数理解析研究所講究録
第459巻 1982年 25-28

Hamburger-Heckeの定理と無限階微分方程式

京大 数理研
河合隆裕

Hamburgerによるζ-函数の特徴付けに関する古典的結果は、$Z_A(s)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$, $Z_B(s)=\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \nu^{-s}$ なる2つのディリクレ級数が $s=1$ にのみ極を持つ有理型函数として解析接続され、しかも

$$\frac{\Gamma(s/2)}{\pi^{s/2}} Z_A(s)=\frac{\Gamma((1-s)/2)}{\pi^{(1-s)/2}} Z_B(1-s)$$

なる函数等式を満たすならば（然るべき増大度条件の下で）実は、或る定数 c が存在して $a_n=b_\nu=c$ が任意の n,ν に対して成立つ，即ち $Z_A(s)=Z_B(s)$ $=c\,\zeta(s)\ (=\sum_{n=1}^{\infty} c/n^s)$ が成立つことを主張している。

この結果は、本質的には、ポアソンの和公式の逆定理とも謂うべき次の結果に同値である。([1])

定理 1. 今 N, m を正整数とし、$a_{\alpha,n}$, $b_{\beta,\nu}$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+^m,\ |\alpha|,|\beta|<N,\ n,\nu\in\mathbb{Z}^m)$ は、或る定数 C, M に対し、次の条件 (1) を満たす数列とする。

(1) $|a_{\alpha,n}| \leqq C|n|^M$, $|b_{\beta,\nu}| \leqq C|\nu|^M$.

ここで，若し，

$$\mathcal{F}\left(\sum_{\alpha,n} a_{\alpha,n}\,\delta^{(\alpha)}(x-n)\right) = \sum_{\beta,\nu} b_{\beta,\nu}\,\delta^{(\beta)}(\xi-\nu)$$

（但し $\mathcal{F}f = \int f(x)\exp(2\pi\sqrt{-1}\langle x,\xi\rangle)\,dx$ とする。）

が成立つならば，或る多項式係数の線型微分作用素 $P(x, D_x)$ が存在して

$$\sum_{\alpha,n} a_{\alpha,n}\,\delta^{(\alpha)}(x-n) = P(x, D_x)\left(\sum_n \delta(x-n)\right)$$

が成立する。更に P の階数は N 階未満であり，P の各係数の次数も N 未満である。

このように，上述の Hamburger の結果は本質的に大域的なものであるが，Mellin 変換を通じて ζ-函数に対応する ϑ-zerovalue に対しては，それが特別な形のフーリエ展開 $\sum_\nu \exp(\pi\sqrt{-1}\,\nu^2\tau)$ を持つ，と云う事実が

(2) $$\left(\frac{d}{d\tau}\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\pi\sqrt{-1}\,\nu^2}\frac{d}{d\tau}\right)\right)\vartheta(\tau)$$

$$\left(=\sqrt{\pi\sqrt{-1}\,d/d\tau}\,\sinh\sqrt{\pi\sqrt{-1}\,d/d\tau}\;\vartheta(\tau)\right)=0$$

なる無限階微分方程式を満たす，と云う事実に説明されること，及び，ϑの虚変換 $\vartheta(-1/\tau)/\sqrt{-i\tau}\ (=\vartheta(\tau))$ に対して同様の議論を用いて

$$(3)\qquad \left(\tau\frac{d}{d\tau}+\frac{1}{2}\right)\frac{\sinh\sqrt{\pi\sqrt{-1}\,(\tau^2 d/d\tau+\tau/2)}}{\sqrt{\pi\sqrt{-1}\,(\tau^2 d/d\tau+\tau/2)}}\ \vartheta(\tau)=0$$

と云う方程式を得ることができる，と云う事実に注目して，(2),(3)の共通解の空間が1次元である，と云う形でϑ函数の局所的な特徴付けが可能であることが佐藤先生によって見出されている。(ここで(2),(3)に現われる作用素は，例えば正則函数の層$\mathcal{O}$に層準同型として作用することに注意して置く。)

このような微分方程式系によるϑ-zerovalueの取扱いは，Hecke [2] によって扱われた函数すべてに対して可能な訳ではない(Hecke [2] は，$a_n=b_n$なる付帯条件を課すことによって有限次元性の証明を行っていることに注意)けれども，それだけに，高次元の場合に，ϑ-函数の良い拡張を見出す為に有用であろう，と期待する。その第一歩として，無限階微分方程式系に対する有限次元性の定理が [3] に与えられている。そこでは，正則函数解を対象として議論が行われている

けれど，それを超局所化することは今後の興味深い課題である。

文　献

[1] Ehrenpreis. L. and T. Kawai : Poisson's summation formula and Hamburger's theorem. To appear in Publ. RIMS. Kyoto Univ., 18 (1982).

[2] Hecke, E. : Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung. Math. Ann. 111 (1936), 664-699. (Werke, 591-626).

[3] Sato, M., M. Kashiwara and T. Kawai : Linear differential equations of infinite order and theta functions. To appear.