数理解析研究所講究録
第475巻 1982年 79-94

有限G集合のカテゴリーのスパンと表現論への応用.

北大理 吉田知行 (Tomoyuki Yoshida)

§1. Introduction.

有限群の指標環を結ぶいくつかの写像がある. 以下Gを有限群, R(G)を有限群Gの指標環とする. $H \lneq K \leq G$, $g \in G$ に対し, 3種類の線型写像がある:

$$\mathrm{Ind}_H^K : R(H) \longrightarrow R(K) ; \alpha \longmapsto \alpha^K \quad (\text{誘導指標})$$

$$\mathrm{Res}_H^K : R(K) \longrightarrow R(H) : \beta \longmapsto \beta_H \quad (\text{制限指標})$$

$$\mathrm{Con}_H^g : R(H) \longrightarrow R(H^g) : \alpha \longmapsto \alpha^g \quad (\text{共役指標}).$$

ここで, $H^g = g^{-1}Hg$ であり, α^g は $\alpha^g(h^g) = \alpha(h)$ で定義される.

これらを組み合わせて, $H, K \leq G$, $x \in G$, $A \leq H^x \cap K$ に対し, 写像 $[H, x, A, K]$ を次で定義する.

$$[H, x, A, K] : R(H) \longrightarrow R(K) \quad ; \alpha \longmapsto {\alpha^x}_A{}^K.$$

このとき,

(*) $[H, hxk, A^k, K] = [H, x, A, K]$ $(h \in H,\ k \in K)$.

となる．さらに，$[H, x, A, K]$ と $[K, y, B, L]$ の合成 $R(H) \longrightarrow R(K) \longrightarrow R(L)$ を計算すると

$$(**)\ [H, x, A, K]\cdot[K, y, B, L] = \sum_{k \in H\backslash K/B^{y^{-1}}} [H, xky, A^{ky} \cap B, L]$$

$$\left(= \sum_{k \in K} \frac{|A^{ky} \cap B|}{|A|\cdot|B|} [H, xky, A^{ky} \cap B, L] \right)$$

となる．

今度は逆に，$H, K \leq G$ に対し，記号の集合

$$\{ [H, x, A, K] \mid x \in G,\ A \leq H^x \cap K \}$$

を生成系とし，上の(*)を関係式とするアーベル群を $\{H, K\}_G$ とする．さらに(**)によって bilinear map $\{H, K\}_G \times \{K, L\}_G \to \{H, L\}_G$ を定義する．この bilinear map は結合的であり，とくに $\{H, H\}_G$ は環になることが示される．加群としては，

$$\{H, K\}_G \cong \bigoplus_{g \in H\backslash G/K} \Omega(H^g \cap K).$$

ここで Ω は Burnside 環である．

$R(H)$ は $\{H, H\}_G$-加群である．もっと一般に，$\mathfrak{A}$ が G-functor なら，bilinear map $\mathfrak{A}(H) \times \{H, K\}_G \longrightarrow \mathfrak{A}(K)$: $(\alpha, [H, x, A, K]) \longmapsto \alpha^x{}_A{}^K$ は結合的 $(\alpha\cdot(\lambda\mu) = (\alpha\cdot\lambda)\mu)$ であ

り，とくに $\mathcal{A}(H)$ は $\{H,H\}_G$ 加群である．

次のことを目標とする．

目標．$k\otimes_{\mathbb{Z}}\{H,H\}_G$ の中心原始巾等元(c.p.i)を求める．ここで，k は可換環，$H\leq G$ である．

$k\otimes\{H,H\}_G$ の cpi は，G-functor $\mathcal{A}$ に対する $\mathcal{A}(H)$ の直和分解を与える．このことは，直既約加群のブロックへの分割や各種の induction 定理に関係がある．

§2．例と巾等元公式．

$\{H,H\}_G$ は，群 G に関するいろいろな環と関係がある．

(1) $H=1$ の場合．

$$\{1,1\}_G=\langle[1,x,1,1]\mid x\in G\rangle\cong\mathbb{Z}G\quad(\text{group ring}).$$

(K,R,F) を splitting p-modular system とする．$K=(R)$, $ch\,K=0$, $F=R/rad(R)$, $ch(F)=p$．$Irr(G)=\{\chi_1,\cdots,\chi_r\}$ とする．

$$KG\cong\prod_{i=1}^{r}M_{n_i}(K),\qquad n_i=deg\,\chi_i=\chi_i(1)$$

$cpi(KG)$ は次の形をしている．

$$e_i=\frac{\chi_i(1)}{|G|}\sum_{x\in G}\overline{\chi_i(x)}\,x$$

$cpi(RG)$ は次の形をしている．

$$e_B = \sum_{\chi_i \in B} e_i \qquad (B \in Bl(G))\ .$$

$cpi(FG)$ は，lifting idempotent により，e_B の mod p reduction $\bar{e}_B$ である．

（2）<u>$H=G$ の場合</u>

$\{G, G\}_G = \langle [G, 1, A, G] \mid A \le G \rangle \cong \Omega(G)$（Burnside 環）

対応は $[G, 1, A, G] \leftrightarrow [G/A]$ による．Burnside ring $\Omega(G)$ は，有限 G 集合のカテゴリーの直和と直積に関する Grothendieck ring である．

各 $S \le G$ に対し，環準同型 φ_S を

$$\varphi_S : k \otimes \Omega(G) \longrightarrow k : [X] \longmapsto |X^S|\ ,$$

（X^S は固定点集合）で定義すると，k が $|G|$-torsion free なら

$$\varphi = (\varphi_S) : k \otimes \Omega(G) \rightarrowtail \prod_{(S) \in C_G} k \qquad (\text{ring mono})$$

である．$|G|^{-1} \in k$ なら，φ は同型である．（C_G は，G の部分群の共役類である）．

$|G|^{-1} \in k$ のとき，$cpi(k \otimes \Omega(G))$ は次の形をしている．

$$e_{G,S} = \frac{1}{|N_G(S)|} \sum_{D \le S} |D| \mu(D, S) [G/D] \qquad ((S) \in C_G)$$

ここで，μ は subgroup lattice の Möbius function．

$\varphi_T(e_{G,S}) = 1$ if $S \underset{G}{\sim} T$，$\varphi_T(e_{G,S}) = 0$ if $S \underset{G}{\not\sim} T$.

$p^{-1} \notin k$, $|G|_{p'}^{-1} \in k$ のとき，$\mathrm{cpi}(k \otimes \Omega(G))$ は

$$e^{p}_{G,S} = \sum_{(T) \in C_G : O^p(T) \trianglerighteq S} e_{G,S} \qquad ((S) \in C_G,\ O^p(S) = S).$$

ここで，$O^p(T) = \langle x \in T \mid x$ は p'-element $\rangle$.

(3) $H \trianglelefteq G$ の場合.

この場合，$\{H, H\}_G$ は twisted group ring $\Omega(H) \circ \mathbb{Z}[G/H]$ である．ただし，G/H を共役によって $\Omega(H)$ に作用させる．

(4) Hecke 環との関係.

$$\omega : \{H, K\}_G \longrightarrow \mathbb{Z}[H \backslash G / K] : [H, x, A, K] \mapsto |H^x \cap K : A| \cdot (HxK)$$

は epi で，$\omega(\lambda\mu) = \omega(\lambda)\omega(\mu)$ である．とくに Hecke 環 $\mathbb{Z}[H \backslash G/H]$ $(\cong \mathrm{End}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}[H \backslash G]))$ は $\{H, H\}_G$ の剰余環である．

Burnside ring の巾等元公式は2つの応用をもつ．（似たことは group ring の場合にも言える）．

(a) 係数の整数性.

$O^p(S) = S \leq G$ のとき，$e^{p}_{G,S}$ における $[G/H]$ の係数は p-local integer である．とくに，$S = H = 1$ のとき，その係数は $|G|^{-1} \sum_S \mu(1, S)$ （S は G の p-subgp 全体を動く）となる．よって $\sum_S \mu(1, S) \equiv 0 \pmod{|G|_p}$. これは，$p$-subgroups の lattice の Euler 標数に関する Brown と Quillen の定理を与

える.

(b) Induction 定理への応用.

$\mathbb{Z}_{(p)}$ を $\mathbb{Z}$ の $p\mathbb{Z}$ での局所化とする. 巾等元公式を観察すると, $e^p_{G,S} \in \mathrm{Ind}^G_H(\mathbb{Z}_{(p)} \otimes \Omega(H))$ となることがわかる. ここで, $O^p(S) = S \trianglelefteq H \leq G$, $H/S \in Syl_p(N_G(S)/S)$ とする. 一方, 指標環 $R(G)$ は $\Omega(G)$ 加群で ($\theta \cdot [G/H] := \theta_H{}^G$), noncyclic $T \leq G$ に対し, $e_{G,T} \cdot R(G) = 0$ となることがわかる. よって

$$\mathbb{Z}_{(p)} \otimes R(G) = \bigoplus_{(S) \in C_G;\ S \text{は cyclic } p'\text{-gp.}} \mathbb{Z}_{(p)} \otimes e^p_{G,S} \cdot R(G)$$

$$= \sum \left\{ \mathrm{Ind}^G_H(\mathbb{Z}_{(p)} \otimes R(H)) \;\middle|\; H \text{は hyper } p\text{-elem} \right\}$$

これより, 指標環に関する hyper-elementary induction が得られる.

§3. 主要定理.

G を有限群, $H \leq G$, (K, R, F) を splitting p-modular system とする.

$S \leq G$, $N := N_G(S)$, $\bar{N} = N/S$, $\alpha \in \mathrm{Irr}(\bar{N})$, $b \in Bl(\bar{N})$ に対し, $K \otimes \{H, H\}_G$ の元 $E_S(H)$, $E^p_S(H)$, $E_{S,\alpha}(H)$, $E^p_{S,b}(H)$ を次のように定義する. ($^\forall T \leq G$ に対し, $WT := N_G(T)/T$ とおいた).

$$E_S(H) := \frac{1}{|N|\cdot|H|}\sum_{\substack{A\le S\\ g\in G:\,S^g\le H}} |A|\,\mu(A,S)\,[H,1,A^g,H]$$

$$E^p_S(H) := \sum_{(T)\in \mathcal{C}_G:\,O^p(T)=S} E_T(H) \qquad （ただし\ O^p(S)=S）$$

$$E_{S,\alpha}(H) := \frac{\alpha(1)}{|H|\cdot|N|^2}\sum_{\substack{A\le S\\ g\in G:\,S^g\le H}}\sum_{n\in N}\alpha(n^{-1})\,|A|\,\mu(A,S)\,[H,n^g,A^g,H]$$

$$E^p_{S,b}(H) := \sum_{\substack{(T)\in \mathcal{C}_G\\ :\,O^p(T)=S}}\ \sum_{\substack{b'\in Bl(W_T)\\ :\,b'^{\bar N}=b}}\ \sum_{\alpha\in b'} E_{T,\alpha}(H) \qquad (O^p(S)=S)$$

最後の $b'^{\bar N}=b$ は，Brauer hom $Z(F\bar N)\xrightarrow{Z(FN_{\bar N}(\bar T))} Z(FN_{\bar N}(\bar T)/\bar T)$ $\cong Z(W_T)$ によって $b'\in Bl(W_T)=Bl(N_{\bar N}(\bar T)/\bar T)$ と $b\in Bl(\bar N)$ とが対応することを意味する。

$E_S(H)\neq 0 \iff S\le_G H$,

$E^p_S(H)\neq 0 \iff S\le_G H$.

$E_{S,\alpha}(H)\neq 0 \iff \alpha\le \pi_{(H\backslash G)^S}$ （π は置換表現の指標），

$E^p_{S,b}(H)\neq 0 \iff \exists\alpha\le\pi_{(H\backslash G)^S}$ s.t. $\alpha\in b$.

<u>定理A</u>．任意の可換環 k に対し，

$$k\otimes\Omega(G)\longrightarrow Z(k\otimes\{H,H\}_G) : [A\backslash G]\mapsto \sum_{g\in A\backslash G/H}[H,1,A^g,H,H]$$

は環準同型で，$e_{G,S}$ $(\in cpi(\mathbb{Q}\otimes\Omega(G)))$，$e^p_{G,S}$ $(\in cpi(\mathbb{Z}_{(p)}\otimes\Omega(G)))$ の像が $E_S(H)$，$E^p_S(H)$ である．

<u>定理B</u>. $cpi(K\otimes\{H,H\}_G)=\{E_{\xi,\alpha}(H)\neq 0 \mid (\xi)\in C_G,\ \alpha\in Irr(W\xi)\}$

<u>定理C</u>. $cpi(R\otimes\{H,H\}_G)=\{E^p_{\xi,b}(H)\neq 0 \mid (\xi)\in C_G,\ O^p(\xi)=\xi,\ b\in Bl(W\xi)\}$

$cpi(F\otimes\{H,H\}_G)=\{\overline{E} \mid 0\neq E\in cpi(R\otimes\{H,H\}_G)\}$.

$E^p_{\xi,b}(H)$ における $[H,x,A,H]$ の係数は次で与えられる.

$$(*)\quad \frac{|A|}{|N_H(A)|}\sum_{\substack{A\leq T\leq H\\ :O^p(T)\underset{G}{\sim}\xi}}\ \sum_{\substack{b'\in Bl(WT)\\ :b'\overset{\bar{N}'}{\sim}b}}\ \sum_{n\in N_G(T)\cap HxN_H(A)}\frac{\mu(A,T)}{|N_G(T)|}\rho_{b'}(n^{-1})\in R$$

ここで $\rho_{b'}=\sum_{\alpha'\in b'\cap Irr(WT)}\alpha'(1)\alpha' \in R(WT)$, $\bar{N}'=W.T$.

とくに, $\xi=1$, $A=1$, $\overset{=\{\chi\}}{B}\in Bl(G)$ の defect 0 のとき,

$$\frac{\chi(1)}{|G|}\cdot\frac{1}{|H|}\sum_{y\in HxH}\chi(y)\in R \quad \therefore \sum_{y\in HxH}\chi(y)\in|H|_p\cdot\mathbb{Z}.$$

(最後の結果は, $|G:C_G(y)|\cdot\chi(y)/\chi(1)\in\mathbb{Z}$ から簡単に出る).

巾等元公式(定理B, C)は新しい型の induction 定理を与えるかもしれない. $\{G,G\}_G\cong\Omega(G)$ で, $E_{\xi,\alpha}(G)=0$ if $\alpha\neq 1_{W\xi}$ だから, $H=G$ の場合は古典的な結果 (Dress, Artin, Brauer, …) を与える.

$(\mathfrak{A},\tau,\rho,\sigma)$ を $\mathbb{C}$ 係数の G-functor とする. $\xi\leq G$ に対し, $W\xi(=N_G(\xi)/\xi)$ は共役によって $\mathfrak{A}(\xi)$ に作用している.

したがって直和分解 $\mathcal{A}(S)=\bigoplus_\alpha \mathcal{A}(S)_\alpha \quad (\alpha\in \mathrm{Irr}(WS))$

を得る．$\{H,H\}_G$ は $\mathcal{A}(H)$ に，$\theta\cdot[H,x,A,H]=\theta^{x}{}_{A}{}^{H}$ によ

って作用しているから，直和分解

$$\mathcal{A}(H)=\bigoplus_{(S)\in C_G}\ \bigoplus_{\alpha\in \mathrm{Irr}(WS)} \mathcal{A}(H)_{S,\alpha},$$

$$(ここで,\ \mathcal{A}(H)_{S,\alpha}=\mathcal{A}(H)\cdot E_{S,\alpha}(H))$$

を得る．このとき次が言える．

$$\mathcal{A}(H)_{S,\alpha}\subseteq\{\varphi^{gH}\mid \varphi\in\mathcal{A}(S)_\alpha,\ g\in G,\ S^g\subseteq H\}.$$

$\mathcal{A}=\mathbb{C}\otimes R$（$R$ は指標環から得られる G-functor）の場合，$\theta\in\mathbb{C}\otimes R(H)$ は

$$(**)\qquad \theta=\sum_{(S),\alpha}\theta_{S,\alpha},\qquad \theta_{S,\alpha}:=\theta\cdot E_{S,\alpha}(H),\ \alpha\in\mathrm{Irr}(WS),\ (S)\in C_G$$

と分解される．$\mathrm{supp}\,\theta_{S,\alpha}\subseteq\{x^g\in H\mid g\in G,\ \langle x\rangle=S\}$，$\theta_{S,\alpha}\in\sum\{\mathrm{Im}(\mathrm{Ind}_T^H)\mid T\leq H,\ T\geq_G S\}$ だから $(**)$ は Artin の定理を含んでいる．したがっていつ $\theta_{S,\alpha}\neq 0$ かに興味があるが，$S\not\leq_G H$ の場合，S が noncyclic の場合，$\mathrm{Ker}\,\alpha\not\supseteq C_G(S)$ の場合に，$\theta_{S,\alpha}=0$ となる．また $N_G(S)\leq H\trianglelefteq G$ で $\alpha\neq 1$ のときや，θ が有理指標で $\alpha\neq 1$ のときも $\theta_{S,\alpha}=0$ となる．

これに似た応用をもう１つあげておく．$E^p_{S,B}(H)$ における $[H,x,H,H]$ $(x\in N_G(H))$ の係数は，

$$O^p(H)=S\ \Rightarrow\ \frac{1}{|WH|}\sum_{b\in Bl(WH):\,b^{\bar N}=B}\rho_b(x^{-1}),$$

$$O^p(H) \not\sim_G \S \Rightarrow 0$$

である。また，$H, L \leq G$，$x \in G$，$A \leq H^x \cap L$ に対し，

$$E_{\S,\alpha}(H)\cdot[H, x, A, L] = [H, x, A, L]\cdot E_{\S,\alpha}(L)$$

となる。さて，R 上の G-functor $\mathcal{G}$ に対し，$H \longmapsto \mathcal{G}(H)\cdot E_{\S,B}(H)$ は $\mathcal{G}$ の direct summand である。$\mathcal{G}$ が直既約と仮定すると，ある $\S \leq G$ と $B \in Bl(W\S)$ があって $\mathcal{G} = \mathcal{G}\cdot E_{\S,B}$ となる。このとき，$^\forall \theta \in \mathcal{G}(H)$ に対し，

$$\theta = \theta\cdot E^p_{\S,B}(H) \equiv \begin{cases} 0 & \text{if } O^p(H) \not\sim_G \S \\ \theta\cdot\sum_{b \in Bl(WH) : b^{W\S} = B} e_b & \text{if } O^p(H) = \S \end{cases}$$
$$(\mathrm{mod}\ \mathcal{I}(H)).$$

ここで $e_b \in Z(R[WH])$ は b に対応する cpi。ただし $\mathcal{I}(H) := \sum_{A \subsetneq H} \mathcal{G}(A)^H$ とした。したがって，

$$O^p(H) \not\sim_G \S \Rightarrow \widetilde{\mathcal{G}}(H) = 0$$

$$\widetilde{\mathcal{G}}(H) \text{ の simple } WH\text{-factor} \in \bigcup\{b \in Bl(W) \mid b^{W\S} = B\}.$$

例えば，V を直既約 FG 加群 $\in B \in Bl(G)$，$C_V(H) := \{v \in V \mid vh = v\ ^\forall h \in H\}$ とすれば，

$$(\ast\ast\ast)\begin{cases} H \text{ が } p \text{ 部分群でない} \Rightarrow C_V(H) = \sum\{\mathrm{Im}(Tr_A^H) \mid A \subsetneq H\}, \\ C_V(H)/\sum_{A \subsetneq H} \mathrm{Im}(Tr_A^H) \text{ の simple factor} \in \bigcup\{b \in Bl(WH) \mid b^G = B\} \end{cases}$$

ここで $Tr_A^H : C_V(A) \to C_V(H) : v \longmapsto \sum_{h \in A\backslash H} vh$.

§4. Spans.

定義. pull-back をもつ small category $\mathcal{C}$ に対し, span と呼ばれるカテゴリー $\mathcal{S}_p(\mathcal{C})$ を次で定義する.

(i) $Obj(\mathcal{S}_p(\mathcal{C})) = Obj(\mathcal{C})$

(ii) $X, Y \in \mathcal{C}$ に対し, $\mathcal{S}_p(\mathcal{C})$ における X から Y への morphism は, $[f', f''] := (X \xleftarrow{f'} A \xrightarrow{f''} Y)$ の形をしている. ただし,

$$(X \xleftarrow{f'} A \xrightarrow{f''} Y) = (X \xleftarrow{g'} B \xrightarrow{g''} Y)$$

$$\Leftrightarrow \exists h : A \xrightarrow{\simeq} B \quad s.t. \quad \begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "f'"'] \arrow[dr, "f''"] \arrow[d, "h"] & \\ X \arrow[r, phantom, "\Omega"] & B \arrow[l, "g'"] \arrow[r, "g''"'] \arrow[r, phantom, "\Omega"] & Y \end{tikzcd}$$

とする.

(iii) $[f', f''] : X \leftarrow A \rightarrow Y$ と $[g', g''] : Y \leftarrow B \rightarrow Z$ の合成を, $f \circ g = [\hat{g}' \circ f', \hat{f}'' \circ g''] : X \leftarrow C \rightarrow Z$, ここで,

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\hat{f}''"] \arrow[d, "\hat{g}'"'] \arrow[dr, phantom, "p.b"] & B \arrow[r, "g''"] \arrow[d, "g'"] & Z \\ A \arrow[r, "f''"'] \arrow[d, "f'"'] & Y & \\ X & & \end{tikzcd} \qquad (p.b = \text{pull-back})$$

によって定義する.

$\mathcal{S}_f^G$ を有限 G 集合のカテゴリーとする. $\mathcal{S}_p(\mathcal{S}_f^G)$ は bi-product をもち, したがって semi-additive である. 可換環

kに対し，係数拡大 $(k \otimes \mathcal{S}_p(\mathcal{S}_f^G))(X, Y) := k \otimes_{\mathbb{N}} \mathcal{S}_p(\mathcal{S}_f^G)(X, Y)$ によって k-additive category $k \otimes \mathcal{S}_p(\mathcal{S}_f^G)$ を得る．

$$k\{X, Y\} := k \otimes_{\mathbb{N}} \mathcal{S}_p(\mathcal{S}_f^G)(X, Y), \quad (X, Y \in \mathcal{S}_f^G)$$

とおく．加群としては，$k\{X, Y\} \cong k \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega(\mathcal{S}_f^G / X \times Y)$．$\Omega$ は $+$ と $\times$ に関する Gro 環である．

$k\{H\backslash G, K\backslash G\}$は，

$$[H, x, A, K] := [f', f'']: H\backslash G \xleftarrow{f'} A\backslash G \xrightarrow{f''} K\backslash G$$
$$Hx \longleftarrow A \longmapsto K$$

$(x \in G, A \leq H^x \cap K)$ の形の元によって生成される．積は§1で述べたものと一致する．

<u>定義</u>．permutation kG-modules と kG-maps のカテゴリーを Hecke カテゴリーと言い，$\mathcal{H}_{kG}$ と書く．

kG-map $f: kX \longrightarrow kY \ (X, Y \in \mathcal{S}_f^G)$ は行列の形で表わせる．$f(x) = \sum_{y \in Y} f_{xy}\, y$ とした時，f の行列形は $(f_{xy})_{x \in X, y \in Y}$ である．f が kG-hom という条件は，$f_{xy} = f_{xg, yg} \ (g \in G)$ と表わせる．とくに $\mathcal{H}_k \cong \underline{\underline{Mat}}_k \cong k \otimes \mathcal{S}_p(\mathcal{S}_f)$．

C_G を G の部分群の共役類とする．各 $S \leq G$ に対し，additive functor $\Psi_S: \mathbb{Z} \otimes \mathcal{S}_p(\mathcal{S}_f^G) \longrightarrow \mathcal{H}_{\mathbb{Z}[WS]}$ を，

$$X \longmapsto \mathbb{Z}[X^S],$$

$$(X \xleftarrow{f'} A \xrightarrow{f''} Y) \longmapsto \left(|f'^{-1}(x) \cap f''^{-1}(y) \cap A^S|\right)_{x \in X^S, y \in Y^S}$$

によって定義する．さらに，

$$\Psi = (\Psi_\xi) : \mathbb{Z} \otimes S_p(S_f{}^G) \longrightarrow \prod_{(\xi) \in C_G} H_{\mathbb{Z}[W\xi]}$$

とする．

<u>定理1</u>．Ψは埋め込みである．即ち，

$$\psi : \mathbb{Z}\{X, Y\} \rightarrowtail \prod_{(\xi) \in C_G} Hom_{\mathbb{Z}[W\xi]}(\mathbb{Z}[X^\xi], \mathbb{Z}[Y^\xi]).$$

さらに Coker ψ は torsion 群．

この定理を証明するために次の定理を $\mathcal{E} = S_f{}^G/X \times Y$ などに適用する．

$\mathcal{E}$を small S_f-topos，$\Omega(\mathcal{E})$を $+$ と $\times$ に関する Gro 環（これを$\mathcal{E}$の Burnside 環という），$\mathcal{I}$を$\mathcal{E}$の連結な object の同型類の完全代表系とする．各 $I \in \mathcal{I}$ に対し，

$$\varphi_I : \Omega(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbb{Z} : [X] \longmapsto |\mathcal{E}(I, X)|$$

$$\varphi = (\varphi_I) : \Omega(\mathcal{E}) \longrightarrow \prod_{I \in \mathcal{I}} \mathbb{Z}$$

とすると，

<u>定理2</u>．φは ring hom でしかも mono．

前半はトポスの基本的結果から出る．mono を示すには，

$$X, Y \in \mathcal{E}, \quad |\mathcal{E}(I, X)| = |\mathcal{E}(I, Y)| \quad \forall I \in \mathcal{I} \Rightarrow X \cong Y$$

を示せばよい．そのために，$\forall A \in \mathcal{E}$ に対し，$\#\{f : A \rightarrowtail X\} = \#\{g : A \rightarrowtail Y\}$ であることを，Aの商対象の個数（$\leq |Sub(\Omega^A)|$）に関する帰納法で証明すればよい．

定理1より，cpi$(\mathbb{C}\otimes\mathcal{S}_p(\mathcal{S}_f^G)) \overset{\Phi}{\rightleftarrows}$ cpi$(\prod_{(\varsigma)}\mathcal{H}_{\mathbb{C}[W\varsigma]}) \longleftrightarrow$ $\bigcup\{\mathrm{Irr}(W\varsigma) \mid (\varsigma)\in C_G\}$ となる．Φで写してみれば，定理Bの$\{E_{\varsigma,\sigma}(H) \mid H\le G\}$が$\mathbb{C}\otimes\mathcal{S}_p(\mathcal{S}_f^G)$のcpiを与えることがわかる，こうして定理Bが証明される．

<u>定義</u>．$\varsigma\le G$，$N=N_G(\varsigma)$，$W\varsigma := N/\varsigma$とする．functor $\mathcal{S}_f^G \xrightarrow{\mathrm{res}} \mathcal{S}_f^N \xrightarrow{\mathrm{pr}} \mathcal{S}_f^{W\varsigma}$: $X \longmapsto X|_N \longmapsto X^\varsigma$ から誘導されたspanやHeckeカテゴリーの間のfunctorを<u>Brauer functor</u>という．$\mathrm{Br}:\mathcal{S}_p(\mathcal{S}_f^G)\longrightarrow\mathcal{S}_p(\mathcal{S}_f^{W\varsigma})$は常にfunctorである．

<u>Lem</u>．$\mathrm{ch}(k)=p$，ςがp-subgpのときに限り，$\mathrm{Br}:\mathcal{H}_{kG}\longrightarrow\mathcal{H}_{k[W\varsigma]}$はfunctorであって，ring hom

$$\begin{array}{ccc} \beta:\ Z(kG) & \longrightarrow & Z(k[W\varsigma]) \\ \wr\| & & \wr\| \\ Z(\mathcal{H}_{kG}) & & Z(\mathcal{H}_{k[W\varsigma]}) \end{array}$$

を誘導する．さらに，sをBrauer準同型とすれば，

$$\begin{tikzcd} Z(kG) \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr, "s"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & Z(k[W\varsigma]) \\ & Z(kN) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

(K, R, F) を splitting p-modular system とする。定理２より，

$$Z(R\otimes S_p(S_f G)) \xrightarrow{Z(\Psi)} \bigoplus_{(\xi)\in C_G} Z(H_{R[W\xi]}) \cong \bigoplus_{(\xi)\in C_G} Z(R[W\xi])$$

$$\xrightarrow{\sim} \bigoplus_{(\xi)\in C_G} \bigoplus_{b\in Bl(W\xi)} e_b\cdot Z(R[W\xi]),$$

上の補題により，$\mathrm{cpi}(R\otimes S_p(S_f G))$ は，定理Ｃの $E^p_{\xi,b}$ の形の $Z(K\otimes S_p(S_f G))$ の元の和であることがわかる。

<u>補題</u>． $\gamma : k\otimes \Omega(G) \longrightarrow Z(k\otimes S_p(S_f G))$

$$[A] \longmapsto \gamma(A) = (\gamma(A)(X))_{X\in S_f G},$$

$$\gamma(A)(X) = [pr, pr] : X \xleftarrow{pr} A\times X \xrightarrow{pr} X$$

は ring hom で mono．

$e_{G,\xi}$ や $e^p_{G,\xi}$ の γ による像が定理Ａの E_ξ や E^p_ξ である．

<u>定理３</u>． $|G|_p^{-1}\in k$， $\xi = O^p(\xi)\leq G$ のとき，Brauer functor によって，

$$E^p_\xi\cdot(k\otimes S_p(S_f G)) \cong E^p_1\cdot(k\otimes S_p(S_f W\xi)).$$

さて，定理Ｃを証明するには，$|\mathrm{cpi}(E^p_\xi\cdot(R\otimes S_p(S_f G)))| \geq |Bl(W\xi)|$を示せばよい．定理３より，$\xi = 1$ の場合に証明す

れば良い。"既約 $E_1^{p}(F\otimes \mathcal{S}_p(\mathcal{S}_f^{G}))$-module" とは F 上のコホモロジー的 G-functor のことであり、c_{FG} がコホモロジー的 G-functor に作用するから、既約 $E_1^{p}(F\otimes \mathcal{S}_p(\mathcal{S}_f^{G}))$-module は $|Bl(G)|$ 個のブロックに分割される。これより、$cpi(E_1^{p}(F\otimes \mathcal{S}_p(\mathcal{S}_f^{G})))=cpi(E_1^{p}(F\otimes \mathcal{S}_p(\mathcal{S}_f^{G})))=|Bl(G)|$ となり定理 C が示される。