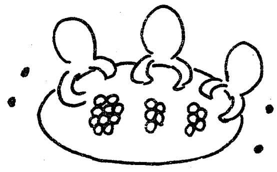
数理解析研究所講究録
第 471 巻 1982 年 160-167



# $n$人でする石取りゲーム



明石高専　加納幹雄（MIKIO KANO）

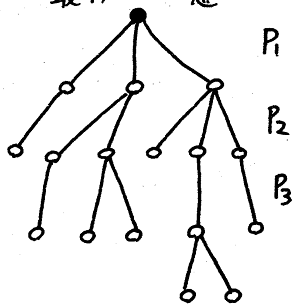
まずいくつかの石の山をつくる．この石の山を用いて$n$人のプレーヤー $P_1, P_2, \cdots, P_n$ で次のような石取りゲームをする．まず $P_1$ がどれか1つの山から1個以上石を取る．このとき取る石の数に制限をつける場合とつけない場合がある．次に $P_2$ がある山から1個以上石を取る．以下このような石取りを $P_3, P_4, \cdots, P_n, P_1, \cdots, P_n, P_1, \cdots$ と石が失くなるまで続けてゆく．そして $X_1$ が着手（石を取ること）したとき全部の石が取られゲームは終ったものとする．$X_1$ の $i$ 手前に着手したプレーヤーを $X_{i+1}$ で表す．例えば $P_1, P_2, P_3, P_4$ の4人でゲームをし，$P_3$ が着手したときゲームが終了すれば，$X_1 = P_3,\ X_2 = P_2,\ X_3 = P_1,\ X_4 = P_4$ である．このとき $\{1, 2, \cdots, n\}$ 上の置換 $\sigma$ を1つ選び，これを用いてプレーヤーの順位を1位 $X_{\sigma(1)}$，2位 $X_{\sigma(2)}$，…，$n$位 $X_{\sigma(n)}$ と定める．このような石取りゲームを$n$人でする$\sigma$-石取りゲームとよぶ．しかしここで扱うのは次のような特別なゲームである．

正規型石取りゲーム　　1位 $X_1$, 2位 $X_2$, … , $n$位 $X_n$

$\ell$後退正規型石取りゲーム　　1位 $X_\ell$, 2位 $X_{\ell+1}$, … , $n$位 $X_{\ell+n-1}$

ただし $\ell \geqq 2$ で，添字 $\ell+i$ は $(\mathrm{mod}\ n)$ でとるものとする．

すると2人でする正規型石取りゲームは普通の正規型石取りゲームになっており，2人でする2後退正規型石取りゲームは普通の逆型石取りゲームになっている．



ゲームの木

さて σ-石取りゲームを決めると，最初の石の山の型により，誰れが1位になるかがゲームを始める前に理論上確定することを述べよう．最初の石の山を頂点とするゲームの木を考える．この木の点は石の山の型に対応し，辺は着手に対応する([3])．するとこの木の末端から順に誰が1位になるかが，特に全員の順位が決まってくる．つまりある点（ある石の山）において，その点からでているすべての下の点に対し誰が1位になるかが決まっておれば，この点で着手するプレーヤーは自分の順位が最もよくなるように着手するはずである．よってこの点からゲームを始めると誰が1位になるか，特に全員の順位が確定する．これを繰り返してゆけばよい．

もちろんあるプレーヤーが1位になるはずのゲームであっても，最下位にならないはずのプレーヤーがミスをすれば他のプレーヤーが1位になることもある．そしてミスをしたプレーヤーは，他のプレーヤーがその後着手を誤まらなければ，最初に得られるはずだった順位より下位になる．つまり1人のミスは全体の順位を狂わせるが，ミスをした本人の順位も下げる．

$x, y, \cdots, z$ 個の石からなる石の山を $(x, y, \cdots, z)$ で表す．そして $x, y, \cdots, z$ を2進展開し，各桁ごとに加えてたものを $(\mathrm{mod}\ n)$ で求め，これを $n$ 進展開したものとみなして求めた数を <u>$n$-ニム和</u>とよび $x \oplus y \oplus \cdots \oplus z$

で表す、つまり $x=\sum x_i 2^i$, $y=\sum y_i 2^i$, $\cdots$, $z=\sum z_i 2^i$ とし $x\oplus y \oplus\cdots\oplus z=\sum w_i n^i$ とおくと $x_i+y_i+\cdots+z_i\equiv w_i \pmod{n}$, $0\leqq w_i<n$ である、例えば 14, 11, 10, 7 の 3 ニム和は $14\oplus 11\oplus 10\oplus 7=(8+4+2)\oplus(8+2+1)\oplus(8+2)\oplus(4+2+1)=(3\times 8+2\times 4+4\times 2+2\times 1)=(2\times 9+1\times 3+2\times 1)=23$ となる、

定理A　石の山 $(x, y, \cdots, z)$ を用いて $n$ 人で、取る石の数に制限のない正規型石取りゲームをするものとする、このとき最初に着手するプレーヤーが最下位になるための必要十分条件は

$$x\oplus y\oplus\cdots\oplus z=0 \qquad (n=4\text{和})$$ となることである、

定理B　石の山 $(x, y, \cdots, z)$ を用いて $n$ 人で、取れる石の数に制限のない $l$ 後退正規型石取りゲームをするものとする、このとき最初に着手するプレーヤーが最下位になるための必要十分条件は

もしある石の山に2個以上石があれば　$x\oplus y\oplus\cdots\oplus z=0$　$(n=4\text{和})$

もしすべての石の山に1個石があれば　$x\oplus y\oplus\cdots\oplus z=l-1$　$(n=4\text{和})$

となることである、

取れる石の数が $k$ 個以下に制限された場合は、石の山が高々2つまでの場合しかわかっていない、また一般に $n$ 人でする石取りゲームのグルンディー関数についても存在、不存在（合理的な計算法を含めて）が不明である、2人でする石取りゲームについては一松〔1〕が詳しい、又2人でする逆型石取りゲームについては山崎〔2〕を参照されたい、

定理Aの証明

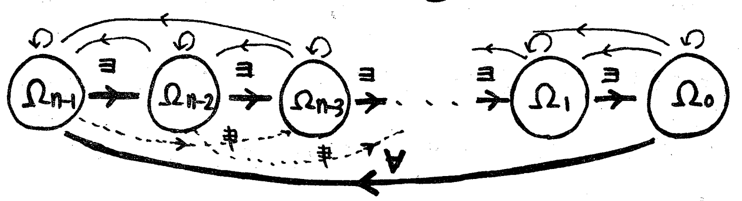
石のない状態 $(0)$ も含めて石の山の全体を $\Omega$ とおく。そして $i$ 番目に着手するプレーヤー $P_i$ が $1$ 位になる石の山の全体を $\Omega_i$ で表し、便宜上 $\Omega_n$ を $\Omega_0$ とかき $(0)\in\Omega_0$ とする。すると $\Omega$ は $\Omega=\Omega_0\cup\Omega_1\cup\cdots\cup\Omega_{n-1}$ と直和に分割される。石の山 $\overline{m}$ に着手 $\varphi$ をして得られる石の山を $\varphi(\overline{m})$ とかき、着手 $\varphi_1$ をし次に着手 $\varphi_2$ をして得られる石の山を $\varphi_2(\varphi_1(\overline{m}))=\varphi_2\circ\varphi_1(\overline{m})$ とかく。

**補題1** $\Omega$ の分割 $\Omega=\Omega_0\cup\Omega_1\cup\cdots\cup\Omega_n$ は次の条件をみたす。

(1) $(0)\in\Omega_0$、また $\overline{m}\in\Omega_0$ なら任意の着手 $\varphi$ に対し $\varphi(\overline{m})\in\Omega_{n-1}$ となる。

(2) $\overline{m}\in\Omega_i$ $(1\leq i\leq n-1)$ なら $\varphi(\overline{m})\in\Omega_{i-1}$ となる着手 $\varphi$ が存在する。

(3) $\overline{m}\in\Omega_i$ $(2\leq i\leq n-1)$ なら任意の着手 $\varphi$ に対し $\varphi(\overline{m})\notin\Omega_{i-2}\cup\cdots\cup\Omega_0$.



着手の存在と石の山の流れ

| $\overline{m}\in\Omega_i$ | $\Omega_{n-1}$ | $\Omega_{n-2}$ | $\cdots$ | $\Omega_2$ | $\Omega_1$ | $\Omega_0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_1$ から始めたときの $P_1$ の順位 | $n-1$ | $n-2$ | | $2$ | $1$ | $n$ |
| $P_1$ 〃 $P_n$ 〃 | $n$ | $n-1$ | | $3$ | $2$ | $1$ |

$\overline{m}$ からゲームを始めたときの $P_1$ と $P_n$ の順位表

(証) $\overline{m}\in\Omega_i$, $i\neq 0$, とする。$\overline{m}$ に着手するプレーヤーを $P$ とすると $P$ の順位は $i$ となるはずである（上の表）。1手着手するとその局面において最後に着手するプレーヤーとなるから、最後に着手するプレーヤーが $i$ 位になる局面にできるはずである（上の表）。よって (2) が成り立つ。また $\overline{m}\in\Omega_i$ $(i\geq 2)$ のとき $\varphi(\overline{m})\in\Omega_{i-2}\cup\cdots\cup\Omega_0$ となる着手 $\varphi$ が存在すれば、この着手によって $P$ の順位は $i-1$ 位より良くなり $i$ 位になることに反する。よって (3) が成り立つ。同じ理由で $m\in\Omega_0$ ならすべての着手 $\varphi$ で $\varphi(\overline{m})\in\Omega_{n-1}$ となる。つまり (1) が成り立つ。

補題2　$\Omega$ の分割 $\Omega=\Omega'_0\cup\Omega'_1\cup\cdots\cup\Omega'_{n-1}$ が補題1と同じ条件をみたすなら $\Omega_i=\Omega'_i$ , $0\leq i\leq n-1$, となる。

(証)　$\Omega$ の元全体に、$\overline{m}$ の番号 $>$ $\varphi(\overline{m})$ の番号（すべての着手 $\varphi$ に対して）となるように番号をつけ、この番号に関する帰納法で証明する。$(0)\in\Omega_0$ より1番目はよい。$\overline{m}\in\Omega'_i$ とする。もし $\overline{m}\in\Omega'_0$ なら $\varphi(\overline{m})\in\Omega'_{n-1}$ となり、帰納法の仮定により $\varphi(\overline{m})\in\Omega_{n-1}$ となる。すべての着手で $\Omega_{n-1}$ になる $\overline{m}$ は $\Omega_0$ のものに限るから $\overline{m}\in\Omega_0$。もし $\overline{m}\in\Omega'_i$ $(1\leq i\leq n-1)$ なら $\varphi(\overline{m})\in\Omega'_{i-1}$ となる着手 $\varphi$ が存在する。帰納法の仮定より $\varphi(\overline{m})\in\Omega_{i-1}$。よって $\overline{m}$ を用いてゲームをすると $P_1$ は $i$ 位以上になれる（$\Omega_{i-1}$ における $P_n$ の順位は $i$ 位）。一方 $\varphi(\overline{m})\in\Omega'_j$ $(j\leq i-2)$ となる着手 $\varphi$ は存在しないし、$\varphi(\overline{m})\in\Omega'_k$ $(k\geq i)$ となる着手 $\varphi$ を $P_1$ がすれば $\varphi(\overline{m})\in\Omega_k$ より $P_1$ の順位は $k+1$ 位となる。よって $P_1$ の得られる最高順位は $i$ 位である。故に $\overline{m}\in\Omega_i$。

補題3　$\Omega$ の部分集合 $X$ が次の条件をみたせば $X=\Omega_0$ である。

(1)　$(0)\in X$

(2)　$\overline{m}\in X$ とすると、任意の着手 $\varphi_1,\cdots,\varphi_r$ $(1\leq r\leq n-1)$ に対し $\varphi_r\circ\cdots\circ\varphi_1(X)\notin X$.

(3)　$\overline{m}\notin X$ なら $\varphi_s\circ\cdots\circ\varphi_1(X)\in X$ となる着手 $\varphi_1,\cdots,\varphi_s$ $(1\leq s\leq n-1)$ が存在する。

(証)　$\Omega''_0=X$, $\Omega''_{n-1}$ $\{\varphi(\overline{m})\mid\overline{m}\in\Omega''_0\}$, $\Omega''_{n-2}=\{\varphi(\overline{m})\mid\overline{m}\in\Omega''_{n-1}\}-\Omega''_{n-1}$, $\cdots$ $\Omega''_1=\{\varphi(\overline{m})\mid\overline{m}\in\Omega''_2\}-\Omega''_{n-1}\cup\cdots\cup\Omega''_2$（補題1の図）とおくと、$\Omega$ は $\Omega=\Omega''_0\cup\cdots\cup\Omega''_{n-1}$ と直和に分割され、又補題1の条件をみたす。よって補題2より $\Omega''_i=\Omega_i$, 特に $\Omega''_0=X=\Omega_0$ となる。

$n=4$ 和が $0$ となる石の山の全体を $Y$ で表す。すなわち

$$Y=\{\overline{m}=(x,y,\cdots,z)\mid x\oplus y\oplus\cdots\oplus z=0\ \ (n=4\ 和)\}\cup\{(0)\}$$

とおく．以下 $Y$ が補題3の条件をみたすこと示す．これができれば定理Aは証明されたことになる．$Y$ が補題3の (1) をみたすのは明らかである．

補題4　$Y$ は補題3の条件 (2) をみたす．

(証) $\overline{m}=(m_1,m_2,\cdots,m_k)\in Y$ が $r$ 回の着手 $\varphi_r\circ\varphi_{r-1}\circ\cdots\circ\varphi_1$ で $\overline{m'}=(m_1',\cdots,m_k')$ になったとする．$m_i=\sum_t \alpha_i^t 2^t$，$m_i'=\sum_t \beta_i^t 2^t$ $(\alpha_i^t,\beta_i^t=0$ or $1)$ とおくとある $i,t$ で $\alpha_i^t>\beta_i^t$ となっている．このような $i,t$ の中で $t$ が最大になるものを $s$ とおく．すると $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i^s\equiv 0 \pmod n$ と $\#\{i\,|\,\alpha_i^s\neq\beta_i^s\}\leq r<n$ より

$$-\sum_{i=1}^{k}\beta_i^s\equiv\sum_i(\alpha_i^s-\beta_i^s)\equiv n-\#\{i\,|\,\alpha_i^s\neq\beta_i^s\}\not\equiv 0 \pmod n.$$

よって $\sum_i\beta_i^s\not\equiv 0 \pmod n$，つまり $\overline{m'}\notin Y$.

補題5　$Y$ は補題3の条件 (3) をみたす．

$\overline{m}=(m_1,\cdots,m_k)\notin Y$ とする．もし $k<n$ なら $k$ 回の着手で $\overline{m}$ を $(0)\in Y$ にできる．よって $k\geq n$ としてよい．$m_i=\sum_t\alpha_i^t 2^t$ $(\alpha_i^t=0$ or $1)$ とおく．

$m_1\oplus\cdots\oplus m_k=an^p+a_1n^{p-1}+\cdots$，$a>0$ とかけるが，一般性を失うことなく $\alpha_1^p=\cdots=\alpha_a^p=1$ と仮定してよい．$m_{a+1}\oplus\cdots\oplus m_k=\sum f_t n^t$ とおく．

1° もしすべての $t$, $0\leq t\leq p-1$, で $f_t=0$ 又は $n-a\leq f_t<n$ なら $a$ 回の着手で $\overline{m}$ を $(m_1',\cdots,m_a',m_{a+1},\cdots,m_k)$ にかえ $m_1'\oplus\cdots\oplus m_a'\oplus m_{a+1}\oplus\cdots\oplus m_k=0$ とできる．

(証) 各 $t$, $0\leq t\leq p-1$ に対し $f_t=0$ なら $g_t=0$，$f_t\neq 0$ なら $g_t=n-f_t$ とおく．そして整数 $y_1,\cdots,$ を $y_1\oplus\cdots\oplus y_a=\sum_{t=0}^{p-1}g_t n^t$ となるようにとる．これは $0\leq g_t\leq a$ より容易にできる．このとき各 $m_i$, $1\leq i\leq a$, を $m_i'=\sum_{t>p}\alpha_i^t2^t+y_i$ にかえる ($\alpha_i^p=1$ より $m_i>m_i'$)．すると $m_1'\oplus\cdots\oplus m_a'\oplus m_{a+1}\oplus\cdots\oplus m_k=0$ となる．

2° もしある $t$, $0 \leq t \leq p-1$, で $0 < f_t < n-a$ となるなら，このような $t$ の中で最大のものを $g$ とする．このとき $\alpha_{a+1}^{g} = \alpha_{a+2}^{g} = \cdots = \alpha_{a+b}^{g} = 1$, $b = f_t$ と仮定してよいが，すると $m_1, \cdots, m_a$ を $m_1', \cdots, m_a'$ にして

$$m_1' \oplus \cdots \oplus m_a' \oplus m_{a+1} \oplus \cdots \oplus m_k = (a+b)n^{g} + b_1 n^{g-1} + \cdots$$

とできる．

(証) 各 $t$, $g < t < p$, に対し $f_t = 0$ なら $g_t = 0$, $0 < f_t$ なら $g_t = n - f_t$ とおき，整数 $y_1, \cdots, y_a$ を $y_1 \oplus \cdots \oplus y_a = \sum_{t=g+1}^{p-1} g_t n^t + a n^{g}$, $y_i < 2^p$, となるように決める．そして各 $m_i$ を $m_i' = \sum_{t>p} \alpha_i^t 2^t + y_i$ にかえればよい．

$$m_{a+b+1} \oplus \cdots \oplus m_k = \sum f_t' 2^t \qquad とおく．$$

3° もしすべての $t$, $0 \leq t < g$ で $f_t' = 0$ 又は $n-(a+b) \leq f_t' < n$ なら $m_1, \cdots, m_{a+b}$ を $m_1'', \cdots, m_{a+b}''$ にかえて $m_1'' \oplus \cdots \oplus m_{a+b}'' \oplus m_{a+b+1} \oplus \cdots \oplus m_k = 0$ とできる．

(証) 各 $t$, $0 \leq t < g$ に対し $f_t' = 0$ なら $g_t' = 0$, $0 < f_t'$ なら $g_t' = n - f_t'$ とおき，整数 $y_1', \cdots, y_{a+b}'$ を $y_1' \oplus \cdots \oplus y_{a+b}' = \sum_{t=0}^{g-1} g_t' n^t$, $y_i' < 2^g$ となるように決める．$g_t' \leq a+b$ よりこれはできる．さて各 $m_i$ を $1 \leq i \leq a$ なら $m_i' = \sum \alpha_i^t 2^t$ とおくとき $\sum_{t>g} \alpha_i^t 2^t + y_i' = m_i''$ に，$a < i \leq a+b$ なら $\sum_{t>g} \alpha_i^t 2^t + y_i'$ にかえる．すると $m_1'' \oplus \cdots \oplus m_{a+b}'' \oplus m_{a+b+1} \oplus \cdots \oplus m_k = 0$ となる．($1 \leq i \leq a$ なら $m_i \geq m_i' \geq m_i''$ より $m_i$ から $m_i''$ に 1回(又は0回)の着手でできる)

以下もし $0 < f_t' < n-(a+b)$ となる $f_t'$ があれば 2° と同じようにし，次に 3° に相当することが成り立つかどうか調べる．成り立てばよいし，成り立たねば再び 2° と同じことをする．すると $l$ 回 ($l \leq n-1$) の着手で $m_1, \cdots,$

$m_\ell$ を $m_1^*, \cdots, m_\ell^*$ にかえ $m_1^* \oplus \cdots \oplus m_\ell^* \oplus m_{\ell+1} \oplus \cdots \oplus m_k = 0$ とできることがわかる。故に補題5は証明された。

以上で定理Aは証明されたことになる。定理Bの証明もほぼ同じようにしてできる。異なる点は $(0) \in X$, $(0) \in \Omega_0$ が $(1, \cdots, 1) \in X$, $\in \Omega_0$, ただし1は mod $n$ で数えて $\ell - 1$ 個, となるだけである。詳しくは[4]を参照されたい。

最後にいろいろ議論していただいた二宮博氏に感謝します。

## 文献


〔1〕一松 信;石とりゲームの数理,森北出版 (1968)

〔2〕山崎洋平;On misére Nim type games, J. Math. Soc. Japan, Vol. 32, 461–475 (1980)

〔3〕二宮博;ある種のニムについて,明石高専研究紀要, Vol. 24 119–124 (1982)

〔4〕加納幹雄;The game of Nim played by n players, 投稿中