

ラプラス方程式に対する自由境界問題の数値解析

東京大・工 河原田 秀 夫

パリ大 O. PIRONNEAU

電気通信大 花 田 孝 郎

序 論

この論文の目的は  $\mathbb{R}^2$  で定義された次の自由境界問題  
 (F. B. P.) :

$$(Pr)_0 \left\{ \begin{array}{l} -\Delta \phi = f \quad \text{in } \Omega_r \\ \phi|_{\gamma} = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial n}|_{\gamma} = g \\ \phi(0, y) = \phi(1, y) \\ \phi|_p = 0 \end{array} \right.$$

の数値解を求めるとにある。  
 $\gamma$  は自由境界 (F. B.) を表わし、  
 $f, g$  は  $(0, 1) \times (0, \infty)$  で  
 定義された関数である。

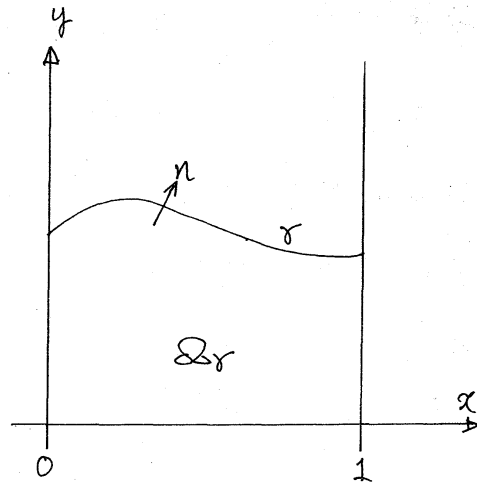


図 1.

我々はまず (F.B.P.) を次のような最適化問題:

$$(Pr)_1 \quad \min_{\gamma} \left\{ \int_{\gamma} \left| \frac{\partial \phi(r)}{\partial n} - g \right|^2 ds \quad \middle| \quad \begin{array}{l} -\Delta \phi(r) = f \quad \text{in } \Omega_r \\ \text{境界条件} \end{array} \right\}$$

に置き換える。次に  $(Pr)_1$  の状態方程式を処罰法によつて近似し、その処罰化された最適化問題を差分法によつて解くというのが我々の手順である。このとき、処罰化された状態方程式の解を  $\phi^\varepsilon$  とし、 $\frac{\partial \phi(r)}{\partial n} \Big|_{\gamma}$  の代りに  $-\frac{\phi^\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}$  を用いるというのが我々の手法のキーポイントである。この近似が実用上安定な数値解法の構成を可能にしている。

我々の解法のもう一つの特徴は、最適化問題の近似解の列  $\gamma_r^{(n)}$ , ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), を各  $n$  に共通な固定 mesh のもとで解いていることである。有限要素法を用いる他の手法においては可動 mesh を用いて解くのが一般的のようである。自由境界問題をこの種の方法で数値的に解く際の複雑さの一因はここにあると思われる。一方、固定 mesh を用いれば、近似自由境界は必ずしも格子点上にあるとは限らない。この問題を我々は処罰化された状態方程式に現われる特性関数にある種の修正を施すことによつて解決する。オ1節では処罰法と差分法による状態方程式の近似について述べる。オ2節においては、最適化問題を解くアルゴリズムを示し、簡単な例題の数値解を求めらる。

# 1. 処罰法と差分法による状態方程式の近似

## 1.1

次の境界値問題:

$$\begin{cases} -\Delta \phi = f & \text{in } \Omega_0 \\ \phi|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

の解  $\phi^0$  は、 $f \in H^m(\Omega_0)$  ( $m \geq 0$ )

のとき、

$$\begin{aligned} \phi^0 &\in H^{m+2}(\Omega_0) \cap H_0^1(\Omega_0) \\ \frac{\partial \phi^0}{\partial n}|_{\Gamma} &\in H^{m+\frac{1}{2}}(\Gamma) \end{aligned}$$

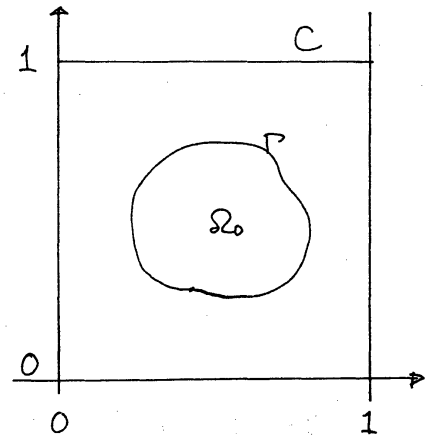


図 2

をみたす。

## 1.2

$C = (0, 1) \times (0, 1)$  を  $\Omega_0$  を含む領域、 $\chi \in C - \Omega_0$  の特性関数とする。このとき、 $\varepsilon > 0$  に対して

$$\begin{cases} -\Delta \phi^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \chi \phi^\varepsilon = (1 - \chi) f & \text{in } C \\ \phi^\varepsilon|_{\partial C} = 0 \end{cases}$$

の解  $\phi^\varepsilon$  は

i)  $\phi^\varepsilon \in H^2(C) \cap H_0^1(C)$

ii)  $\phi^\varepsilon \in C^{1+\alpha}(\bar{C})$  ( $0 \leq \alpha < 1$ )

iii)  $\phi^\varepsilon \rightarrow (1 - \chi) \phi^0$  in  $H^1(C)$  ( $\varepsilon \downarrow 0$ )

をみたしている。

## 1.3

1.2 で得られた解  $\phi^\varepsilon$  を次の差分境界値問題

$$\begin{cases} -(\Delta_R \phi_R^\varepsilon)_{ij} + \frac{1}{\varepsilon} (\chi_R \phi_R^\varepsilon)_{ij} = ((1 - \chi_R) f)_{ij} & \text{in } C_\varepsilon \\ (\phi_R^\varepsilon)_{ij} = 0 & \text{on } \partial C_\varepsilon \end{cases}$$

の解  $\phi_R^\varepsilon$  で近似する。  $C_\varepsilon$  は領域  $C$  を  $x, y$  方向について  $h = \frac{1}{R}$  等分した格子点の集合を表わし、  $\partial C_\varepsilon$  で境界  $\partial C$  上の格子点を表わす。  $\Delta_R$  は  $\Delta$  に対する5点近似公式であり、  $\chi_R$  は以下に述べる様に定義される。

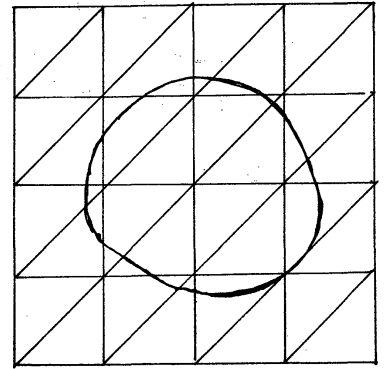


図3

図3に示した3角形分割に対する有限要素法で用いられる区分的一次の基底関数を  $w_R^{ij}$ 。

$$\sigma_R^{ij} = \{ x \mid w_R^{ij}(x) > 0 \}$$

$$\tilde{D}_R = \{ (i, j) \mid \sigma_R^{ij} \cap \Omega_0 \neq \emptyset \text{ かつ } \sigma_R^{ij} \cap \Omega_1 \neq \emptyset \}$$

とする。このとき、  $D_R = \bigcup_{(i,j) \in \tilde{D}_R} \sigma_R^{ij}$  は境界  $\Gamma$  を含む帯状領域を表わしている。

$\chi_R(x)$  は以下の条件を満足するように定義される。

$$i) \quad \chi_R(x) = 1 \quad \text{in } \Omega_{1,h} = \Omega_1 - \Omega_1 \cap D_h$$

$$ii) \quad \chi_R(x) = 0 \quad \text{in } \Omega_{0,h} = \Omega_0 - \Omega_0 \cap D_h$$

$$iii) \quad 0 \leq \chi_R(x) \leq 1 \quad \text{in } D_h$$

$$iv) \quad l_1(s) = \int_{P^+(s)} \chi_R(x) \, dt^+$$

条件 iv) の意味は以下に述べる定理 4 の証明において明らか  
にされる。同時に、最適化を行う際に重要な役割を果たす。

$\chi_R(x)$  の例として、

$$a) \quad \chi_R(x) = \frac{l_1(x)}{l_1(x) + l_2(x)}$$

$$b) \quad \chi_R(x) = \frac{\rho + l_2(x)}{l_1(x) + l_2(x)}$$

を挙げておく。

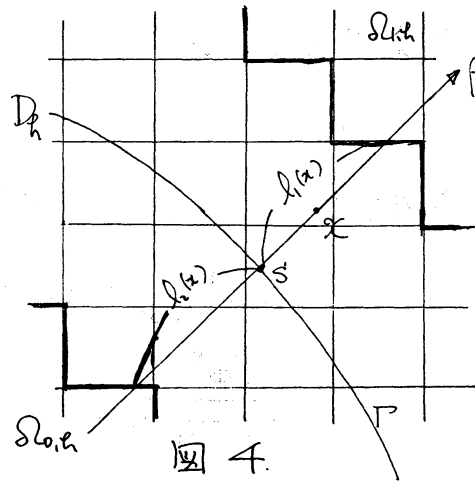


図 4.

領域  $C$  における  $\phi_{ij}^\varepsilon$  ( $0 \leq i, j \leq N$ ) の線型補間は

$$\phi_R^\varepsilon(x) = \sum \phi_{ij}^\varepsilon w_{ij}^\varepsilon(x) \quad \text{で表わされる。}$$

## 1.4

我々の解法においては次の近似定理が本質的役割を果たして  
いる。

定理 1  $f \in H^m(\Omega)$ ,  $m > 3$ , のとき  $\varepsilon = h^{\frac{4}{5}}$  とする

と、

$$\frac{\partial \phi^\varepsilon}{\partial n} \Big|_P = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \phi_R^\varepsilon \Big|_P + O(h^{\frac{2}{5}}) \quad \text{in } H^{\frac{1}{2}}(P)$$

が成立する。 ■

定理1を示すために、以下に3つの定理を準備する。

定理 2  $f \in H^m(\Omega_0)$ ,  $m \geq \frac{1}{2}$ , のとき

$$\phi^\varepsilon|_\Gamma = -\sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \phi^0}{\partial n} \Big|_\Gamma + O(\varepsilon) \quad \text{in } H^{m-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

が成立する。 ■

定理 3  $f \in H^m(\Omega_0)$ ,  $m > 3$ , のとき

$$\|\nabla \phi^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C.$$

$$\left\| \frac{\partial^2 \phi^\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{C^0(\bar{\Omega})} \leq C_1(1+\sqrt{\varepsilon})$$

$$\left\| \frac{\partial^3 \phi^\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{C^0(\bar{\Omega}_1)} \leq \frac{C_2}{\sqrt{\varepsilon}}$$

が成立する。ただし  $C_i$  ( $i=0, 1, 2$ ) は  $\varepsilon$  によらない正定数である。 ■

次の定理4を示すためには、定理3が必須である。

定理 4  $f \in H^m(C)$ ,  $m > 3$ , のとき

$$\|\phi_R^\varepsilon - \phi^\varepsilon\|_{H^1(C)} \leq C \frac{h^2}{\varepsilon \sqrt{\varepsilon}}$$

が成立する。 ■

1.5

ここでは定理1の略証を示す。

定理2と定理4から

$$\left\| \frac{\phi_R^\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} - \frac{\phi^\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C \frac{\phi^2}{\varepsilon^2}$$

$$\left\| \frac{\phi^\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{\partial \phi^0}{\partial n} \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C \sqrt{\varepsilon}$$

を得る。したがって、 $\varepsilon = h^{\frac{4}{3}}$  とすれば

$$\left\| \frac{\phi_R^\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{\partial \phi^0}{\partial n} \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C h^{\frac{2}{3}}$$

が示される。■

## 2. 最適化問題の解法と数値例

### 2.1

序論で記述した自由境界問題

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta \phi = f \quad \text{in } \Omega_r \\ \phi|_r = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial n}|_r = g \\ \phi(0, y) = \phi(1, y) \\ \phi(x, 0) = 0 \end{array} \right.$$

を考へる。自由境界  $\Gamma$  は方程式  $y = \eta(x)$  で表現されてい

るとして、さらに  $\eta(x) < 1$  を仮定する。

したがって、領域  $C = (0, 1) \times (0, 1)$

において正则化することができる。

2.2

領域  $C$  を両方向に  $N$  等分して、

各格子点  $P_{ij} = (i/N, j/N)$  での

差分方程式を構成する。そのために、まず自由境界  $\gamma$  は

点  $(i/N, \eta_r^i)$  を通る折れ線  $\gamma_r : y = \eta_r(x)$  によつて近似

されるものとする。周期条件より、 $\eta_r^N = \eta_r^0$  である。

この  $\eta_r$  によつて定まる  $\Omega_{\epsilon}$  の特性関数の近似  $\chi_r$  を用いると離散化問題  $(P)_r^{\epsilon}$  は

$$\left\{ \begin{array}{ll} -(\Delta_r \phi_r^{\epsilon})_{ij} + \frac{1}{\epsilon} (\chi_r \phi_r^{\epsilon})_{ij} = (1 - \chi_r) f_{ij}, & 0 \leq i < N, \\ & 0 < j < N \\ (\phi_r^{\epsilon})_{i,0} = (\phi_r^{\epsilon})_{i,N} = 0, & 0 \leq i < N \\ (\phi_r^{\epsilon})_{0,j} = (\phi_r^{\epsilon})_{N,j}, & 0 < j < N \end{array} \right.$$

と表わされる。

2.3

定理 1 によれば、 $\frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{\gamma}$  は  $g_r(x) = -\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \phi_r^{\epsilon}(x, \eta_r(x))$  で近似されるので、最適化問題は

$$E_r(\eta_r) = h \sum_{0 \leq i < N} |g_r(i/N) - g(i/N, \eta_r^i)|^2$$

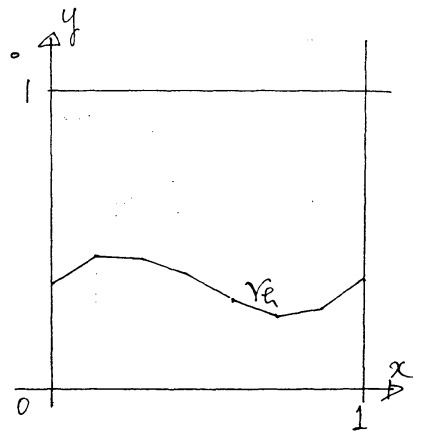


図 5



を最小化する  $\eta_R$  を求める離散問題で近似される。ただし、単純化のために自由境界  $\gamma$  の  $y$  方向の変化は小さいものと仮定して、折線の各線分長は  $h$  としてある。

近似境界  $\eta_R$  を求める反復的な算法を構成する。  $(P)_R^\varepsilon$  を行列表現になおしておこう。  $\eta_R$  は  $N$  次元ベクトル  $(\eta_R^0, \eta_R^1, \dots, \eta_R^{N-1})$  によって定まるから、  $\eta_R \in \Gamma_R = (0, 1)^N$  と考えることができる。この  $\eta_R$  に対して  $\phi_R^\varepsilon$  が  $M (= N(N-1))$  次元ベクトルとして  $(P)_R^\varepsilon$  によって定められるから、  $\phi_R^\varepsilon$  は  $\Gamma_R$  から  $\mathbb{R}^M$  への関数とみなすことができる。したがって、  $-\Delta_R$  と  $X_R(\eta_R)$  とは  $\mathbb{R}^M$  における線型写像だから、  $M \times M$  の行列で表現できる。各々  $S_R$ ,  $X_R(\eta_R)$  とすれば

$$(S_R + \frac{1}{\varepsilon} X_R) \phi_R^\varepsilon = (I_R - X_R) f_R$$

によつて、  $(P)_R^\varepsilon$  が行列表現される。ここで、  $f_R$  は  $f_{ij}$  を成分とする  $M$  次元ベクトルであり、  $I_R$  は  $\mathbb{R}^M$  における恒等変換（あるいは  $\varepsilon$  の近似）である。

$N$  次元ベクトル  $g_R = (g_R^0, g_R^1, \dots, g_R^{N-1})$  も  $\phi_R^\varepsilon$  に対して線型であるから、  $\mathbb{R}^M$  から  $\mathbb{R}^N$  への線型写像  $D_R(\eta_R)$  によつて

$$g_R = -D_R(\eta_R) \phi_R^\varepsilon / \varepsilon$$

と表現される。したがって、  $E_R$  は  $\eta_R \in \Gamma_R$  についての実数値関数であるから、  $\eta_R$  についての極値  $\nabla E_R$  が求められ

る。

0. PIRONNEAU によつて開発された Optimum Shape Design の手法を用いれば、

$$\begin{aligned} \nabla E_\varepsilon = & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left( (\nabla D_\varepsilon) \phi_\varepsilon^\varepsilon, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} D_\varepsilon \phi_\varepsilon^\varepsilon + g_\varepsilon \right) \\ & + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left( (\nabla X_\varepsilon) (p_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon), p_\varepsilon \right) \end{aligned}$$

となる。  $p_\varepsilon$  は共変方程式

$$\left( S_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} X_\varepsilon \right)^* p_\varepsilon = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} D_\varepsilon^* \left( \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} D_\varepsilon + g_\varepsilon \right)$$

の解である。このとき、十分小さい  $\rho > 0$  に対して、

$$\bar{\eta}_\varepsilon = \eta_\varepsilon - \rho \nabla E_\varepsilon$$

とおけば、  $E_\varepsilon(\bar{\eta}_\varepsilon) < E_\varepsilon(\eta_\varepsilon)$  にできる。

以上のようにして、自由境界の近似  $\eta_\varepsilon$  を数値計算によつて求めることが可能となる。

## 2.4

具体的な数値例として、  $\eta(x) = a + b \sin 2\pi x$  で

$$\phi(x, y) = c y (\eta(x) - y)$$

を解とする方程式の近似解  $\phi_\varepsilon^\varepsilon$  を求めた結果を以下に示す。

とくに、  $b = 0$  とすると  $x$  方向には一様となり一次元の問題に帰着されるので、  $b = 0$  の場合を主にして、  $b = 1/16, 1/32$

といたときの数値を示そう。(aは3/8とした)

$a = \frac{3}{8}$ ,  $b = 0$  のときの  $\eta_k$  の値

$N$	$\varepsilon = 1/64$	$\varepsilon = 1/128$	$\varepsilon = 1/256$	$\varepsilon = 1/512$
8	.50562	.50842	.52001	.61972
16	.48380	.45628	.44989	.45251
32	.47515	.45116	.43858	.42305
64	.47435	.45020	.43128	.42006
128		.44902	.43008	.41558
256			.42968	.41505

$a = \frac{3}{8}$ ,  $b = \frac{1}{32}$  のときの結果 ( $N = 8$ ,  $\varepsilon = 1/64$ )

$i$	$\eta_k^i$	$\eta^i$	$g_k^i$	$g^i$
0	.498166	.34375	312.67	312.50
1	.494880	.35290	343.46	343.32
2	.500387	.375000	402.91	402.88
3	.526871	.39710	434.74	435.06
4	.541216	.40625	437.60	437.50

$i = 5 \sim 8$  については対称だから省略した。 $b = 0$  のときの誤差と同程度だから、 $N$  を大きくすればより良い近似値が得られることが期待できる。

$a = \frac{3}{8}$ ,  $b = \frac{1}{16}$  のときの結果 ( $N = 8$ )

$i$	$\eta_{\epsilon}^i$ ( $\epsilon = 1/64$ )	$\eta_{\epsilon}^i$ ( $\epsilon = 1/128$ )	$\eta^i$
0	.498	.477	.312
1	.495	.477	.331
2	.500	.490	.375
3	.527	.529	.419
4	.541	.548	.438

$b = 0$  のときの計算結果からみられるように、 $N$  が一定のときに  $\epsilon$  を小さくし過ぎると近似値の精度が悪くなることが観察される。