

部分群の束による群の特徴づけ

青学大 理 小池和彦

東大 理 宇沢 達

(Kaguhiko Koike, Toru Uzawa)

群  $G$  が与えられている時, その部分群全体の集合に包含関係によつて束の構造を与えたものを  $L(G)$  とかく。ここで問題にするのは, 他に  $L(G) \cong L(G^*)$  となる群  $G^*$  があるかどうかである。  $L(G)$  が  $L(G^*)$  と同型の時, 常に  $G$  と  $G^*$  が同型になるならば, 群  $G$  はその部分群の束  $L(G)$  によつて特徴づけられるということにする。

結果は, 次の群が  $L(G)$  によつて特徴づけられることである。

1. 次数  $\geq 4$  の交代群  $\Omega_n$  ( $n \geq 4$ ).
2. 位数  $2k$  の二面体群  $G$  で, (すなわち階数  $2$  のコクセター群), 次のいずれかが成立するもの。

(以下の条件は必要十分である。)

i)  $k$  は偶数。

ii)  $k = P_1^{e_1} \cdots P_r^{e_r}$  と因数分解した時,  $(P_1 < \cdots < P_r)$

$k$  は奇数であり、且又

$$\text{G.C.M.}(P_1-1, \dots, P_r-1) = 2$$

$e_1 = 1$  の時は更に

$$\text{G.C.M.}(P_1, P_2-1, \dots, P_r-1) = 1.$$

3. 階数  $\geq 3$  の有限コクセター群。

4. 階数  $\geq 4$  の既約アフィンワイグ群。

注意. 1. については、R. Schmidt [2] による証明がある。2. については、小池 [1] による別証をよめる。なお、R. Schmidt [3] は、 $\text{Aut } L(\Omega_n) \cong \text{Aut } \Omega_n$  ( $n \geq 4$ ) となるための必要十分条件が  $n \neq 4, 3^r, 3^{r+1}$  ( $r \geq 3$  且奇数) となることを示している。

### 1. の証明

$L(G) \cong L(\Omega_n)$  として、 $n$  についての帰納法を示す。

まず次のことに注意する。以下、 $n \geq 4$  とする。

(\*)  $\Omega_n$  の  $\Omega_{n-1}$  と同型な部分群は、 $n \neq 6, n \geq 5$  であれば  $n$  個で互いに共役である。 $\Omega_6$  の中の  $\Omega_5$  と同型な部分群は 12 個で  $\text{Aut } \Omega_6$  の作用で互いに移り合う。

このことから、 $n = 4, 5, 6$  が示されておくとすると、 $n \geq 7$  の時は以下の様にして従う。

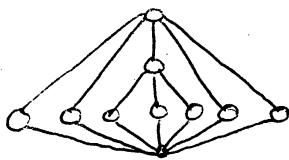
(\*)より,  $G$ には  $\Omega_{2n}$  と同型な部分群が  $H_1, \dots, H_n$  と  $n$  個ある。

まず,  $N_G(H_i) = H_i$  となる。そうでないとすれば,  $H_i$  は  $G$  の極大部分群であるから,  $N_G(H_i) = H_i$  となる。一方,  $L(\Omega_{2n})$  の構造より,  $H_i \cap H_j$  が  $H_j$  の untrivial 部分群となるものがある。  $H_i \triangleleft G$  であるから,  $H_i \cap H_j \triangleleft H_j$ 。これは  $H_j$  の単純性に反する。

従って,  $\{H_1, \dots, H_n\}$  は  $G$  に共役で作用させると,  $|G/H_i| = N/n$  の元からなる軌道にわけれる。故に  $N|n$ 。

$H_i$  を含む軌道を考えれば, 準同型  $f: G \rightarrow \bar{G}_N$  が存在するか,  $N_G(H_i) = H_i$  故に  $\ker f \subseteq H_i$  となる。 $H_i$  の単純性より,  $\ker f = \{1\}$  となる。故に  $|f(G)| = N \times \frac{(n-1)!}{2}$  は  $|\bar{G}_N| = N!$  を割り切る。  $N|n$  と合わせて  $N=n$  を得る。  $f(G)$  は  $|\bar{G}_N|$  の指数 2 の部分群であるから,  $f(G) = \Omega_n$ 。

$n=4$  の時。  $L(\Omega_4)$  は左下図の様になる。従って,



に対応する  $G$  の部分群が  $G_2 \times G_2$  であることを示せば, これは正規部分群であるから,  $G \cong \Omega_4$  が従う。



が部分群の束で決まること。  $|H_i| = d_i$  ( $d_i$  は素数) とする。  $|G| = 1 + (d_1 - 1) + (d_2 - 1) + (d_3 - 1) = d_1 + d_2 + d_3 - 2$ 。  $x \in H_1, x \neq e$  とすると,



$\alpha$  倍:  $H_2 - \{e\} \rightarrow H_3 - \{e\}$  は全単射になる。従って  $d_2 = d_3$ 。

同様にして、 $d_1 = d_2 = d_3 = p$ 。  $|H_1| = p \mid |G| = 3p - 2$ 。

$\therefore p \mid 2$  従って  $p = 2$ 。故に  $G \cong C_2 \times C_2$  である。

$n = 5$  の時。  $\Omega_5$  の部分群で  $\Omega_4$  と同型なものはいくつかある。これらを  $H_1, \dots, H_5$  とする。(  $G$  の中で互いに素なもの)

$N_G(H_i) = H_i$  である。  $N_G(H_i) \neq H_i$  とすれば、 $H_i$  の極大性より、 $N_G(H_i) = G$ 。  $L(\Omega_5)$  を見れば、 $H_i$  で、 $H_i \cap H_j \cong \mathbb{Z}_3$  となるものが存在することがわかる。

しかしこれは  $H_j$  の正規部分群となり、 $H_j \cong \Omega_4$  と矛盾する。

$n = 6$  の時。  $G$  の部分群で  $\Omega_5$  と同型なものは丁度12個である。これらを  $H_1, \dots, H_{12}$  とする。  $n \geq 7$  と同様

にすると、 $N_G(H_i) = H_i$  を得る。  $\{H_1, \dots, H_{12}\}$  は丁度  $N = |G/H_1|$  個の軌道に分かれる。  $\therefore$  したがって、 $N \mid 12$ 。

$n \geq 7$  と同様にして、 $f: G \rightarrow G_N$  は単射。従って、 $N \times \frac{5!}{2} \mid N!$ 。故に  $N \geq 6$ 。  $N \mid 12$  と合わせると  $N = 6$  または  $12$ 。  $N = 12$  とは矛盾を示す。この時、 $G$  の2-Sylow群の位数は  $\frac{16}{2}$  になる。 [6] 命題 1.4 によつて、 $\llcorner$  同群でない2-群は部分群の束を具せば位数がわかる。これは  $\Omega_6$  の2-Sylow群の位数が8であることに反する。従って、 $N = 6$ 。

$f(G)$  は  $G_6$  の指数2の部分群。よって、 $f(G) = \Omega_6$ 。 //

2の証明. [6]のp. 271 ~ 280を参照。

3の証明. [6]を参照。2よりも簡単である。

4の証明. [6]のp. 265 ~ 270, 特に命題2.1と同様のこと~~を~~, 既約アフィンワイル群の表に対して実行することによつて,  $L(G) \cong L(G^*)$  ( $G$ : 既約アフィンワイル群)に対して,  $f: G \rightarrow G^*$ ,  $f$ は全射導同型が存在することがわかる。従つて,  $f$ が単射であることを言えばよい。

そのために, 次のことを示す。

「 $G$ が既約アフィンワイル群であれば,  $G \supset N$ ,  $G \neq N$ ,  $N \neq \{e\}$  であれば,  $G/N$ は有限群である。」

次のことに注意する。 $G$ は有限群 $W$ と $W$ の $\mathbb{Z}^n$ への忠実且既約な作用によつて, 定まる半直積 $W \ltimes \mathbb{Z}^n$ と同型になる。このことより,  $N$ は $G$ の正規部分群 $\neq \{e\}$ とした時;  
 $N \cap \mathbb{Z}^n \neq \{e\}$ を示せばよいことになる\*。  $N \cap \mathbb{Z}^n = \{e\}$ とする。この時  $N$ の $\mathbb{Z}^n$ への共役作用は自明である。一方,  $G/\mathbb{Z}^n = W$ の $\mathbb{Z}^n$ への共役作用は忠実であった。  $N \subset G/\mathbb{Z}^n = W$ と見なせるのでこれは矛盾である。

\*  $N \cap \mathbb{Z}^n \neq \{e\}$  とすれば,  $\mathbb{Z}^n$ の  $W$ -orbit が張る  $\mathbb{Z}^n$  の sublattice は  $W \cap \mathbb{Z}^n$  が既約であるから, rank  $n$  である。よつて  $N \cap \mathbb{Z}^n$  は rank  $n$  の sublattice である。  $G/N \hookrightarrow (W/W \cap N) \ltimes (\mathbb{Z}^n / N \cap \mathbb{Z}^n)$  となつて,  $\mathbb{Z}^n / N \cap \mathbb{Z}^n$  は有限群である。従つて,  $G/N$  は有限群である。

ある。以上で、アフィンワイル群について用いた性質はブルバキのリ-群とリ-環 4, 5, 6 章を参照したい。

### 問題等。

1) 3, 4 を見て自然に思いつくのは、一般の Coxeter 群 (あるいは Hyperbolic 程度でも) をはこの部分群の束で決るか? という問題である。これには、次の問題がつけられたい:  $f: G \rightarrow G'$  全射準同型, 又  $L(G) \cong L(G')$  であれば,  $f$  は同型か?。

2) 1, 4 は岩堀先生の出された問題であるが, これに関連して先生は, Coxeter 群の部分群で,  $n$  度偶数個の鏡映の積でかける元の全体からなるものは部分群の束で決まるか? という問題を出された。

### 文献

[1] 小池和彦, "On some groups which are determined by their subgroup lattices", to appear.

[2] Schmidt, R: "Untergruppenverbände zweifach transitiver Permutationsgruppen", Math. Z. 144 (1975)

[3] Schmidt, R: "Verbandsautomorphismen der alternierenden Gruppen", Math. Z. 154 (1977)

[4] 宇沢達, "Subgroup lattices of Finite Coxeter Groups"  
to appear

[5] 宇沢達 "有限 Coxeter 群とその部分群の束における特  
徴づけ" 第4回代数セミナー報告集 1981