数理解析研究所講究録
第 474 巻 1982 年 7-22

The stratum with constant Milnor number of a mini-transversal family of a quasihomogeneous function of corank two.

千葉大 理 鈴木正彦

V.I. Arnol'd は孤立特異点を持つ擬斉次正則函数芽 $f:(\mathbb{C}^n,0)\longrightarrow(\mathbb{C},0)$ の Milnor 数を保つ small purturbation は次のような family で尽くされるであろうと予想した。([1] 参照)

$$F_t(x)=f(x)+\sum t_j\varphi_j\ ,$$

ここで, φ_j は f の Newton boundary の上方及びその上にある有限次元ベクトル空间 $\mathbb{C}\{x_1,\dots,x_n\}/(\partial f/\partial x_1,\dots,\partial f/\partial x_n)$ の単項式基である。この予想に関する貢献には, Arnol'd [1], Yoshinaga & Suzuki [7], Kushnirenko & Gabrielov [3] などがある。我々は, この予想を corank 2 の場合に証明した。内容の詳細は次のようである。

定理. f を corank 2 の孤立特異点を持つ擬斉次正則函数芽 $F:(\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^{\mu-1},0)\longrightarrow(\mathbb{C},0)$ を f の mini-transversal family

とする。今，次のような$\mathbb{C}^{\mu-1}$の algebraic subset を考える

$$S_F=\{t\in\mathbb{C}^{\mu-1}\mid\mu(F_t)=\mu(f)\},$$

ここで，$\mu(\ )$はMilnor数で，$\mu=\mu(f)$である。このときS_Fは non-singular で，その次元はfのNewton boundaryの上方及びその上にある有限次元ベクトル空間$\mathbb{C}\{x,y\}/$
$/(\partial f/\partial x,\partial f/\partial y)$の単項式基の個数に等しい。

この定理から次の系が直ちに導びかれる。

系. 孤立特異点を持つ corank 2 の擬斉次正則函数芽の modality はその inner modality に等しい。（modality と inner modality の定義は[1], [2]を参照）

系. 0を保つ正則函数芽全体の函数空間における，擬斉次正則函数芽fを含むMilnor数一定の stratum は non-singular algebraic subset で，その余次元は$\mu(f)$ − the inner modality of f である。

定理の証明

$f:(\mathbb{C}^n,0)\longrightarrow(\mathbb{C},0)$を孤立特異点を持つMilnor数$\mu$の正則函数芽とする。$S_F:=\{t\in\mathbb{C}^{\mu-1}\mid\mu(F_t)=\mu(f)\}$とおくと，こ

れは algebraic subset になることが良く知られている。

$$F(x,t):=f(x)+\sum_{i=1}^{\mu-1}t_i\phi_i(x),$$

ただし，$\{\phi_1,\dots,\phi_{\mu-1}\}$は有限次元$\mathbb{C}$-ベクトル空間$\mathcal{L}_f:=\mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}(\partial f/\partial x_1,\dots,\partial f/\partial x_n)$の単項式基である。このような$F$は孤立特異点をもち，原点を保つ正則函数芽の空間における，原点を保つ双正則写像芽全体のなす Lie 群の作用によるfの orbit に transversal で，その moduli 空間の次元が最も小さいものである。（このようなFをfの mini-transversal family という）　fを型$(r_1,\dots,r_n)$の quasihomogeneous とし，$A_F:=\{(t_1,\dots,t_{\mu-1})\in\mathbb{C}^{\mu-1}\mid \text{quasidegree }\phi_i<1$ なるiに対して$t_i=0\}$とおくと，$S_F\supset A_F$が知られている（[1] 参照）

$$f_1(x,y):=x^a+y^b+g(x,y)\qquad a,b\geqq 3$$
$$f_2(x,y):=x(x^a+y^b+g(x,y))\qquad a,b\geqq 2$$
$$f_3(x,y):=xy(x^a+y^b+g(x,y))\qquad a,b\geqq 1,$$

ここで，gは型$(1/a,1/b)$の quasihomogeneous で，x^a, y^bを単項式として含まず，f_i $(i=1,2,3)$は孤立特異点を持つとする。f_1, f_2, f_3はそれぞれ型$(1/a,1/b)$，$(1/(a+1),a/(a+1)b)$，$(b/(ab+a+b),a/(ab+a+b))$の quasi-homogeneous である。

kをa, bの G.C.M.，$a=ck$, $b=dk$とすると

$$f_1(x,y)=\prod_{i=1}^{k}(y^d+\zeta_i x^c)\ ,\ \zeta_i\neq\zeta_j\ (i\neq j)$$

という既約分解を得る。今，f_1, f_2, f_3 の形に注意して，その偏微分を計算すれば，これらの mini-transversal family として次のようなものを得る。

$$F_1(x,y,t)=f_1(x,y)+\sum_{i=1}^{\mu_1-1}t_i\phi_{1i}(x,y),$$

ここで，$\{\phi_{11},\dots,\phi_{1\mu_1-1}\}$ は $\mathcal{L}_{f_1}$ の monomial basis で，単項式 x^iy^{b-1} $(i\geqq 1)$ を含まない。

$$F_2(x,y,t)=f_2(x,y)+\sum_{i=1}^{\mu_2-1}t_i\phi_{2i}(x,y)$$

$$F_2'(x,y,t)=f_2(x,y)+\sum_{i=1}^{\mu_2-1}t_i\phi_{2i}'(x,y)$$

ここで，$\{\phi_{21},\dots,\phi_{2\mu_2-1}\}$ (resp. $\{\phi_{21}',\dots,\phi_{2\mu_2-1}'\}$) は $\mathcal{L}_{f_2}$ の単項式基で，単項式 y^{b+i} $(i\geqq 1)$, $x^{i+1}y^{b-1}$ $(i\geqq 1)$ (resp. x^ay^i $(i\geqq 1)$) を含まない。

$$F_3(x,y,t)=f_3(x,y)+\sum_{i=1}^{\mu_3-1}t_i\phi_{3i}(x,y),$$

ここで，$\{\phi_{31},\dots,\phi_{3\mu_3-1}\}$ は $\mathcal{L}_{f_3}$ の単項式基で，単項式 $x^{i+1}y^b$ $(i\geqq 1)$, y^{b+1+i} $(i\geqq 1)$ を含まない。

以下，次の３つの補題で，stratum S_{F_i} , $i=1, 2, 3$ を決定する。

補題１．　　　$S_{F_1}=A_{F_1}$

証明　$S_{F_1}-A_{F_1}\neq\phi$ と仮定する。$S_{F_1}-A_{F_1}$ は semi-algebraic subset なので, Milnor の curve selection lemma によって, $\exists \lambda : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{C}^{\mu-1}$, $\lambda(0)=0$, $\lambda(t) \in S_{F_1} - A_{F_1}$ ($\forall t>0$)。$F_{1\lambda(t)}$ は constant Milnor number $\mu(f_1)$ を持つ real parameter t に関する smooth family なので, [ ] によって, 次の relative homeo. を得る:

$$(\mathbb{C}^2, V(F_{1\lambda(t)})) \simeq (\mathbb{C}^2, V(f_1)) \quad (\forall t \in [0,\infty)).$$

今 $F_{1\lambda(t)}$ の $\mathbb{C}\{x,y\}$ における既約分解を

$$F_{1\lambda(t)} = \prod_{i=1}^{k} f_{it} \quad (\forall t \in [0,\infty))$$

とおけば,

$$(\mathbb{C}^2, V(f_{1i})) \simeq (\mathbb{C}^2, V(f_{it}))$$
$$(V(f_{1i})\cdot V(f_{1j}))_0 = (V(f_{it})\cdot V(f_{jt}))_0 ,$$

ここで, $(\cdot)_0$ は原点における交点数。これは, plane curve の relative topological type は, 各々の既約成分の relative topological type と既約成分の間の交点数で決まるという, Zariski & Hironaka の定理([6])に依る。plane curves の family $V(F_{1\lambda(t)})$ は uniform stable radius をもつので, f_{it} の t に関する連続性は保証される。([4] 参照)

以下, 一般性を失うことなく $b \leqq a$ と仮定してよい。又, 以下の議論は固定された parameter $t>0$ に対して進む。plane curve の mult. は位相不変量なので,

$$(\mathbb{C}^2, V(f_{it})) \simeq (\mathbb{C}^2, V(f_{1i}))$$

となることから order$(f_{it})=d$ 。$V(f_{it})$のtangent cone は一つの方向しか持たないので,

$$f_{it}(x,y)=(b_{0i}y+a_{0i}x)^d+\text{the higher},\quad b_{0i}\neq 0,$$

ここで, $b_{0i}\neq 0$ は f_{it} と f_{1i} が近いことによる。このとき Weierstraß の preparation theorem によって,

$$f_{it}(x,y)=u_{it}(x,y)\{(y+a'_{0i}x)^d+\sum_{j=1}^{d}(y+a'_{0i}x)^{d-j}\phi_{ij}(x)\},$$

ここで, u_{it} は $\mathbb{C}\{x,y\}$ の unit で

$$\phi_{ij}\in\mathbb{C}\{x\},\quad \text{order}(\phi_{ij})>j\quad(\forall i,j).$$

今,

$$f_{it}(x,y)=(y+a'_{0i}x)^d+\sum_{j=1}^{d}(y+a'_{0i}x)^{d-j}\phi_{ij}(x)$$

$$u_t(x,y)=\prod_{i=1}^{k}u_{it}(x,y)$$

と置きなおす。$f_{it}(x,y)=0$ の y についての d ケの根のうちの一つを $y_i(x)$ とおくと, $y_i(x)$ の次のような Puiseux 展開が得られる。

$$y_i(x)=\sum_{j=0}^{p_i}a_{ij}x^{c_i+j}+\sum_{j=0}^{\infty}b_{ij}x^{(c+j)/d},\quad b_{i0}\neq 0,$$

ここで, 上の展開で初めの方の和 $\Sigma_i:=\sum a_{ij}x^{c_i+j}$ があるときは, $c_i\in\mathbb{N}$ $1\leqq c_i+j<c/d$ $a_{i0}\neq 0$ $(i=1,\dots,k,\ j=0,\dots,p_i)$。

$$X:=x,\quad Y_i:=y-\sum_{j=0}^{p_i}a_{ij}x^{c_i+j}\quad(i=1,\dots,k)$$

とおけば, 座標 (X,Y_i) に対して

$$f_{it}(x,y)=\prod_{\eta^d=1}(y-y_i(\eta\cdot x))$$
$$=\prod_{\eta^d=1}(Y_i-Y_i(\eta\cdot X))$$
$$=Y_i^d+(-b_{i0})^dX^c+\psi_{it}(X,Y_i)$$

但し，$y_i(\eta\cdot x)=\sum a_{ij}x^{c_i+j}+\sum b_{ij}\eta^{c+j}x^{(c+j)/d}$

$Y_i(\eta\cdot X)=\sum b_{ij}\eta^{c+j}X^{(c+j)/d}$

$\psi_{it}\in\mathbb{C}\{X,Y_i\}$，$\mathrm{order}(\psi_{it})>1$ (weights $(\frac{1}{c},\frac{1}{d})$).

従って，

$$f_{it}(x,y)=(y-\sum_{j=0}^{p_i}a_{ij}x^{c_i+j})^d+(-b_{i0})^dx^c+\psi_{ij}(x,y-\sum_{j=0}^{p_i}a_{ij}x^{c_i+j}).$$

今，函数 f をある weights に関して homogeneous 分解したときの initial part を $\mathrm{In}(f)$ と書くことにすれば，

$\mathrm{In}(f_{it})=(y-a_{i0}x^{c_i})^d$ (weights $(\frac{1}{c_i d},\frac{1}{d})$) if $\Sigma_i\neq 0$.

$\mathrm{In}(f_{it})=y^d+(-b_{i0})^dx^c$ (weights $(\frac{1}{c},\frac{1}{d})$) otherwise.

$\mathrm{In}(u_t)=K$ (定数) (any weights).

$\lambda(t)\in S_{F_1}-A_{F_1}\neq\emptyset$ という仮定から，$\exists i$，$\Sigma_i\neq 0$。そうでなければ，

$$\mathrm{order}(F_{1\lambda(t)})=\mathrm{order}(u_t\cdot\prod_{i=1}^{k}f_{it})\geq\mathrm{degree}(f_1)=k\ (\tfrac{1}{c},\tfrac{1}{d})$$

すなわち

$$\mathrm{order}(F_{1\lambda(t)})\geq\mathrm{degree}(f_1)=1\quad(\tfrac{1}{a},\tfrac{1}{b})$$

となってしまう。

$$c_1=\min\{c_i\mid\Sigma_i\neq 0\}$$

と仮定してもよい。今 $c_i=c_1$ ならば常に $a_{i0}=a_{10}$ になると

とする。

$$m := \#\{i \mid c_i = c_1\}$$

とおく。そのとき，initial part の評価から

$$In(F_{1\lambda(t)}) = K \cdot y^{(k-m)d}(y - a_{10}x^{c_1})^{md}\ \left(\frac{1}{c_1 d}, \frac{1}{d}\right).$$

従って，$F_{1\lambda(t)}$ は単項式 $y^{b-1}x^{c_1}$ を項として含むことになるがこれは $F_{1\lambda(t)}$ が単項式 $x^i y^{b-1}$ $(i \geqq 1)$ を項として含まないことに反する。故に，$m = 1$ ならば，直ちに $S_{F_1} - A_{F_1} = \phi$ を得る。$m \geqq 2$ ならば，$\exists l\ (\neq 1)$, $c_l = c_1$, $a_{l0} \neq a_{10}$。このとき

$$\begin{aligned} cd &= (V(f_{11}) \cdot V(f_{1l}))_0 \\ &= (V(f_{1l}) \cdot V(f_{lt}))_0 \\ &= \mathrm{order}\,(f_{lt}(\tau^d, y_1(\tau^d))) \\ &= \mathrm{order}\,\Big(\prod_{\eta^d=1}(y_1(\tau^d) - y_l(\eta \cdot \tau^d))\Big) \\ &= \mathrm{order}\,((a_{10} - a_{0l})^d \tau^{c_1 d^2} + \text{the higher}) \\ &= c_1 d^2 \end{aligned}$$

しかし，これは $c_1 < c/d$ に反する。従って，$S_{F_1} - A_{F_1} = \phi$
一方 $S_{F_1} \supset A_{F_1}$ なので，$S_{F_1} = A_{F_1}$。よって，補題が示された

補題2. $b \leqq a$ のとき，　$S_{F_2} = A_{F_2}$
　　　$a \leqq b$ のとき，　$S_{F_2'} = A_{F_2'}$.

証明. $S_{F_2} - A_{F_2} \neq \phi$ と仮定すると，$\exists \lambda : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{C}^{\mu-1}$, real analytic, $\lambda(0)=0$, $\lambda(t)\in S_{F_2}-A_{F_2}$ $(\forall t>0)$。

$$f_2(x,y)=x\cdot\prod_{i=0}^{k}(y^d+\zeta_i x^c)=:\prod_{i=0}^{k}f_{2i}(x,y)$$

に対して, $F_{2\lambda(t)}$ (resp. $F'_{2\lambda(t)}$) の $\mathbb{C}\{x,y\}$ における既約分解

$$F_{2\lambda(t)}=\prod_{i=0}^{k}f_{it} \quad (\text{resp. } F'_{2\lambda(t)}=\prod_{i=0}^{k}f'_{it}) \quad (\forall t\in[0,\infty))$$

を得る。このとき,

$$(\mathbb{C}^2,V(f_{2i}))\simeq(\mathbb{C}^2,V(f_{it})) \quad (\text{resp. } (\mathbb{C}^2,V(f'_{2i}))\simeq(\mathbb{C}^2,V(f'_{it})))$$

$$(V(f_{2i})\cdot V(f_{2j}))_0=(V(f_{it})\cdot V(f_{jt}))_0$$

$$(\text{resp. } (V(f'_{2i})\cdot V(f'_{2j}))_0=(V(f'_{it})\cdot V(f'_{jt}))_0 .$$

以下, 議論は固定された parameter t に対して進行する。

まず, $b\leqq a$ の場合を考える。補題1と同じようにして, unit $u_{it}\in\mathbb{C}\{x,y\}$ を無視すれば

$$f_{it}(x,y)=(y-\sum_{j=0}^{p_i}a_{ij}x^{c_i+j})^d+(-b_{i0})^d x^c+\psi_{ij}(x,y-\sum_{j=0}^{p_i}a_{ij}x^{c_i+j})$$

$F_{2\lambda(t)}$ は単項式 y^{b+i} $(i\geqq 1)$ を項として含まないので,

$$f_{0t}(0,y)\equiv 0 .$$

$f_{0t}(x,y)$ は $f_{20}(x,y)=x$ に近いので,

$$f_{0t}(x,y)=u_{0t}\cdot x,$$

$u_{0t}\in\mathbb{C}\{x,y\}$ は unit である。ここで

$$f_{0t}(x,y):=x \quad , \quad u_t:=\prod_{i=0}^{k}u_{it}$$

とおきなおす。$\lambda(t)\in S_{F_2}-A_{F_2}\neq 0$ $(\forall t>0)$ という仮定から補題1のような exponent c_i を選べる。なぜなら

$$\mathrm{order}(F_{2\lambda(t)}) = \mathrm{order}\Big(u_t \cdot \prod_{i=0}^{k} f_{it}\Big) \geq \mathrm{degree}(x) + \sum_{i=1}^{k} \mathrm{degree}(f_{it})$$
$$= \frac{1}{c} + k \quad \left(\frac{1}{c}, \frac{1}{d}\right),$$

すなわち

$$\mathrm{order}(F_{2\lambda(t)}) \geq 1 \quad \left(\frac{1}{a+1}, \frac{a}{(a+1)b}\right).$$

$m := \#\{i \mid c_i = c_1\}$ とし，$c_i = c_1$ ならばいつでも $a_{i0} = a_{10}$ とすると，$F_{2\lambda(t)}$ は項 $K \cdot x y^{(k-m)d}(y - a_{10}x^{c_1})^{md}$ を含む。従って，$F_{2\lambda(t)}$ は単項式 $x^{c_1+1}y^{b-1}$ を含むことになるが，それは $F_{2\lambda(t)}$ が単項式 $x^{i+1}y^{b-1}$ $(i \geq 1)$ を含まないことに反する。従って，$m = 1$ ならば我々は直ちに結論 $S_{F_2} = A_{F_2}$ を得る。次に $m \geq 2$ ならば，$\exists \ell\,(\neq 1)$，$c_\ell = c_1$，$a_{\ell 0} \neq a_{10}$。補題1と同じ議論をすると，$c_1 = c/d$ となるがこれは矛盾である。従って $S_{F_2} = A_{F_2}$ を得る。よって，$b \leq a$ の場合の証明を得る．

次に $a \leq b$ の場合を考える。このとき

$$f_2(x, y) := y f_1(x, y) \qquad b \leq a$$

を考えれば十分である。この f_2 に対応して mini-transversal family F'_{2t} を考える。この F'_{2t} は単項式 $x^i y^b$ $(i \geq 1)$ を含まないことに注意せよ。f'_{0t} は f_{20} に近いので

$$f'_{0t}(x, y) = b'_{00} y + a'_{00} x + \text{the higher} \quad b'_{00} \neq 0.$$

Weierstraß の preparation theorem から

$$f'_{0t}(x, y) = u_{0t}(x, y)\Big\{y - \sum_{j=0}^{p_0} a_{0j} x^{c_0+j} + \sum_{j=0}^{\infty} b_{0j} x^{d_0+j}\Big\},$$

ここで，$d_0 \in \mathbb{N}$，$d_0 \geq c/d$ で，上の展開で初めの有限和があ

るときは，$c_0 \in N$，$1 \leqq c_0 + j < c/d$　$a_{00} \neq 0$ であるとする。
先の補題と同じようにして，unit $u_{it} \in \mathbb{C}\{x, y\}$ を無視して次を得る。

$$f'_{it}(x,y) = \Big(y - \sum_{j=0}^{p_i} a_{ij} x^{c_i+j}\Big)^d + (-b_{i0})^d x^c + \psi_{ij}\Big(x, y - \sum_{j=0}^{p_i} a_{ij} x^{c_i+j}\Big)$$

ここで

$$f'_{0t}(x,y) = y - \sum_{j=0}^{p_0} a_{0j} x^{c_0+j} + \sum_{j=0}^{\infty} b_{0j} x^{d_0+j}$$

とおきなおし，

$$u_{0t} = \prod_{i=0}^{k} u_{it}$$

とおく。$\lambda(t) \in S_{F_2'} - A_{F_2'} \neq \emptyset$ $(t > 0)$ という仮定から，
$\exists\, i$ $(0 \leqq i \leqq k)$，$a_{i0} \neq 0$ 。なぜなら，そうでなければ

$$\begin{aligned} \operatorname{order}(F'_{2\lambda(t)}) = \operatorname{order}\Big(u_t \cdot \prod_{i=0}^{k} f'_{it}\Big) &\geqq \operatorname{degree}(y) + \sum_{i=1}^{k} \deg(f'_{it}) \\ &= \frac{1}{d} + k \quad \Big(\frac{1}{c}, \frac{1}{d}\Big), \end{aligned}$$

すなわち

$$\operatorname{order}(F'_{2\lambda(t)}) \geqq 1 \quad \Big(\frac{b}{(b+1)a}, \frac{1}{b+1}\Big).$$

今　$c_g := \min\{c_i \mid a_{i0} \neq 0\ (0 \leqq i \leqq k)\}$ とおく。$c_g = c_i$ ならばいつでも $a_{g0} = a_{i0}$ であるとする。このとき，$c_g = c_0$ ならば，$F'_{2\lambda(t)}$ は項 $K \cdot y^{(k-m)d}(y - a_{00} x^{c_g})^{md+1}$ を含み，そうでなければ，項 $K \cdot y^{(k-m)d+1}(y - a_{g0} x^{c_g})^{md}$ を含む。これらの事実は f'_{it}，f'_{0t} のある weight に対する initial part を評価することからわかる。従って，いずれにしても $F'_{2\lambda(t)}$ は単項式 $x^{c_g} y^b$ を含むことになるが，これは $F'_{2\lambda(t)}$ が単項式

$x^i y^b$ ($i \geqq 1$) を含まないという仮定に反する。従って，$\#\{i \mid c_g = c_i\ (0 \leqq i \leqq k)\} = 1$ ならば，直ちに $S_{F_2'} = A_{F_2'}$ を得る。$\#\{i \mid c_g = c_i\ (0 \leqq i \leqq k)\} \geqq 2$ ならば，$\exists \ell\ (\neq g)$, $c_g = c_\ell$ $a_{g0} \neq a_{\ell 0}$。 このとき，$g = 0$ ならば

$$
\begin{aligned}
c &= (V(f'_{20}) \cdot V(f'_{2\ell}))_0 \\
&= (V(f'_{0t}) \cdot V(f'_{\ell t}))_0 \\
&= \mathrm{order}(f'_{\ell t}(\tau, y_0(\tau))) \\
&= \mathrm{order}(\prod_{\eta^d=1} (y_0(\tau) - y_\ell(\eta \cdot \tau))) \\
&= \mathrm{order}((a_{00} - a_{\ell 0})^d \tau^{c_0 d} + \text{the higher}) \\
&= c_0 d,
\end{aligned}
$$

ここで， $y_0(x) = \sum_{j=0}^{p_0} a_{0j} x^{c_0+j} - \sum_{j=0}^{\infty} b_{0j} x^{d_0+j}$ で $y_\ell(x)$ は補題1と同じとする。しかし，これは $c_0 < c/d$ に矛盾する。$g, \ell \neq 0$ ならば先の補題と同様にして，$c_0 = c/d$ を得るがこれもやはり矛盾である。よって，$S_{F_2'} = A_{F_2'}$ を得，$a \leqq b$ の場合の証明も完了する。

補題3. $\qquad S_{F_3} = A_{F_3}$

証明. $S_{F_3} - A_{F_3} \neq \emptyset$ と仮定する。$\exists$ real analytic curve $\lambda : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{C}^{\mu_3 - 1}$，$\lambda(0) = 0$，$\lambda(t) \in S_{F_3} - A_{F_3}$ ($\forall t > 0$)．このとき，f_3 の $\mathbb{C}\{x, y\}$ における既約分解

$$f_3(x,y)=xy\prod_{i=1}^{k}(y^d+\zeta_i x^c)=:\prod_{i=-1}^{k}f_{3i}(x,y)$$

に対応して，$F_{2\lambda(t)}$の既約分解

$$F_{3\lambda(t)}=\prod_{i=-1}^{k}f_{it}\qquad(\forall t\in[0,\infty))$$

を得，しかも

$$(\mathbb{C}^2,V(f_{2i}))\simeq(\mathbb{C}^2,V(f_{2j}))$$

$$(V(f_{2i})\cdot V(f_{2j}))_0=(V(f_{it})\cdot V(f_{jt}))_0 .$$

以下，一般性を失うことなく $b\leqq a$ と仮定できる。尚，以下の議論は固定されたparameter $t>0$ に対して進行する。

先の補題と同様にして，unit $u_{it}\in\mathbb{C}\{x,y\}$を無視すれば

$$f_{0t}(x,y)=y-\sum_{j=0}^{p_0}a_{0j}x^{c_0+j}+\sum_{j=0}^{\infty}b_{0j}x^{d_0+j}$$

$$f_{it}(x,y)=(y-\sum_{j=0}^{p_i}a_{ij}x^{c_i+j})^d+\sum_{j=0}^{\infty}b_{ij}x^{(c+j)/d}+\psi_{ij}(x,y-\sum_{j=0}^{p_i}a_{ij}x^{c_i+j})$$

を得る。$F_{3\lambda(t)}$は単項式y^{b+1+i} $(i\geqq1)$を含まないので，

$f_{-1t}(0,y)\equiv0$. $f_{-1t}(x,y)$ は $f_{3,-1}(x,y)=x$ に近いので

$$f_{-1t}(x,y)=u_{-1t}\cdot x\qquad u_{-1t}\in\mathbb{C}\{x,y\},\ \text{unit}$$

を得る。今

$$f_{-1t}(x,y)=x,\quad u_t=\prod_{i=-1}^{k}u_{it}$$

とおきなおすと，$\lambda(t)\in S_{F_3}-A_{F_3}\neq\emptyset$ $(t>0)$ という仮定より，$\exists i$, $a_{i0}\neq0$。 なぜなら，そうでなければ，

$$\begin{aligned}\mathrm{order}(F_{3\lambda(t)})=\mathrm{order}(u_t\cdot\prod_{i=-1}^{k}f_{it})&\geqq\mathrm{degree}(x)+\mathrm{degree}(y)\\&\quad+\sum_{i=0}^{k}\mathrm{degree}(f_{it})\\&=\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+k\quad\left(\frac{1}{c},\frac{1}{d}\right).\end{aligned}$$

すなわち

$$\operatorname{order}(F_{3\lambda(t)}) \geqq 1 \left(\frac{b}{ab+a+b}, \frac{a}{ab+a+b}\right).$$

今，$c_g := \min\{c_i \mid a_{i0} \neq 0\ (0 \leqq i \leqq k)\}$ とおき，$c_g = c_i$ ならば常に $a_{g0} = a_{i0}$ となるとする。このとき，$c_g = c_0$ ならば，$F_{3\lambda(t)}$ は項 $K \cdot xy^{(k-m)d}(y - a_{00}x^{c_g})^{md+1}$ を含み，そうでなければ，項 $K \cdot xy^{(k-m)d+1}(y - a_{g0}x^{c_g})^{md}$ を含む。従って，$F_{3\lambda(t)}$ は単項式 $x^{c_g+1}y^b$ を項として含むことになるが，これは $F_{3\lambda(t)}$ が項 $x^{i+1}y^b$ $(i \geqq 1)$ を含まないことに反する。従って $\#\{i \mid c_g = c_i\ (0 \leqq i \leqq k)\} = 1$ ならば，直ちに結論を得る。$\#\{i \mid c_g = c_i\ (0 \leqq i \leqq k)\} \geqq 2$ ならば，補題2と同様にして矛盾を得る。よって，いずれにしても $S_{F_3} = A_{F_3}$ を得る。

先の補題から次の定理を得る。

定理. f を孤立特異点を持つ corank 2 の quasihomogeneous function とすると，algebraic subset

$$S_F = \{t \in \mathbb{C}^{\mu-1} \mid \mu(F_t) = \mu(f)\}$$

は non-singular で，その次元は f の Newton boundary の上方及びその上にある有限次元ベクトル空間 $\mathbb{C}\{x, y\}/(\partial f/\partial x, \partial f/\partial y)$ の単項式基の個数に等しい。

証明. 斉藤[5]に依れば

$$f(x_1,\dots,x_n)=f_0(x_1,x_2)+x_3^2+\cdots+x_n^2$$

$f_0\in\mathfrak{m}^3\subset\mathbb{C}\{x,y\}$, f_0は孤立特異点をもつquasihomogeneousとできる。$f_0(x,y)$は次の単項式の組のうちいずれかを含む; $x^a, y^b\ (a,b\geqq 3)$, $x^{a+1}, xy^b\ (a,b\geqq 2)$, $x^{a+1}y, xy^{b+1}$ $(a,b\geqq 1)$。従って, f_0は先の$f_i\ (i=1,2,3)$のうちのいずれかと考えてよい。

$$G_i(x,y,z,t)=F_i(x,y,t)+z_1^2+\cdots+z_{n-2}^2 \quad i=1,3$$

$$G_2(x,y,z,t)=\begin{cases}F_2(x,y,t)+z_1^2+\cdots+z_{n-2}^2\\ F_2'(x,y,t)+z_1^2+\cdots+z_{n-2}^2\end{cases}$$

とおく。このとき, G_{jt}はfのmini-transversal familyとなる。$\mu(G_{jt})=\mu(f)\iff\mu(F_{jt})=\mu(f_0)$なので, 前の補題から, $S_{G_j}=A_{G_j}$。G_sをfの別のmini-transversal familyとし, $\tau:(\mathbb{C}_s^{\mu-1},0)\longrightarrow(\mathbb{C}_t^{\mu-1},0)$を$G_s$と$G_{jt}$の同値を与える双正則写像とする。この$\tau$によって, 解析同値$S_G\cong S_{G_j}$を得る。従って, S_GはA_{G_j}と同じ次元のnon-singular algebraic subsetである。故に定理は示された

この定理から初めに掲げた系は直ちに導びかれる。

参考文献

1. V.I. Arnol'd : Russian Math. Surveys 29 (1974)
2. ———— : Inv. math. 35 (1976).
3. A.M. Gabrielov & A.G. Kushnirenko : Func. Anal. i Ego Prilozheniya, Vol.9 (1975).
4. Lê Dũng Tráng & C.P. Ramanujan : Am. J. Math. 98 (1976)
5. K. Saito : Inv. math. 14 (1971)
6. B. Teissier : Proc. Sym. in Pure Math. 29 (1975).
7. E. Yoshinaga & M. Suzuki : Inv. math. 55 (1979).