数理解析研究所講究録
第 471 巻 1982 年 1-9

配線問題とグラフ理論

大阪電気通信大学工学部　浅野哲夫
ASANO TETSUO

プリント基板やLSI（大規模集積回路）における配線設計を計算機により自動化するために、今までに数多くの算法が提案されてきた。本報告では、特にチャネル配線法と呼ばれる配線手法の中でグラフ理論と密接な関連をもつ幾つかの算法をとりあげる。

（問題の定式化）ビルディングブロック方式のLSIでは、図1に示すように、既に設計が完了した多数個のセルが一列に並べられ、その間の長方形領域（チャネル）において配線が行なわれる。セルの端子はすべて量子化されたメッシュの上にのみ存在するものと仮定し、配線もメッシュ上で行う。上下の端子には左から順に整数の番号が付され、左から k 番目の上部端子は P_k^t，下部端子は P_k^b と記される。

さて、すべての端子 P_k^x（$x = t$ or b，$k = 1, 2, \cdots, M$）に

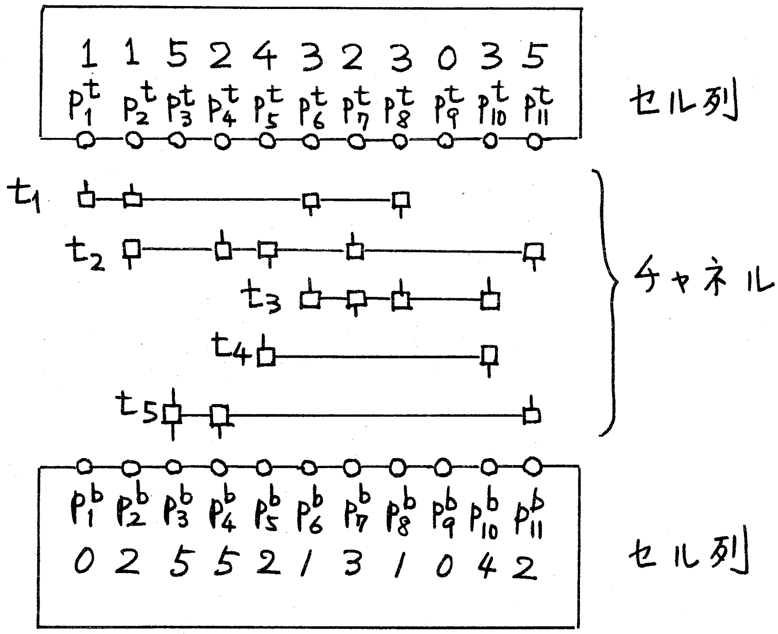

図1.

ついて、この端子に接続する配線の番号を指定すれば配線要求が定まる。但し、どの配線にも接続しない端子（空端子と呼ぶ）には番号0を付する。配線は2層を用いて行なわれ、セル列に平行な線分（幹線）は垂直な線分（支線）と異なる層に置かれ、スルーホールによって結合される。チャネル配線法は異なる配線に対する支線を衝突させないためには幹線の配置順序に制約があることに注目し、この制約関係を制約グラフと呼ばれる有向グラフに表現することによって幹線の配置順序を定めようとする方法である。次のように制約グラフを定義する。

制約グラフ $G(\mathcal{R}, \mathcal{P}, E)$ は次の2種類の頂点集合を有する。(1) $\mathcal{R} = \{t_1, t_2, \cdots, t_N\}$：幹線の集合。(2) $\mathcal{P} = P^t \cup P^b$，ここに，$P^t = \{p^t_1, p^t_2, \cdots, p^t_M\}$：上部端子の集合，$P^b = \{$

$p_1^b, p_2^b, \cdots, p_M^b\}$：下部端子の集合。

有向枝集合Eは次のように定められる。

(3) $(t_i, p_j^t) \in E \Leftrightarrow$ t_iは上部端子p_j^tに接続する。

(4) $(p_j^b, t_i) \in E \Leftrightarrow$ t_iは下部端子p_j^bに接続する。

(5) p_j^tとp_j^bに同じ幹線からの支線が接続するとき，$(p_j^b, p_j^t) \in E$，それ以外のとき，$(p_j^t, p_j^b) \in E$.

図1の配線要求に対する制約グラフを図2に示す。

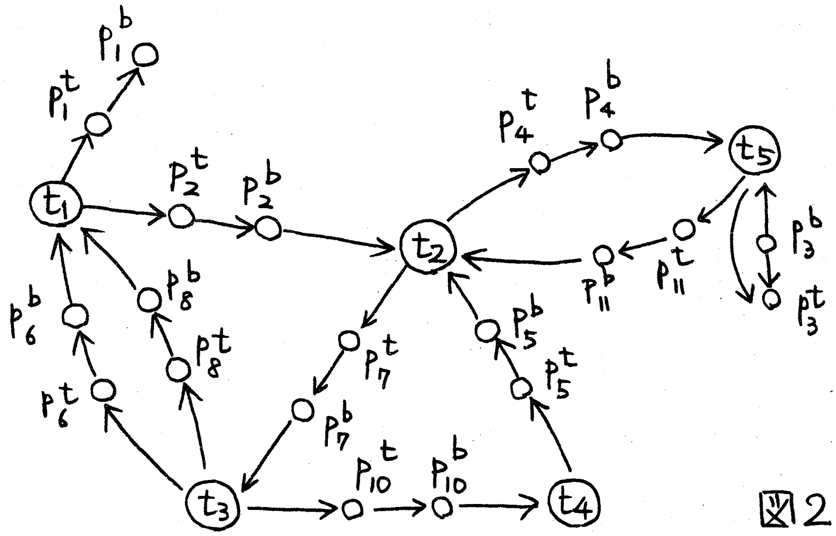

図2.

制約グラフが有向閉路を含んでいる場合には，そのままでは実現不可能である。

（問題1）制約グラフが有向閉路を含む場合には，適当に幹線を分割することによって有向閉路を解消せよ。

幹線を分割する方式として筆者らは先に3種類の方式を定義したが，ここでは幹線分割方式を制約グラフ上の変形操作として再定義する。その前に，各幹線t_iに対して，後続点集

合OUT(t_i)と先行点集合IN(t_i)を次のように定める。

$$\mathrm{OUT}(t_i) = \{p_k^x \mid (t_i, p_k^x) \in E\},$$

$$\mathrm{IN}(t_i) = \{p_k^x \mid (p_k^x, t_i) \in E\},$$

但し、p_k^xは、p_k^t 又はp_k^bを表す。

[分割方式 1t] (t_i, p_j^t, 1t)

幹線t_iを、t_iが接続する上部端子p_j^tの所で左右に分割。

(適用条件) ① $p_j^t \in \mathrm{OUT}(t_i)$, ② $\exists p_a^x, \exists p_b^y \in \mathrm{OUT}(t_i) \cup \mathrm{IN}(t_i)$,

such that $a < j < b$. 但し、x, yはt又はbを表す。

(分割の効果) t_iを以下のt_i^Lとt_i^Rに置きかえる。

$$\mathrm{OUT}(t_i^L) = \{p_k^x \mid p_k^x \in \mathrm{OUT}(t_i) \text{ and } k \leqq j\},$$

$$\mathrm{IN}(t_i^L) = \{p_k^x \mid p_k^x \in \mathrm{IN}(t_i) \text{ and } k \leqq j\},$$

$$\mathrm{OUT}(t_i^R) = \{p_k^x \mid p_k^x \in \mathrm{OUT}(t_i) \text{ and } k \geqq j\},$$

$$\mathrm{IN}(t_i^R) = \{p_k^x \mid p_k^x \in \mathrm{IN}(t_i) \text{ and } k \geqq j\}.$$

[分割方式 1b] (t_i, p_j^b, 1b)

分割方式1tにおいて上下の関係を逆にしたもの。

[分割方式2] (t_i, p_j, 2)

t_iを、t_iが接続しない端子p_jの位置で左右に分割。

(適用条件) t_iはp_j^tにもp_j^bにも接続しない。すなわち、

$\{p_j^t, p_j^b\} \cap [\mathrm{OUT}(t_i) \cup \mathrm{IN}(t_i)] = \phi$, かつ、

$\exists p_a^x, \exists p_b^y \in \mathrm{OUT}(t_i) \cup \mathrm{IN}(t_i)$ such that $a < j < b$.

(分割の効果) 幹線t_iを以下のt_i^Lとt_i^Rに置き換える。

$OUT(t_i^L)=\{p_k^x \mid p_k^x \in OUT(t_i) \text{ and } k<j\} \cup \{p_j^b\}$,

$IN(t_i^L)=\{p_k^x \mid p_k^x \in IN(t_i) \text{ and } k<j\} \cup \{p_j^t\}$,

$OUT(t_i^R)=\{p_k^x \mid p_k^x \in OUT(t_i) \text{ and } k>j\} \cup \{p_j^b\}$,

$IN(t_i^R)=\{p_k^x \mid p_k^x \in IN(t_i) \text{ and } k>j\} \cup \{p_j^t\}$。

［分割方式3l］（t_i, p_j, 3l）

幹線t_iを，上部端子にのみ接続する幹線t_i^Tと下部端子にのみ接続する幹線t_i^Bに分けた後，両方の幹線を，t_iが接続するどの端子よりも左にあるp_jの地点で浮遊支線により接続する。

（適用条件）①t_iは浮遊支線に接続しない。即ち，$OUT(t_i) \subseteqq P^t$ and $IN(t_i) \subseteqq P^b$。 ② $j<k$ for $\forall p_k^x \in OUT(t_i) \cup IN(t_i)$． ③$t_i$は上下の端子に接続する。即ち，$OUT(t_i) \neq \phi$ and $IN(t_i) \neq \phi$.

（分割の効果）幹線t_iを以下のt_i^Lとt_i^Rに置き換える。

$OUT(t_i^T)=OUT(t_i) \cup \{p_j^b\}$ ，$IN(t_i^T)=\{p_j^t\}$，

$OUT(t_i^B)=\{p_j^b\}$ ，$OUT(t_i^B)=IN(t_i) \cup \{p_j^t\}$.

［分割方式3r］（t_i, p_j, 3r）

分割方式3lにおいて左右の関係を逆にしたもの.

［分割方式4t］（t_i, p_j^t, 4t）

幹線t_iを上と同様にt_i^Tとt_i^Bに分けた後，両方の幹線を，t_iが接続する上部端子p_j^tから延ばした支線により接続する。

（適用条件）①t_iは浮遊支線に接続しない。②t_iはp_j^t以外

の上部端子に接続する。③ t_i は p_j^b 以外の下部端子に接続する。④ t_i は p_j^t に接続する。

（分割の効果）幹線 t_i を以下の t_i^T と t_i^B に置きかえる。

$OUT(t_i^T) = OUT(t_i)$, $IN(t_i^T) = \phi$,

$OUT(t_i^B) = \{p_j^t\}$, $IN(t_i^B) = IN(t_i)$.

［分割方式4b］ $(t_i, p_j^b, 4b)$

分割方式4tにおいて上下の関係を逆にしたもの。

問題1に関連して上に述べた分割方式の能力を列挙すると以下のようになる。

（定理1）有向閉路Cが分割 $(t_i, p_j^t, 1t)$ によって解消されるための必要十分条件は、以下の2条件を満たすことである。

① 分割 $(t_i, p_j^t, 1t)$ が適用可能である。

② 有向閉路Cが、$a > j > b$ 又は $a < j < b$ である道 $p_a^x \to t_i \to p_b^y$（x, y は t 又は b を表す）を含んでいる。

（定理2）有向閉路Cが分割 $(t_i, p_j, 2)$ によって解消されるための必要十分条件は、以下の条件を全て満たすことである。

① 分割 $(t_i, p_j, 2)$ が適用可能である。

② 有向閉路Cが、$a > j > b$ 又は $a < j < b$ である道 $p_a^x \to t_i \to p_b^y$ を含んでいる。

③ t_i から p_j^t へ至る道が存在しない。

④p_j^bからt$_i$へ至る道が存在しない。

⑤p_j^bからp_j^tへ至る道が存在しない。

（定理3）有向閉路Cが分割（$t_i, p_j, 3l$）又は（$t_i, p_j, 3r$）によって解消されるための必要十分条件は、以下の条件を全て満たすことである。

① 分割（$t_i, p_j, 3l$）又は（$t_i, p_j, 3r$）が適用可能である。

② 有向閉路Cはt_iを含む。

③ t_iからp_j^tへ至る道が存在しない。

④ p_j^bからt_iへ至る道が存在しない。

⑤ p_j^bからp_j^tへ至る道が存在しない。

（定理4）有向閉路Cが分割（$t_i, p_j^t, 4t$）によって解消されるための必要十分条件は、以下の2条件を満たすことである。

①分割（$t_i, p_j^t, 4t$）が適用可能である。

②有向閉路Cが（t_i, p_j^t）と異なる枝（t_i, p_x^t）を含んでいる。

以上の結果より次の定理を得る。

（定理5）4つの分割方式を用いれば、どのような制約グラフをも有向閉路を持たない形に変形できる。

（略証）有向閉路には、全ての点が次数2であるものとそれ以外のものがある。後者は分割方式4t及び4bを用いて必ず解消することができ、前者は分割方式1t, 1b, 2, 3l, 3rの

いずれかを用いて解消することができる。（略証終）

実際には幹線分割の回数をできる限り減らしたいという要求もあるので，最小フィードバック点集合を求める問題とよく似た問題を解く必要がある。また，チャネル配線法における究極の目的は，チャネル幅を最小にするような実現方法を見つけることである。

（問題２）与えられた配線要求を最小チャネル幅で実現せよ。

幹線相互間に上下制約が存在しない場合には，最小の幅での配線が常に可能であることが区間グラフの概念の下に知られている。制約が存在する場合には，各ネットを区間と見なした区間グラフの上でのマッチングに基づく幅最小化の近似算法が知られている。このとき，幅最小化のための幹線分割も考慮されているが，分割方式は1cと1bに限定されている。また，最長有向道に注目した近似算法も報告されている。

以上の議論は，横方向の線分と縦方向の線分は別の層に配置するという仮定に基づいていたが，この仮定を取り除いた議論も行なわれている。文献(3)では，ネットを２端子ネットに分解し，これらを５つのタイプに分類してそれぞれについて線分の層割り当ての方法を変えてやると，同様の方法で作られた制約グラフは常にacyclicであるので，有向閉路を解消するための幹線分割が不用になるという手法を提案して

いる。

参考文献

1）浅野：「チャネル配線法における幹線分割について」電子通信学会論文誌, Vol. J64-A, No.7, pp.535-542, 1981。

2）T. Yoshimura and E.S. Kuh : Efficient Algorithms for Channel Routing, IEEE Trans. on CAD, Vol. CAD-1, No.1, pp.25-35, 1982.

3）M. Marek-Sadowska and E.S. Kuh : A New Approach to Channel Routing, 1982 IEEE International Symposium on Circuits and Systems Proceedings, pp.764-767, 1982.