上で定義された複素数値函数を一般に 数論的函数 といふ。この中で特に“(m, n) = 1 ならば $f(m \cdot n) = f(m) + f(n)$ ” を満たすものを additive (加法的), 任意の m, n に対して上の等式を満たすものを completely additive (完全加法的) と呼ぶ。同様に,“(m, n) = 1 ならば $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$ ” を満たすものを multiplicative (乗法的), 任意の m, n でこの等式を満たすものを completely multiplicative (完全乗法的) といふ。

§ 1 問題の概略

1946 年に Erdős は [1] の中で, 「 $f(n)$ を additive な数論的函数とする時, これが更に単調非減少であれば $f(n) = c \log n$ ($c \in \mathbb{R}$) と限られてしまう」ことを示した。これが一つのきっかけとなり, 「特殊な数論的函数を, いくつかの(解析的な)条件で規定できるかを調べる」方向の研究が始められた。

特殊な数論的函数といふことも、現在までに結果が得られてい
るのは、数論的函数の中で最も易しい $f(n) = c \log n$ と $f(n) =$
 n^c の場合のみである。従つて、ここで“数論的函数の特徴
付けの問題”とは、次の二つの問題をさす。

[A] $f(n)$ を additive とする時、他にどんな条件を付ければ
 $f(n) = c \cdot \log n$ ($c \in \mathbb{C}$) と $f(n)$ を決定できるか？

[M] $f(n)$ を multiplicative とする時、他にどんな条件を付ければ
 $f(n) = n^c$ ($c \in \mathbb{C}$) と $f(n)$ を決定できるか？

色々な点から見ると、問題 [M] は [A] よりかなりむづかしい
ようである。最近我々は [M] に関して一つの結果を得たので
[6]、その解説を中心に話を進めてやうといふ。

ここで問題 [A], [M] について、今までに得られていゝる主な
結果を挙げておく。以下、(A-1) から (A-3) では、 $f(n)$ が
additive である事を仮定しておき、(M-1) から (M-3) では
 $f(n)$ が multiplicative である事を仮定しておく。

$$(A-1) \quad f(n+1) \geq f(n) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad \text{ならば} \quad f(n) = c \log n, (c \in \mathbb{R})$$

$$(A-2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |f(n+1) - f(n)| = 0 \quad \text{ならば} \quad f(n) = c \log n, (c \in \mathbb{C}).$$

$$(A-3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} |f(n+1) - f(n)| = 0 \quad \text{ならば} \quad f(n) = c \log n, (c \in \mathbb{R}).$$

この中で、(A-1), (A-2) は Erdős [1] による。(A-3) は
Erdős が [1] で予想し、Kátai が [2] で解決したものの。

註1) Erdős は同じ [1] の中で, 「 S を自然密度 0 の \mathbb{N} の部分列とする時 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{\substack{n \in S \\ n \leq x}} |f(n+1) - f(n)| = 0$ ならば $f(n) = c \cdot \log n$ ($c \in \mathbb{C}$)」を予想している。これはまだ解決されていないが, この仮定の下に $f(n)$ が completely ~~multiplicative~~ additive であることは証明されている ([4])。

(M-1) $f(n) > 0, f(n+1) \geq f(n)$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) ならば $f(n) = n^a$ ($a \geq 0$)

(M-2) Birch の結果 [3]。 (§4 で詳しく述べる)

(M-3) 今回の我々の結果。

[A] に関しては, 上に挙げた 3 つ以外にもいくつかの結果が得られているが, [M] については, この 3 つ以外にはないようである。

§2, §3 では, (M-3) の結果の紹介と証明の概略を述べ, §4 では, 主に (M-2) と (M-3) との関係を見ることにする。

§2 今回の結果

定理 1 $f(n)$ を multiplicative な数論的函数とする。下の条件 I) ~ III) を満たすような positive, non-decreasing な函数 $g(x)$ が存在するならば, $f(n)$ は completely multi. であり, 更に或る定数 λ (≥ -1) が存在して $|f(n)| = n^\lambda$ と書ける。

I) $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = +\infty, g(2x) = O(g(x)),$

II) $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)^{-1} \sum_{n \leq x} |f(n+1) - f(n)| = 0,$

III) $\limsup_{x \rightarrow \infty} g(x)^{-1} \left| \sum_{n \leq x} f(n) \right| > 0$ ($+\infty$ も許す)。

定理 2 $f(n) \in$ multiplicative な数論的函数とする。定理 1 の条件 II) と, 下の条件 I'), III') を満たすような positive, non-decreasing な函数 $g(x)$ が存在するならば, 或る定数 $\lambda (\geq -1)$ が存在して $f(n) = n^\lambda$ と決まる。

I) $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = +\infty$, $\forall d \in \mathbb{N}$ に対して $\lim_{x \rightarrow \infty} g(dx)/g(x) = h(d)$ が存在する。

III) $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)^{-1} \sum_{n \leq x} f(n) = \mu (< \infty)$ が存在し, $\mu \neq 0$ 。

さて, 問題 [M] の目標は, 適当な条件から $f(n) = n^{a+bi}$, ($a, b \in \mathbb{R}$) を導き出すことであつた。我々の定理 1 は, I) ~ III) があれば, a の部分が決まる事を示している。定理 2 では, I), III) より強い条件 I'), III') を採用した為, $f(n)$ を決めることができた。しかし条件が強すぎた。実数値函数 n^a の特徴付けになつてしまつてゐる。実は, 上に挙げた (M-1), (M-2) 共, n^a ($a \in \mathbb{R}$) の特徴付けなのであつて, 眞の複素数値函数, n^{a+bi} ($b \neq 0$) の特徴付けを与える条件はまだ得られていないのである。我々は, I) ~ III) から b の部分まで決定出来るかどうかを, 色々と試みたが, 今までのところうまくやかなかつた。函数 n^{bi} を b によつてどのように特徴付けるかという点に難しさがあつたようである。

§ 3. 証明の概略

この節では、定理 1, 2 の証明の概略を述べる。

定理 1 の証明で最も工夫を要したのは、 $f(n)$ の completeness を証明する補題 4 である。ここは少し詳しく書き、残りの部分は結果のみ記すに止める。(詳細は [7] 参照)

以下、 $f(n)$: multiplicative と、 $g(x)$: positive, non-decreasing, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = +\infty$ は常に仮定する。又、函数 $F(x)$ が $\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{|F(x)|}{g(x)} > 0$ を満たす時、 $F(x) = \Omega(g(x))$ と書くことにする。

定理 1 の略証。

補題 1 $f(n), g(x)$ が II) を満たすなら、 $\forall d \in \mathbb{N}$ に対し

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv 0(d)}} f(n) - \frac{1}{d} \sum_{n \leq x} f(n) = o(g(x)). \quad (*)$$

補題 2 $f(n), g(x)$ が II), III) を満たすなら、 $\forall n \in \mathbb{N}$ に対し $f(n) \neq 0$ 。

補題 3 $\alpha \in \mathbb{N}, \beta \in \mathbb{Z}$ とする。

a) $f(n), g(x)$ が I), II) を満たすならば、

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ \alpha n + \beta \in \mathbb{N}}} |f(\alpha n + \beta + 1) - f(\alpha n + \beta)| = o(g(x)).$$

b) $f(n), g(x)$ が I), II), III) を満たすならば、

$$\sum_{n \leq x} f(\alpha n + 1) = \Omega(g(x)).$$

補題 4 定理 1 の仮定の下に、 $f(n)$ は completely multi. である。

ある。

証明. 任意の偶数 β に対し $f(\beta^k) = f(\beta)^k$ ($k \geq 2$) が示されれば十分である。更にこれを示す為には、

$$f(Q) \{ f(\beta^k) - f(\beta)^k \} \cdot F(x) = o(g(x)), \quad Q \in \mathbb{N}, \quad F(x) = \Omega(g(x))$$

の形の式が得られればよい。実際、この式の両辺を $g(x)$ で割って $x \rightarrow \infty$ とすれば、右辺は 0 にゆく。左辺の $f(Q)$ が 0 が補題 2 によつて 0 である限り、 $\limsup_{x \rightarrow \infty} F(x)/g(x) > 0$ だから、左辺が 0 へゆく為には $f(\beta^k) = f(\beta)^k$ であるなければならないのである。

さて、上の形の式を得る為には我々は次の形の数を利用する。

$$S_k(\beta) = 1 + \beta + \beta^2 + \dots + \beta^{k-1}, \quad \beta: \text{偶数}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

1° 補題 3-a) を用いると、次の示せる: $k \geq 2$ とし、

$$\sum_{m \leq x} \left| f(\beta^k m + S_k(\beta)) - f(\beta) f(\beta^{k-1} m + S_{k-1}(\beta)) \right| = o(g(x)).$$

2° 1° をくり返し使くと、やはり $k \geq 2$ で、

$$\sum_{m \leq x} \left| f(\beta^k m + S_k(\beta)) - f(\beta)^{k-1} f(\beta m) \right| = o(g(x)).$$

3° ここで 2° の m を、 $m = S_k(\beta) \{ S_k(\beta) \cdot \beta \cdot n + 1 \}$ $n \in \mathbb{N}$ の形のものに制限する。すると 2° の \sum の中に現われた項は、

$$\begin{aligned} & f(\beta^k m + S_k(\beta)) - f(\beta)^{k-1} f(\beta m) \\ &= f(S_k(\beta)) \left\{ f(\beta^k (S_k(\beta) \beta n + 1) + 1) - f(\beta^k (S_k(\beta) \beta n + 1)) \right\} \\ & \quad + f(S_k(\beta)) \cdot f(S_k(\beta) \beta n + 1) \left\{ f(\beta^k) - f(\beta)^k \right\} \end{aligned}$$

と変形できる。

4° 3°の式で、左辺第1項を移項し、 $\sum_{n \leq x}$ をとる。

$$\begin{aligned} & |f(S_k(\beta))| \cdot |f(g^k) - f(g)^k| \cdot \sum_{n \leq x} |f(S_k(\beta)gn+1)| \\ & \leq \sum_{m \leq S_k(\beta) \{S_k(\beta)g+1\}x} |f(g^k m + S_k(\beta)) - f(g)^{k-1} f(gm)| \\ & \quad + |f(S_k(\beta))| \cdot \sum_{n \leq x} |f(g^k(S_k(\beta)gn+1)+1) - f(g^k(S_k(\beta)gn+1))| \end{aligned}$$

左辺第1項は 2° と $g(x)$ に因する条件 I) より $o(g(x))$ が分り、
左辺第2項も補題3-a)によ、 $2 o(g(x))$ が分る。又、左辺に
現われた $\sum_{n \leq x}$ の項は、補題3-b)によ、 $2 \Omega(g(x))$ であり、こ
れで、証明の冒頭に書いた形の式が得られた。 補題4
Q. E. D.

ここから定理1を証明するのは容易である。 $f(n)$, $g(x)$ が
定理の仮定を満たすなら、 $|f(n)|$, $g(x)$ もこれらと満たす事は
容易に分るから、我々は、 $|f(n)|$ が completely multiplicative で、
 $|f(n)| > 0$, 補題1の(*)も $|f(n)|$ について成立してゐるとし
てよい。 $S(x) = \sum_{n \leq x} |f(n)|$ とおけば、(*)の式は、

$$\left| \frac{S\left(\frac{x}{d}\right)}{S(x)} - \frac{1}{d|f(d)|} \right| = o\left(\frac{g(x)}{S(x)}\right)$$

となる。条件 III) より $o\left(\frac{g(x_i)}{S(x_i)}\right) = o(1)$ であるような部分列、

$\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, $(x_i \rightarrow \infty)$ をとれば、 $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{S\left(\frac{x_i}{d}\right)}{S(x_i)} = \frac{1}{d|f(d)|}$ となる。

$d_1 < d_2$ なる2つの数をとれば、 $S\left(\frac{x_i}{d_1}\right) \geq S\left(\frac{x_i}{d_2}\right)$ であるから

$\frac{1}{d_1|f(d_1)|} \geq \frac{1}{d_2|f(d_2)|}$, 即ち、 $n|f(n)|$ は positive, non-decreasing な multiplicative function である。すると §1 に挙げた、結

果 (M-1) により定理の結論が得られる。定理 1 略証終。

定理 2 の略証。仮定 I') に現われた $h(d)$ に関して、次の補題が成立する。

補題 5 $h(d) = d^{\kappa}$, $\kappa \geq 0$ と書ける。

この証明も、やはり $h(d)$ が positive, non-decreasing, multiplicative である事を示して、(M-1) を利用するのである。

22. 定理 2 の条件 I'), III') はそれぞれ I), III) より強いから、 $f(n)$ について補題 1, 4 は成立している。(*) の式より容易に

$$f(d) \cdot g(x) \cdot \left\{ \frac{1}{g(x)} \sum_{n \leq x} f(n) \right\} - \frac{1}{d} g(dx) \left\{ \frac{1}{g(dx)} \sum_{n \leq dx} f(n) \right\} = o(g(dx))$$

が得られ、ここで $x \rightarrow \infty$ とし条件 III') を使えば

$$\mu \times \left\{ f(d) - \frac{h(d)}{d} \right\} = 0, \quad \text{即ち} \quad f(d) = \frac{h(d)}{d} = d^{\kappa-1}$$

を得る。定理 2. 略証終。

以上の証明を見れば分かるように、定理 1, 2 とともに最後の $f(n)$, $|f(n)|$ の形を決める時には結果 (M-1) に帰着させた。ところで、この (M-1) は Erdős の (A-1) と Multiplicative の言葉に言い直したものである。こうした点から見ても、我々の今回の結果は Erdős の仕事の延長上にあるといえるだろう。一方、次節に挙げる Birch の仕事 (M-2) は、全く違った方

向の研究から出てきたものである。この結果は、或る意味で、我々の結果に含まれてしまうので、次節でその事を述べる。

§ 4 Birch の結果との関係

Birch の結果 [3] を説明する為、次の定義を置く。

定義 $f(n)$ を数論的函数とする。「 f が non-decreasing normal order $F(x)$ を持つ」とは、 $F(x)$ が次の 2 条件を満たす事とする。

- (i) $F(x)$ は non-decreasing function,
- (ii) $\forall \varepsilon > 0$ に対し $2 \quad \#\{n \leq x; |f(n) - F(n)| > \varepsilon |F(n)|\} = o(x)$.

定理 (Birch, 1967) $f(n)$ を, positive, unbounded な multiplicative arith. func. とし, f が non-decreasing normal order を持つならば, $f(n) = n^\lambda$ ($\lambda > 0$) に限る。

註 2) non-decreasing normal order の概念を導入したのは Hardy-Ramanujan である。彼等は $\omega(n) \approx \log \log n$ を証明している (1914)。ここで $\omega(n)$ は n を割る異なる素数の個数で, $\omega(n)$ は additive である。(\approx は左辺の函数が右辺の函数を non-decreasing normal order とし持つことの略記号。) 以後, additive な数論的函数については $\log \varphi(n) \approx \log n$ (Landau) 等の結果があるが, multiplicative なものについては, $\varphi(n)$, $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$ が共に non-decreasing normal order を持つこと Segal により示された (1964, 1965)。上の Birch の結果は non-decrea-

sing normal order を持つ multiplicative な数論的函数は本質的には n^{λ} ($\lambda > 0$) しかないことを示したもので, multiplicative な数論的函数の non-decreasing normal order を求める問題に, 終止符を打ったものである。

Birch の結果は註 2 にあるような経緯を経て得られたもので, Erdős 流の理論上にはないものであるが, この結果を我々の結果に組み入れることが出来る。

定理 3 $f(n)$ を positive, unbounded な multiplicative arith. function とし, これが non-decreasing normal order $F(x)$ を持つとする。 $g(x) = \sum_{n \leq x} F(n)$ とおけば, この $g(x)$ は定理 2 の条件 I'), II'), III') をみたす。

この定理の証明には, 次の 2 つの補題が要る。

補題 5 $f(n), F(x), g(x)$ を定理 3 にあるようにとると, 或る正定数 σ が存在して, $\frac{g(x)}{x \cdot F(x)} > \sigma > 0$ ($\forall x \in \mathbb{R}$)。

補題 6 補題 5 と同じ仮定の下に, 或る正定数 ν が存在して, $\frac{f(n)}{F(n)} < \nu$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)。

補題 5 から直ちに次の系が得られる。

系 i) S を自然密度が 0 であるような \mathbb{N} の部分列とすれば,

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \in S}} F(n) = o(g(x)).$$

$$\text{ii) } F(x) = o(g(x)).$$

さて, $g(x)$ が定理 2 の条件 I'), II'), III') をみたすことは, この系と補題 6 とを使えば, 比較的容易にたしかめるこ

とができる。ただし I') の $h(d)$ の存在を証明する部分が少々むづかしく、まず $g(2x) = O(g(x))$ を示して $f(n)$ が completely multiplicative である事を言い (定理 1), これを使って $h(d)$ の存在を言わねばならないようである。補題 5 と 6 の証明は、かなりやっかいであるが、ここでは省略する。

Birch の採用した条件と、我々が定理 2 で置いた条件とはかなりかけ離れたものに見えるが、「 $f(n) = n^\lambda$ と決定できる」という一点で結びついていた。定理 3 は、 $f(n)$ を決めよう前の段階で、両者の条件の間に道をつけたもので、それなりの意味はあるだろう。

以上、multiplicative な数論的函数の特徴づけを中心に述べてきたが、§1 にも書いたように、数論的函数の特徴づけ問題には、[A] と [M] とがあった。この二つの問題に属する多くの問題が、まだ未解決のままに残されている。[A] に関する open problems の主なものは、[5] に挙げたので参照して頂きたい。問題 [M] に関しては、§2 の終わりにも書いたことだが、複素数値函数 ζ^s の特徴づけが当面の課題であろう。

参考文献

- [1] P. Erdős : On the distribution function of additive functions, *Annals of Math.*, Vol. 47 (1946), 1 - 20
- [2] I. Kátai : On a problem of P. Erdős, *J. of Number Theory* Vol. 2 (1970), 1 - 6
- [3] B. J. Birch : Multiplicative functions with non-decreasing normal order, *J. of London Math. Soc.*, Vol. 42 (1967), 149 - 151
- [4] J.-L. Mauclaire, L. Murata : On the regularity of arithmetic multiplicative functions I., *Proc. Japan Acad.*, Vol. 56 (1980) 438 - 440
- [5] _____, _____ : _____ II., *ibid.* Vol. 57 (1981), 130 - 133
- [6] _____, _____ : _____ III., *ibid.* Vol. 57 (1981), 335 - 336
- [7] _____, _____ : On a characterization of some arithmetic multiplicative functions (pre-print)

以上の他に、次の2ヶ所にも今回の話に関連のある文献が多数挙げられている。

- J.-L. Mauclaire : Contribution à la théorie des fonctions additives, Thèse, Orsay Université (1977) の末尾の文献表。
- LeVeque 編, *Reviews in Number Theory* の N-60, N-64 に入っている論文。