数理解析研究所講究録
第 460 巻 1982 年 1-16

Optimal control in non-Markovian processes with jumps

高知大 理学部 大坪義夫

§1. 序

確率過程として次のような system $\{X_t\}_{t\geq 0}$ を考える。$X_0=x$ をスタートした sample path の連続部分は、与えられた微分方程式によって定められ、jump 部分は、経過時間（jump 後の）に関する分布と Markov kernel によって決定される。このとき、system $\{X_t\}_{t\geq 0}$ は、一般に、non-Markov process になる。この process を Markov process に修正することにより、その system における最適停止問題を考える。結果として、最適性に対する十分条件を与えるが、Ross [6] または Prabhu [5] の結果の修正（拡張）であり、適用範囲も広がっている。

上のような問題は、Markov 型の M/G/1 待ち行列系を、non-Markov な GI/G/1 queue へ拡張することが動機となった。最後の節で、GI/G/1 queue への応用を述べる。

他のモデルとしては、Semi-Markov jump process や、連続部分の sample path が、ある微分方程式で定まる storage process（GI/G/1 queue を含む）などがある。

§2. Non-Markovian processes with jumps

この節では、system を構築し、その version として、Markov processes を与え、生成作用素を求める。

system を次の4つの組 (S, G, Q, θ) によって決定する：

1). state space S は、$S \equiv \prod_{j=1}^{n}[c_j^1, c_j^2] \subset \mathbb{R}^n$,
$-\infty \leqq c_j^1 < c_j^2 \leqq +\infty$, $j = 1, 2, \cdots, n$。

2). inter-jump time distribution G は次をみたす；

(i) $G(s) = 0$, $\forall s \leqq 0$

(ii) $G(s) < 1$, $\forall s > 0$

(iii) G の right-derivative $\frac{d^+}{ds}G$ が存在して、$\mathbb{R}^+$ 上で有界である。

3). jump kernel Q は次をみたす；

(i) 各 $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times S$ に対して、$Q(\cdot \mid t, x)$ は S 上の確率測度である.

(ii) 各 $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times S$ に対して、$Q(\{x\} \mid t, x) = 0$

4). θ は. jump 間の path を定める関数：$\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ で.
次をみたす；

(i) θ は $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ 上で連続である.

(ii) θ は $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ で.（$\mathbb{R}^n$ において）locally Lipschitz 条件をみたす. i.e. 任意の $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ に対して. (t, x) の近傍 U と $K = K(t, x) > 0$ が存在して.
すべての (t_0, x_0), $(t_0, x_1) \in U$ に対して

$$\| \theta(t_0, x_0) - \theta(t_0, x_1) \| \leq K \| x_0 - x_1 \| .$$

但し. $\| \cdot \|$ は $\mathbb{R}^n$ における（普通の意味の）metric.

Remark. Q の条件(ii)は $Q(\cdot \mid t, x)$ が離散分布のときに必要となる。

次に system について説明する：任意に固定した $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^+ \times S$ に対して.

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} y(t) = \theta(t, y(t)), & t \geq t_0 \\ y(t_0) = x_0 \end{cases}$$

の解（unique）を $y = y(t) = [y_1(t), \cdots, y_n(t)]$ として.

$$x_j(t) \equiv \min(\max(y_j(t), c_j^1), c_j^2), \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

(2.1) $$x(t) \equiv [x_1(t), \cdots, x_n(t)]$$

とすると. $x(t) \in S$, $t \geq t_0$ である。

process $\{X_t\}_{t\geq 0}$ は、$X_{t_0}=x_0$ をスタートして、$[t_0, t_0+h]$ $(h>0)$ の間に jump しない path に対しては、

$$X_t = x(t) \quad , \quad t\in[t_0, t_0+h]$$

であり、jump する場合は、G, B に従うものとする。このとき、G が指数分布である場合には $\{X_t\}_{t\geq 0}$ は Markov process になるが、一般には non-Markov となる。

そこで、よく知られた方法で、新しい process を導入する;

$$\nu_t \equiv \inf\{u>t : X_u \neq X_{u-0}\}, \quad t\geq 0,$$

$$\tau_1 \equiv \nu_0, \quad \tau_m \equiv \nu_{\tau_{m-1}} \quad , \quad m=1,2,\cdots$$

Y_0 : non-negative random variable on $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{P})$

但し、$\tilde{P}(Y_0\leq s) = G(s) \quad , s\in\mathbb{R}^+$

として、

$$Y_t \equiv \begin{cases} Y_0 + t & \text{if} \quad t<\tau_1 \\ t-\max\{\tau_j : \tau_j \leq t\} & \text{if} \quad t\geq \tau_1 \end{cases}$$

とおくと、Y_t は t 以前（t を含まぬ）の jump time からの経過時間を表わす。

このとき、process $\{W_t\}_{t\geq 0}\equiv\{(X_t, Y_t)\}_{t\geq 0}$ の確率法則は次のように表わすことができる：

$$P[\tau_1\leq h \mid W_0=(x,s)] = \frac{G(s+h)-G(s)}{1-G(s)},$$

$$P[\tau_{j+1}\leq t+h \mid W_t=(x,s), \tau_j = t-s] = \frac{G(s+h)-G(s)}{1-G(s)},$$

$$P[\tau_{j+1} \leqq t+h \mid \tau_j = t] = G(h),$$
$$P[X_t \in B \mid X_{t-0} = x,\ \tau_j = t] = Q(B \mid t, x)$$
$$\text{for } h \geqq 0,\quad (t,x,s) \in Z,\quad B \in \mathcal{B}(S)$$

但し. $Z \equiv \mathbb{R}^+ \times S \times \mathbb{R}^+$, $\mathcal{B}(S)$ は S の Borel σ-field.

Proposition 2.1.

process $\{W_t\}_{t\geqq 0}$ は strong Markov process で、almost all の sample path は left limit をもつ right continuous な関数である。

証明は. $\underbrace{[4]}_{\text{の Theorem 2.1}}$ と同様な方法で示すことができる。

$\{Z_t\}_{t\geqq 0} = \{(t, W_t)\}_{t\geqq 0}$ の transition probability H を

$$H(t,x,s : h : w, B, u)$$
$$\equiv P[\,t+h \leqq w,\ X_{t+h} \in B,\ Y_{t+h} \leqq u \mid Z_t = (t,x,s)]$$
$$(t,x,s) \in Z,\quad h \geqq 0,\ w \geqq 0,\ u \geqq 0,\quad B \in \mathcal{B}(S)$$

とおき. semigroup $\{T_h\}_{h\geqq 0}$ を

$$T_h f(t,x,s) \equiv \int_Z f(w,y,u)\, H(t,x,s : h : dw, dy, du)$$

とする. 但し. f は Z 上の有界可測な実数値関数である。

このとき. 明らかに.

$\{Z_t\}_{t\geq 0}$ は transition probability H をもつ time-homogeneous strong Markov processes である。

$P_z(\cdot) = P[\cdot \mid Z_t = z]$, $z = (t, x, s) \in Z$ とかく。

Z 上の有界可測な実数値関数 f が

$$\lim_{u \downarrow t} f(Z_u) = f(t, x, s) \qquad P_z\text{-a.s.} \ \left(z = (t, x, s) \in Z\right)$$

をみたすとき、f は z で finely continuous といい、すべての $z \in Z$ に対して f が z で finely continuous ならば、f は Z 上で finely continuous という。

process $\{Z_t\}_{t\geq 0}$ の path の性質から、finely continuous 性は、次と同値である：

$$\lim_{h \downarrow 0} f(t+h, x(t+h), s+h) = f(t, x, s)$$

但し、$x(t+h)$ は $x(t) = x$ を初期条件とした (2.1) の解である。

<u>仮定1</u>. Z 上で finely continuous な $f : Z \to \mathbb{R}$ に対して

$$\int_S f(t, x+v, s)\, Q(dv \mid t, x)$$

はすべての $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times S$ に対して、$z = (t, x, 0)$ で finely continuous である。

<u>Remark.</u> Q が (t, x) に独立なときは、仮定1は明らか

に成立する。

FをZ上の有界可測な実数値関数の全体とし、$\widetilde{F}$を各$z\in Z$に対して、$\lim_{t\downarrow 0} T_t f(z) = f(z)$をみたす$f\in F$の全体とする。$\mathcal{A}$を semigroup $\{T_t\}_{t\geq 0}$ の infinitesimal generator とする。i.e.

$$\mathcal{A} f(z) \equiv \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}[T_t f(z) - f(z)], \quad z\in Z,$$

但し、この generator は右辺が存在して、それが$\widetilde{F}$に属するような$f\in\widetilde{F}$に対して定義され、そのような$f\in\widetilde{F}$の全体を$\mathcal{D}$とおく。

$(t,x,s)\in Z$に対して、$f\in F$が$x=[x_1,\cdots,x_n]$で右微分可能のとき、

$$\nabla_x^+ f(t,x,s) \equiv \left[\frac{\partial^+}{\partial x_1} f(t,x,s), \frac{\partial^+}{\partial x_2} f(t,x,s), \cdots, \frac{\partial^+}{\partial x_n} f(t,x,s)\right]$$

とかくことにする。

<u>Lemma 2.1.</u> $f\in F$を、$\frac{\partial}{\partial t}f$, $\frac{\partial}{\partial s}f$, $\nabla_x^+ f$が存在し、かつそれらがZ上で finely continuous であるような関数とする。

このとき、$f\in\mathcal{D}$, かつ 各$(t,x,s)\in Z$に対して、

$$\mathcal{A} f(t,x,s) = \frac{\partial}{\partial t} f(t,x,s) + \frac{\partial}{\partial s} f(t,x,s) + \langle \nabla_x^+ f(t,x,s), \Theta(t,x,s)\rangle$$
$$+ \lambda(s)\int_S \big(f(t,x+v,0) - f(t,x,s)\big)\, Q(dv\mid t,x)$$

但し、 $\lambda(s) \equiv \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{G(s+h)-G(s)}{1-G(s)}$, $s \geq 0$

証明は省略する。

§3. Optimal stopping problem

この節では、§2 で定めた system において、最適停止問題を定式化し、最適性に対する十分条件を与える。

r, g を Z 上の有界で finely continuous な実数値関数とする。r は、reward rate, g は terminal reward である。

$t \geq 0$ に対して、C_t をすべての $(x,s) \in S \times R^+$ に対して、$P[\, t \leq \tau < \infty \mid Z_t = (t,x,s)] = 1$ をみたす stopping time τ の全体とする。

評価関数を

$$\varphi_\tau(t,x,s) \equiv E_{(t,x,s)}\left[\int_t^\tau r(Z_u)\,du + g(Z_\tau)\right]$$

$$(t,x,s) \in Z, \quad \tau \in C_t,$$

とおく、ここで $E_{(t,x,s)}$ は $P_{(t,x,s)}(\cdot)$ の期待値を表す。問題は、φ_τ を τ に関して最大にすることである。

$\sigma(t) \in C_t$ が

$$\varphi_{\sigma(t)}(t,x,s) = \max_{\tau \in C_t} \varphi_\tau(t,x,s) \quad \text{for all } (x,s) \in S \times R^+$$

をみたすとき、$\sigma(t)$ を C_t で optimal といい、$\sigma(t)$ がすべての $t \geq 0$ に対して、C_t で optimal ならば

$\sigma \equiv \{\sigma(t) : t \geq 0\}$ と考えて、σ を単に optimal であるということにする。

仮定2. 各 $(t, x, s) \in Z$ に対して、

$$E_{(t,x,s)}\left[\sup_{w \geq t}\left(\left(\int_t^w r(Z_u)\,du\right)^+\right]\right] < +\infty$$

但し、$d^+ \equiv \max(0, d)$。

$q \in \mathcal{D}$ として

$$\Gamma \equiv \{z \in Z \mid r(z) + \mathcal{A}q(z) \leq 0\}$$

とおき、Γ_0 を finely topology に関する Γ の内点集合、Γ_0^c を Γ_0 の補集合とする。

$$\sigma(t) \equiv \inf\{u \geq t \mid Z_u \in \Gamma_0\}, \quad t \geq 0$$

$$\bar{\sigma}(t) \equiv \inf\{u \geq t \mid Z_u \in \Gamma_0^c\}, \quad t \geq 0$$

とおき、$\sigma \equiv \{\sigma(t) : t \geq 0\}$ とおく。

このとき、次の Theorem を得る；

Theorem 3.1. q は Lemma 2.1 の f の条件をみたしているものとする。

(i) $t \geq 0$ に対して

(3.1) $\quad P[\bar{\sigma}(t') < \infty \mid Z_{t'} \in \Gamma_0] = 0, \quad {}^\forall t' \geq t,$

(3.2) $\quad P[\sigma(t) < \infty \mid Z_t \in \Gamma_0^c] = 1$

であるならば、$\sigma(t)$ は C_t で optimal である。

(ii) すべての $t \geq 0$ に対して (3.1), (3.2) がみたされるならば、i.e.

$$P[\bar{\sigma}(t) < \infty \mid Z_t \in \Gamma_0] = 0, \quad {}^\forall t \geq 0,$$

$$P[\sigma(t) < \infty \mid Z_t \in \Gamma_0^c] = 1, \quad {}^\forall t \geq 0,$$

$\sigma = \{\sigma(t) : t \geq 0\}$ は optimal である。

証明. (i) (3.2) から $\sigma(t) \in C_t$ である。t を固定して、$\sigma = \sigma(t)$ とおく。$(x, s) \in S \times R^+$ を任意に固定する。$\tau \in C_t$, integer $N \geq t$ に対して $\tau_N \equiv \min(\tau, N)$ とおくと、$E_{(t,x,s)}[\tau_N] < \infty$。

Dynkin の公式 (cf. [2]) から、すべての $\tau \in C_t$, $N \geq t$ に対して、

$$E_{(t,x,s)}[g(Z_{\tau_N})] - g(t,x,s) = E_{(t,x,s)}\left[\int_t^{\tau_N} \mathcal{A}g(Z_u)\,du\right].$$

g, $\mathcal{A}g$ は有界であり、$\tau \in C_t$ であるから、$N \to \infty$ とすると

$$E_{(t,x,s)}[g(Z_\tau)] - g(t,x,s) = E_{(t,x,s)}\left[\int_t^{\tau} \mathcal{A}g(Z_u)\,du\right].$$

また、仮定2より、$E_{(t,x,s)}\left[\int_t^{\tau} r(Z_u)\,du\right] < \infty$ であるから

$$\varphi_\tau(t,x,s) - g(t,x,s)$$
$$= E_{(t,x,s)}\left[\int_t^\tau \left(r(Z_u) + \mathcal{A}g(Z_u)\right) du\right].$$

したがって、

$$\varphi_\sigma(t,x,s) - \varphi_\tau(t,x,s)$$
$$= E_{(t,x,s)}\left[\chi_{\{\sigma>\tau\}} \int_\tau^\sigma \left(r(Z_u) + \mathcal{A}g(Z_u)\right) du\right]$$
$$- E_{(t,x,s)}\left[\chi_{\{\sigma\leqq\tau\}} \int_\sigma^\tau \left(r(Z_u) + \mathcal{A}g(Z_u)\right) du\right],$$

但し、χ_E は E の indicator function である。

σ の定義と条件 (3.1) から

$$r(Z_u) + \mathcal{A}g(Z_u) \begin{cases} \geqq 0 & \text{for } t \leqq u < \sigma(t) \\ \leqq 0 & \text{for } \sigma(t) \leqq u \end{cases}$$

よって、

$$\varphi_\sigma(t,x,s) - \varphi_\tau(t,x,s) \geqq 0$$

これで $\sigma = \sigma(t)$ の最適性が証明された。

(ii) (i) から明らかである。

<u>Remark.</u> Theorem 3.1 は、Ross [6] の Theorem 2.2 の修正、Prabhu [5] の Theorem 2 の拡張となっている。共に、Theorem 3.1 の Γ_0 を Γ に書きかえたもの（$\sigma(t)$ もそれに準じる）が定理として述べられているが、Γ に対応する条件 (3.1) が、次の節で述べる GI/G/1 queue の例では、必らずしもみたされない。

§4. GI/G/1 queueing system への応用

前節での結果を GI/G/1 queueing system へ応用する。

1). state space を $S=[0,\infty)$ として、$X_t \in S$ は time t における仕事量を表わす。

2). inter-jump distribution G に次の仮定を加える：

(i) $\lambda(s) \equiv \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \dfrac{G(s+\varepsilon)-G(s)}{\varepsilon(1-G(s))} > 0 \quad$ for all $s>0$,

(ii) $\lambda(s)$ は R^+ 上で連続である.

3). jump kernel Q は

$$Q([0,v) \mid t,x) \equiv Q(v), \quad {}^{\forall}(t,x) \in R^+ \times S,\ v \geq 0,$$

4). $\theta \equiv -1$

5). $r \equiv 0$

6). $$g(t,x,s) \equiv g(t,x) \equiv \int_0^{t+x} e^{-\alpha w} g(w)\, dw, \quad (t,x) \in R^+ \times S,$$

但し. $\alpha > 0$: discount factor

$$g(w) = \begin{cases} d_1 & \text{for } w < t_0 \\ -d_2 & \text{for } w \geq t_0 \end{cases}$$

$t_0 > 0$: fixed, $\quad d_1, d_2 > 0$: constant

$$\varphi(t) \equiv \int_0^{\infty} (1-Q(u))\, e^{-\alpha(t+u)} g(t+u)\, du, \quad t \geq 0$$

$$\beta \equiv \int_0^{\infty} e^{-\alpha u}\, Q(du)$$

とおく。

Theorem 4.1.

$$(4.1)\quad \int_0^{t_0} e^{-\alpha v}(1-Q(v))\,dv > \frac{d_2}{d_1+d_2}\frac{1-\beta}{\alpha}$$

と仮定する。

$$\Delta \equiv \{(t,x,s)\in Z \mid t+x \geqq a,\ x \neq 0\}$$
$$\cup \{(t,0,s)\in Z \mid t \geqq \hat{a}(s),\ d_1 \neq \lambda(s)\, d_2 \frac{1-\beta}{\alpha}\}$$
$$\cup \{(t,0,s)\in Z \mid t \geqq t_0,\ d_1 \geqq \lambda(s)\, d_2 \frac{1-\beta}{\alpha}\}$$

とおくと. optimal stopping は $\sigma^* = \{\sigma^*(t) : t \geqq 0\}$ である:

$$\sigma^*(t) \equiv \inf\{u \geqq t \mid Z_u \in \Delta\},\quad t \geqq 0.$$

ここで、a は $[0, t_0)$ 上での $\varphi(t)=0$ の unique solution, $\hat{a}(s)$ は $[0, t_0)$ 上での（t に関しての）$e^{-\alpha t}d_1+\lambda(s)\varphi(t)=0$ の unique solution である。

証明: まず $x>0$ とすると. $\mathcal{A}g(t,x,s) = \lambda(s)\varphi(t+x)$.

また. $\varphi(t)$ は $[0, t_0]$ で decreasing で連続

$\varphi(0)>0$ 　　　（(4.1) より）

$\varphi(t)<0$ 　　　$^\forall t \geqq t_0$

であることがわかる。したがって unique な a が存在して.

$$0<a<t_0,\quad \varphi(a)=0.$$

よって.

$\varphi(t)>0$ 　　for $0 \leqq t < a$

$\varphi(t) \leqq 0$ 　　for $t \geqq a$.

したがって

$$\Gamma_1 \equiv \{(t,x,s)\in Z \mid \mathcal{A}g(t,x,s) \leqq 0,\ x \neq 0\}$$

とおくと

$$\Gamma_1 = \{(t, x, s) \in Z \mid \lambda(s) = 0 \text{ or } t + x \geqq a,\ x \neq 0\}$$

次に $x = 0$ とすると

$$\mathcal{A} g(t, 0, s) = e^{-\alpha t} g(t) + \lambda(s) \varphi(t) \equiv \psi(t, s)$$

また．$\psi(t, s)$ は $[0, t_0)$ で（t に関して）decreasing で連続，

$\psi(0, s) > 0$,

$\psi(t, s) < 0 \quad \forall t \geqq t_0$,

$$\lim_{t \uparrow t_0} \psi(t, s) = e^{-\alpha t_0}\left(d_1 - \lambda(s) d_2 \frac{1-\beta}{\alpha}\right)$$

$d_1 < \lambda(s) d_2 \frac{1-\beta}{\alpha}$ のとき，$[0, t_0)$ での（t に関する）

$\psi(t, s) = 0$ の unique solution $\hat{a}(s)$ に対して

$\psi(t, s) > 0 \qquad \text{for } 0 \leqq t < \hat{a}(s)\ (< t_0)$

$\psi(t, s) \leqq 0 \qquad \text{for } t \geqq \hat{a}(s)$

$d_1 \geqq \lambda(s) d_2 \frac{1-\beta}{\alpha}$ のとき．

$\psi(t, s) > 0 \qquad \text{for } 0 \leqq t < t_0$

$\psi(t, s) \leqq 0 \qquad \text{for } t \geqq t_0$

したがって．

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &\equiv \{(t, 0, s) \in Z \mid \mathcal{A} g(t, 0, s) \leqq 0\} \\ &= \left\{(t, 0, s) \in Z \mid t \geqq \hat{a}(s),\ d_1 < \lambda(s) d_2 \frac{1-\beta}{\alpha}\right\} \\ &\quad \cup \left\{(t, 0, s) \in Z \mid t \geqq t_0,\ d_1 \geqq \lambda(s) d_2 \frac{1-\beta}{\alpha}\right\} \end{aligned}$$

$\lambda(s) = 0$ となりうるのは $s = 0$ のときだけであり，また，

$\lambda(s)$ は連続であるから．

$$\Gamma_0 \equiv (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)_0 = \Delta .$$

さらに

$$P[\,\sigma^*(t) \leqq t_0 \mid Z_t \in \Gamma_0^c,\ t < t_0] = 1$$

$$P[\,\sigma^*(t) = t \mid t \geqq t_0] = 1$$

かつ、 $P[\,\overline{\sigma}(t) < \infty \mid Z_t \in \Gamma_0] = 0 \qquad \forall t \geqq 0.$

したがって、Theorem 3.1より、

$\sigma^* \equiv \{\sigma^*(t) : t \geqq 0\}$ は optimal である。

Remark. (i) $\lambda(0) \neq 0$ (例えば、Gが指数分布)であるならば $\Gamma = \Delta$.

(ii) $\lambda(0) = 0$ の例としては、Erlang 分布がある。

§5. あとがき

この報告では、最適停止問題のみを扱ったが、control 関数に従属する system を構築すると、non-Markov な controlled process となるが、それをMarkov な process に修正して最適化問題を考えることができる。ところが、このような問題はすでに Doshi[1]によって研究されている。しかも Doshi は、path の連続部分をより一般に stochastic process で定義している。この報告では、path の連続部分

は、微分方程式で与えているが、Doshiの定式化と同様にしても最適停止問題を議論することができ、この報告と類似な結果を得ることができる。

また、上で述べたnon-Markovなcontrolled processにおいて、policy (control)と停止規則を対とした最適化問題も定式化でき、Ohtsubo [3]，[4]の一般化になっていて、それらと類似な結果を得ることができる。これについては、省略する。

References

[1] Doshi,B.T., Generalized semi-Markov decision processes, J. Appl.Prob.16,618-630 (1979)

[2] Dynkin,E.B., Markov Processes,I, Springer-Verlag, Berlin, 1965

[3] Ohtsubo,Y., Controlled Markov jump processes associated with a choice of stopping rules, Mem.Fac.Sci.,Kyushu Univ.,Ser.A, 34,311-337 (1980)

[4] Ohtsubo,Y., Optimal control of the service rate and the stopping rule in an M/G/1 queue, Mem.Fac.Sci.,Kochi Univ.,Ser.A, 3,75-103 (1982)

[5] Prabhu,N.U., Stochastic control of queueing systems, Naval Res. Logist. Quart.,21,411-418 (1974)

[6] Ross,S.M., Infinitesimal look-ahead stopping rules, Ann. Math. Statist., 42, 297-303 (1971)