数理解析研究所講究録
第467巻 1982年 1-3

Knots の Union の一般化.

北大 理学部 酒井 健

(Ken Sakai)

Unknotting number 1 の knot が prime knot であるかどうかは、古くからの問題であるが、現在のところ、未解決である(筆者の知る範囲で)。この問題に対する一つのアプローチとして、2つの knots K_1, K_2 に対し、knots の集合 $K_1 +_n K_2$ (但し、n は non-negative integer) を定義し、この集合に関するある命題が、上の問題と同値であることを示し、又、この命題に関連した結果を与える。これらについての、詳しい内容は、現在投稿中の論文中にある。

1. $K_1 +_n K_2$ の定義.

K_1 と K_2 を 3-sphere 内の knots として、2-sphere S^2 を decomposition sphere とする K_1 と K_2 の knot sum

$\bar{K}$をつくる：　$\bar{K}=K_1 \#_{S^2} K_2$。そこで、Γを、下の条件をみたすarcとする：

(1) $\Gamma \cap \bar{K} = \partial\Gamma \cap \bar{K} = \{a, b\} \subset \bar{K} - S^2$.

(2) ΓとS^2とは、general positionにあり、

$\#(\Gamma \cap S^2) = n$。

そこで、aの十分近くの$\bar{K}$のsubarcを、Γにそって押してゆき、bの近くの$\bar{K}$のsubarcに引っかけて$\bar{K}$から得られるknotをK_Γとする。この時、

$$K_1 +_n K_2 = \{K_\Gamma \mid \Gamma \text{は(1), (2)をみたす.}\}。$$

（但し、上の定義は若干のあいまいさがあるが、今の所、あまり気にしないでよい。）

この時、次が成立する：

☆ 次の２つは、同値：

(1) unknotting number 1のknotは、primeである。

(2) $\forall K_1, \forall K_2, \forall n$；但し、$K_1, K_2$は、ともにnon-trivial knot；に対し、$K_1 +_n K_2$はtrivial knotを含まない。//

2、結果、

上の(2)に関連して、次のことがわかる：

定理 $^\forall K_1, {}^\forall K_2$; non-trivial knots に対し,
$n \leqq 2$ ならば, $K_1 +_n K_2$ は trivial knot を含まない。//

$K_1 +_0 K_2$ については Schubert の結果の Coro. であり,
$K_1 +_1 K_2$ については 樹下-寺阪 の結果である。
筆者は $K_1 +_2 K_2$ が trivial knot を含むならば、
$K_1 +_0 K_2$ 又は $K_1 +_1 K_2$ が trivial knot を含まなければならないことを示し, $n=2$ の場合の結果を得た。

補足: $n \geqq 3$ については不明であるが、とくに、
$n=3$ の時は次が成立することが最近わかった:

定理′: $K_1 +_3 K_2$ が trivial knot を含むならば
$b(K_1) \leqq 2$ 又は $b(K_2) \leqq 2$, 但し $b(K_i)$
は K_i の bridge number。//

[1] S. Kinoshita - H. Terasaka: Osaka Math. J. 9 (1957), 131-153.

[2] H. Schubert; Sitz. Akad. Wiss. Heiderberg, math.-nat. Kl. 3 Abh (1949).

[3] H. Terasaka: Osaka Math. J. 12 (1960), 113-144.