数理解析研究所講究録
第 475 巻 1982 年 117-122

Grothendieck ring と a lifting ring map

愛媛大(理) 宮本雅彦
(Masahiko Miyamoto)

§0 序　　環 A に対し，各有限生成左 A-加群 M を生成元とし，A-加群の short exact sequence $0\to M'\to M\to M''\to 0$ により 加法 $[M]=[M']+[M'']$ を定義してできる加法群を A の Grothendieck group と呼び $G_0(A)$ で表わす。以下 G を有限群，R を代数体 K の代数的整数全体の環とする。このとき 群環 RG, KG の Grothendieck group $G_0(RG)$, $G_0(KG)$ は自然な tensor product により環となることが Swan (1963) によって示されている。ここでの目的は このGrothendieck ring $G_0(RG)$ の構造を求めることである。

容易に $G_0(KG)$ は G の K-character ring と同型であることがわかる。又 自然な全射が $\theta([M])=K\otimes_R M$ により，$\theta: G_0(RG)\to G_0(KG)$ と与えられるので，加法群として，$G_0(RG)\cong \mathrm{Ker}\,\theta\oplus G_0(KG)$ と同型となる。$G_0(RG)$ の加法群としての構造は 最初に Heller-Reiner (1964) により，特徴付けが与えられてはいるが，非常にわかりにくいものでした。しかし 最近，H. Lenstra (1981) が Abelian group G に対して 非常に簡単な表示を得ました。

(H. Lenstra)　　$G_0(RG) \cong \oplus_{\chi \in Y}(\mathbb{Z} \oplus Cl(R\langle\chi\rangle))$

ここで，Yは Gのcharacterの K-共役類の代表系，$R\langle\chi\rangle$は $R(\chi(g) : g \in G, \frac{1}{|G/\mathrm{Ker}\,\chi|})$，$Cl(R\langle\chi\rangle)$は $R\langle\chi\rangle$の ideal class group を表わすものとする。

既約分解は KG-加群では自然に起こりますが，RG-加群では一般に起こりません。H. Lenstraの結果は適当な同型をとれば，$G_0(RG)$は KGの分解に従うことを示しています。ここでの才一の結果として，この結果が，nilpotent group まで拡張できることを示しましょう。

定理 1.　　nilpotent group G に対して，同型

$G_0(RG) \cong \oplus_{\chi \in Y} G_0(RG\langle e(\chi)\rangle) \cong \oplus_{\chi \in Y} G_0(\Gamma e(\chi))$ が成り立つ。

ここで，$e(\chi)$ は χに対応する KGの central idempotent，$RG\langle e(\chi)\rangle$ は $RGe(\chi)(1/|G/\mathrm{Ker}\,\chi|)$，$\Gamma$は RGを含む KGのある maximal R-order を表わすものとする。

次に $G_0(RG)$の積構造を考える。先に述べたように，自然な全射 $\theta : G_0(RG) \to G_0(KG)$ が存在するので，加群としての単射 $\omega : G_0(KG) \to G_0(RG)$ で $\omega \cdot \theta = 1_{G_0(KG)}$ となるものが存在する。それゆえ，積を決定するためには，$G_0(RG) = \mathrm{Ker}\,\theta \oplus \mathrm{Im}\,\omega$ と分解してそれぞれの積表示を得ればよいわけである。

$G_0(RG)$の積構造は　これまで非常に簡単な群に対してしか求められていなかったが，その手段の重要な所は，ωをしてそれ自身 ring homo. となるものを見つけ出すことであった。

予想　　任意の群Gに対し，$\theta: G_0(RG)\longrightarrow G_0(KG)$ は ring homo として split する。

この予想は　Gが nilpotent group なら成り立つ。

定理2.　　Gを nilpotent group とすると，$\theta: G_0(RG)\to G_0(KG)$ は ring homo. として split する。　又　Kが　Gの splitting field なら，任意の有限群に対して，θは split する。

§1.　定理1の証明の概略.

Gを nilpotent group とし，$G=\prod_p G_p$ をGの各 Sylow p-部分群G_pの直積分解とする。　Gの位数の素因子の適当な集合Sに対し，$G_S=\prod_{p\in S}G_p$ と書く。このとき $G\to G_S\to G$ の homomorphisms によって導かれる functor を N_S と書く。　即ち，RG-加群Mに対して，N_SMはR-加群としてMと一致し，$p\in S$に対して　G_pは　Mと同じ作用をし，$p\notin S$なるG_pは　Mに trivial な作用をするものである。容易に，

N_Sは exact functor であり，$G_0(RG) \to G_0(RG_S) \to G_0(RG)$ を導く。一方　Gの任意の既約 character χに対し，G_Sは　正規部分群なので　χ_{G_S} の成分を　$G \to G_S$ により，Gの既約 character と見て　χ_S を定義できる。 Grothendieck groups の元を区別するために，それぞれ，$G_0(RG)$の元は $[M, G]$，$G_0(RGe(\chi))$ の元は $[M, \chi]$，そして $G_0(RG\langle e(\chi)\rangle)$ の元は $[M, \langle\chi\rangle]$ で表わすとする。

次の準同型を考えよう。　Mをある RG-加群でかつ，$RGe(\chi)$-加群とする。　$\pi(\chi)$を $|G/\mathrm{Ker}\,\chi|$ を割る素数の集合とする。

$$\Psi(M) = \sum_{S \subseteq \pi(\chi)} [N_S M, \langle\chi_S\rangle] \in \oplus_{\chi' \in Y} G_0(RG\langle e(\chi')\rangle)$$

と定義すると，N_S は exact functor なので　自然に拡張して，

$$\Psi : G_0(RG) \to \oplus_{\chi' \in Y} G_0(RG\langle e(\chi')\rangle)$$

を得る。　一方　$\phi : G_0(RG\langle e(\chi)\rangle) \to G_0(RG)$ を

$$\phi([M, \langle\chi\rangle]) = \sum_{S \subseteq \pi(\chi)} (-1)^{|\pi(\chi) - S|} [N_S M, G]$$

と定義すれば，容易に　Ψの逆写像 Φ を得る。

$$\Phi : \oplus_{\chi' \in Y} G_0(RG\langle e(\chi')\rangle) \to G_0(RG)$$

これにより　同型　$G_0(RG) \cong \oplus_{\chi' \in Y} G_0(RG\langle e(\chi')\rangle)$　を得る。

§2.　定理2の証明の概略

Gを nilpotent group とする。　もしGが faithful primitive irreducible K-加群 Wをもつとすると，Gは高々 index 2 の normal cyclic group $\langle a\rangle$ of order n を持ち，$W \cong K(\zeta_n)$

となる。ここで ζ_n は1の原始 n 一乗根で，a は $K(\zeta_n)$ の上に ζ_n の積と作用する。しかも $R(\zeta_n)$ は G の作用に不変となる。このことを使うと，G の各既約 K－加群 V に対して，G のある部分群 H と高々指数が2の部分群 $\langle a, K_{G}W\rangle$ と primitive irreducible KH－加群 $W \cong K(\zeta_n)$ とがあって，$W^G \cong V$ となる。ここで，$\partial: G_0(RG) \to G_0(KG)$ を split する ring homo.（a lifting ring map）を次のように定義する。

$$
\begin{array}{cccc}
\pi_G: & G_0(KG) & \longrightarrow & G_0(RG) \\
 & \Downarrow & & \Downarrow \\
 & [V] & \longrightarrow & [R(\zeta_n)^G]
\end{array}
$$

このとき，これが lifting ring map であるように，π が定義可能であることを示さなければならない。そのために次のことをそれぞれ示す。

（I）　各 V に対して H と $W = K(\zeta_n)$ の取り方によらず $\pi([V])$ が定義できることを示す。

（II）　G の部分群 $N_1 \geq N_2$ と N_1－加群 V_1，N_2－加群 V_2 に対しても，$\pi_{N_1}(V_1)$，$\pi_{N_2}(V_2)$ が定義されるが，次が成り立つ，即ち，$\{\pi_N\}$ は G－functor としての morphisms となる。

(i)　$\pi_{N_1^g}(V_1^g) = \{\pi_{N_1}(V_1)\}^g \in G_0(RN_1^g)$　for ${}^\forall g \in G$

(ii)　$\pi_{N_2}(V_{1\,N_2}) = \{\pi_{N_1}(V_1)\}_{N_2} \in G_0(RN_2)$

(iii)　$\pi_{N_1}(V_2^{N_1}) = \{\pi_{N_2}(V_2)\}^{N_1} \in G_0(RN_1)$

(III) $\quad \pi_G(V \otimes W) = \pi_G(V) \cdot \pi_G(W)$ for KG-加群 V, W.

これらの結果をそれぞれ証明すれば，容易に定理2を導くことができる。

参考文献

[1] H. Lenstra, Grothendieck groups of Abelian group rings, J. Pure Appl. Algebra 20 (1981), 173-193

[2] I. Reiner and K.W. Roggenkamp, Integral representations, (Springer Lecture Notes 744, Springer, Berlin, 1979)