

液膜の Marangoni 不安定

和歌山高専

舟田 敏雄

1. はじめに

Pearson¹⁾, Sternling, Scriven²⁾ 以来、表面張力勾配による不安定 (Marangoni 不安定) について、多くの研究がなされて来た ("対流不安定" の解説³⁾, 文献4) のはじめの部分を参照されたい)。しかし、この現象は、界面の物性に関わる複雑な要因の為、検討すべき課題も多い。又、最近になって、スペースラボラトリのような無重力状態で流れを誘起する機構として、改めて Marangoni 不安定への関心が高まっている。ところが、この方面から液膜の安定性を扱った報告は、筆者の知る限り未だないように思われる (別の観点からの液膜の安定性については、文献5) を参照されたい)。

本報告では、気体中におかれた薄い液膜について、温度勾配に起因する表面張力勾配、表面変形による表面張力及び膜表面の熱伝達特性という3つの要因に注目し、その安定性を調べる。

2. 問題の定式化

厚さ $2h$ の薄い液膜が気体中に静止しているものとして、座標系を Fig. 1 のようにとる。このとき、周囲の気体 I と II とに温度差があり、液膜内では定常温度分布が実現している。この液膜に攪乱（表面変形を含む）が加えられたときの安定性を線形理論により調べる。

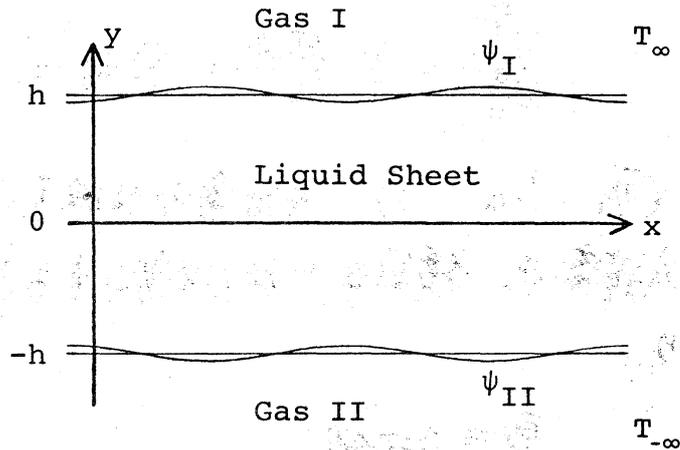


Fig.1 Configuration.

系の基礎方程式は、連続の式、運動方程式、熱伝導の式

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2)$$

$$\frac{DT}{Dt} = \kappa \nabla^2 T \quad (3)$$

$$\left(\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, 0 \right), \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right)$$

からなる。但し、 \mathbf{u} は流速ベクトル $(u, v, 0)$ 、 P は圧力、 T は温度を示し、物性値（密度 ρ 、粘性係数 μ 、温度伝導率 κ ）は一定とする。

先ず、静止定常場 ($[u, p, T, \varphi] = [0, \bar{p}, \bar{T}, 0]$) が y のみの関数とし、温度場の境界条件に Newton の冷却法則

$$\frac{d\bar{T}}{dy} = \pm \frac{\gamma_{I,II}}{h} (T_{\pm\infty} - \bar{T}) \quad \text{at } y = \pm h \quad (4)$$

($T_{\infty}, T_{-\infty}, \gamma_I, \gamma_{II}$ は各々気体 I, II 側での温度, 無次元熱伝達率で、複号もそれに対応する) を用いると、(2), (3) 式より、

$$\bar{p} = \text{const.}$$

$$\bar{T} = ay + b \quad (5)$$

$$a = \frac{T_{\infty} - T_{-\infty}}{h} \frac{\gamma_I \gamma_{II}}{2\gamma_I \gamma_{II} + \gamma_I + \gamma_{II}} = \frac{\bar{T}_I - \bar{T}_{II}}{2h} \quad (6)$$

$$b = \left\{ \left(1 + \frac{1}{\gamma_{II}}\right) T_{\infty} + \left(1 + \frac{1}{\gamma_I}\right) T_{-\infty} \right\} \frac{\gamma_I \gamma_{II}}{2\gamma_I \gamma_{II} + \gamma_I + \gamma_{II}}$$

$$= \frac{\bar{T}_I + \bar{T}_{II}}{2} \quad (7)$$

($\bar{T}_I = \bar{T}(h)$, $\bar{T}_{II} = \bar{T}(-h)$) を得る。

これに対し、微小攪乱 $[u', p', T', \varphi]$ を支配する方程式は、

$$\nabla \cdot u' = 0 \quad (8)$$

$$\left(\rho \frac{\partial}{\partial t} - \mu \nabla^2 \right) u' = -\nabla p' \quad (9)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \kappa \nabla^2\right) T' + a \psi' = 0 \quad (10)$$

であり、境界条件は、 $|4| \ll \ell$ を用いて線形化すると

$$\frac{\partial \psi'_{I,II}}{\partial t} = \psi' \quad (11)$$

$$\mu \left(\frac{\partial \psi'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial y} \right) = \pm \beta_{I,II} \left(\frac{\partial T'}{\partial x} + a \frac{\partial \psi'_{I,II}}{\partial x} \right) \quad (12)$$

$$-P' + 2\mu \frac{\partial \psi'}{\partial y} = \pm \sigma_{I,II} \frac{\partial^2 \psi'_{I,II}}{\partial x^2} \quad (13)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial y} = \mp \frac{\gamma_{I,II}}{\ell} (T' + a \psi'_{I,II}) \quad (14)$$

($y = \pm \ell$ に対応して、添字 I, II 及び複号をとる。以下同様) となる。尚、表面張力 σ は、薄膜が接触している気体により一般には異なる値を持つので、添字を付けて示している。(12)式右辺は温度依存 ($\sigma(T)$; $\beta = \partial \sigma / \partial T$) に基づく表面張力勾配を、(13)式右辺は表面張力を表わしている。しかし、ここでは、簡単の為、気体 I と II が同一の場合を考える。又、温度差 $|\bar{T}_I - \bar{T}_{II}|$ があまり大きくななく、 $\gamma_I = \gamma_{II}$, $\beta_I = \beta_{II}$ が成り立ち、更に

$$\sigma(\bar{T}_{I,II}) = \sigma(b) \pm \beta a \ell \quad (15)$$

について、

$$\sigma(\bar{T}_I) \sim \sigma(\bar{T}_{II}) \sim \sigma(b) \quad (16)$$

と置けるものとする((15)式は、両側が変形自由表面の場合の特徴とも言えるが、それに関する議論は、別の機会に述べる)。

次に、無次元化

$$\left. \begin{aligned} & \left[\frac{\alpha}{h}, \frac{\gamma}{h}, \frac{\kappa t}{h^2} \right] \\ & \left[\frac{u'h}{\kappa}, \frac{p'h^2}{\mu\kappa}, \frac{T'}{ah}, \frac{\psi}{h} \right] \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

と無次元数

$$M_R = \frac{\beta a h^2}{\mu \kappa} \quad (\text{Marangoni 数})$$

$$\gamma \quad (\text{Biot 数})$$

$$P_r = \mu / \rho \kappa \quad (\text{Prandtl 数})$$

$$N_c = \frac{\kappa \mu}{\sigma(b) h} \quad (\text{Crispation 数})$$

を導入する。(以下、無次元表現に同じ記号を用いる)。(8), (9)式を用い、(12), (13)式から u' , p' を消去して、解の形を

$$[\psi', T', \psi_{I,II}] = [f(y), g(y), S_{I,II}] e^{ikx + \lambda t} \quad (18)$$

(k ; 波数, λ ; 複素定数) とおくと、(9)~(14)式は、次のように整理できる。

$$\begin{cases} (\mathcal{L} - \frac{\lambda}{P_r}) \mathcal{L} f = 0 & (D = \frac{d}{dy}, \mathcal{L} = D^2 - k^2) \quad (19) \\ (\mathcal{L} - \lambda) g = f & \quad (20) \end{cases}$$

$$\lambda S_{I, II} = f \quad (21)$$

$$(\mathcal{L} + 2k^2) f = \pm M_R k^2 (g + S_{I, II}) \quad (22)$$

$$(\mathcal{L} - 2k^2 - \frac{\lambda}{P_r}) Df = \pm \frac{k^4}{N_c} S_{I, II} \quad (23)$$

$$Dg = \mp \gamma (g + S_{I, II}) \quad (24)$$

at $y = \pm 1$

(19), (20)式の固有関数を偶関数と奇関数とに分け(添字 e, o で示す), 境界条件において, (21), (22), (23)式を書き直すと

$$f_{e, o} = \lambda \frac{S_I \pm S_{II}}{2} \quad (25)$$

$$(\mathcal{L} + 2k^2) f_{e, o} = -\frac{M_R k^2}{\gamma} Dg_{o, e} \quad (26)$$

$$(\mathcal{L} - 2k^2 - \frac{\lambda}{P_r}) Df_{e, o} = \frac{k^4}{N_c} \frac{S_I \pm S_{II}}{2} \quad (27)$$

となる。(25), (27)式より, f_o が $x-z$ 面に対称な表面形状に, f_e が反対称な形状に対応している事が分かる。しかし, 固有関数は(26)式を満たさなければならぬので, 2つの固有関数を分離して扱う事はできない。

(19)~(24)式を解くと、固有値 $M_R(k, \gamma, \lambda, P, N_c)$ が求められるが、本報告では、定常モード $M_R(k, \gamma, N_c)$ についてのみ議論する。

3. 定常モードの計算結果

$\lambda=0$ について、固有値 M_R は、

$$M_R = \pm \delta \sqrt{(k + \gamma X)(k + \gamma/X) / A(k)} \quad (28)$$

($X = \tanh k$) となる。但し、

$$A = \left\{ (2k - X - \delta k N_c)(1 - X^2) - \frac{1}{k} X^2 \right\} \\ \times \left\{ (2k - \frac{1}{X} - \delta k N_c)(1 - \frac{1}{X^2}) - \frac{1}{k X^2} \right\} \quad (29)$$

である。 M_R の定義式において $\beta < 0$ であるから、(28)式の複号は、 A の負、正に対応してとればよい。そこで、以下 $M_R \geq 0$ の場合を考える。(28)式は、 $k \rightarrow \infty$ のとき、 N_c に依らず

$$M_R \sim \delta k (k + \gamma) \quad (30)$$

一方、 $k \rightarrow 0$ では、

$$M_R \sim \frac{3\sqrt{15\gamma(\gamma+1)}}{k^2} \quad (N_c = 0) \quad (31)$$

$$M_R \sim \sqrt{\frac{3\gamma(\gamma+1)}{N_c(1-3N_c)}} \quad (N_c \neq 0) \quad (32)$$

と表わされる。従って、 γ が大きいと、(30)~(32)式はいずれも

$M_{RC} \propto \gamma$ となり、 M_R が大きくなって安定化する傾向にある。又、 $\gamma \rightarrow 0$ では、(31), (32)式は $M_R \rightarrow 0$ を与える。表面変形の効果は、(32)式に示されるように、先の結果^{6), 7)}と同様、低波数域で顕著であるが、 $k = 0$ で $M_R = 0$ ⁶⁾ に対し、 $M_R \geq 0$ ($\gamma = 0$ のとき等号) となっている。尚、(32)式は $0 < N_c < \frac{1}{3}$ のときのみ有意であり、 N_c の増加に伴い、 $N_c < \frac{1}{6}$ では M_R が減少し、 $\frac{1}{6} \leq N_c < \frac{1}{3}$ では M_R が増加する。更に、 $N_c \geq \frac{1}{3}$ になると、中立曲線の上枝は(30)式で示されるが、下枝が低波数域には存在しなくなる。

(28)式の計算結果を Figs. 2~11 に、臨界 Marangoni 数 M_{RC} と γ の関係を Fig. 12 に示す。 $N_c = 0$ (平滑表面) の結果 (Figs. 2, 12) は、ほぼ直線的な関係

$$M_{RC} \doteq 18\gamma + 24 \quad (33)$$

で表わされる。 $0 < N_c \leq 0.0095$ では、 γ が小さいとき(32)式が M_{RC} を与え、 γ が大きくなると M_R の極値 (Fig. 3) が M_{RC} となる。一応、後者をタイプ (i)、前者をタイプ (ii) の不安定と呼ぶ事にする。次に、 $0.0095 \leq N_c < \frac{1}{6}$ (Figs. 4~6, 12) では、タイプ (ii) が卓越し、 N_c の増加と共に M_{RC} は小さくなる。しかし、 $\frac{1}{6} \leq N_c \leq 0.324$ (Figs. 7, 12) になると、タイプ (ii) が卓越するものの、 N_c が増加すると M_{RC} は大きくなる。又、 $0.324 \leq N_c < \frac{1}{3}$ (Figs. 8, 12) では、 γ が小さいときにはタイプ (ii) の不安

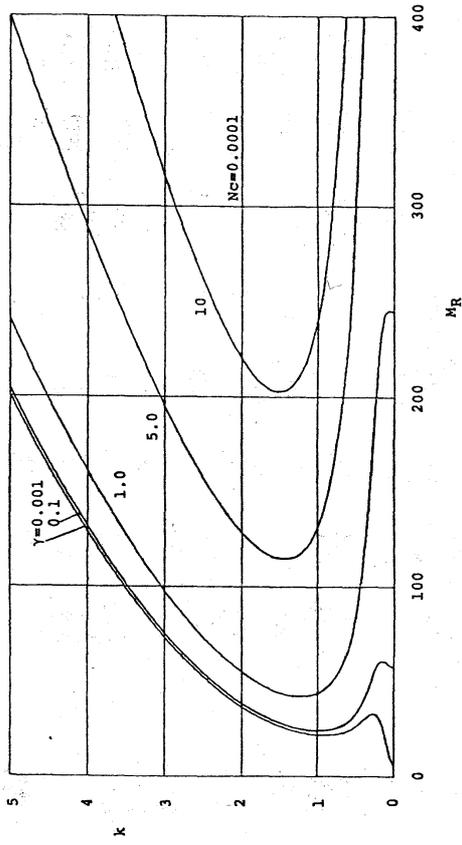


Fig.3

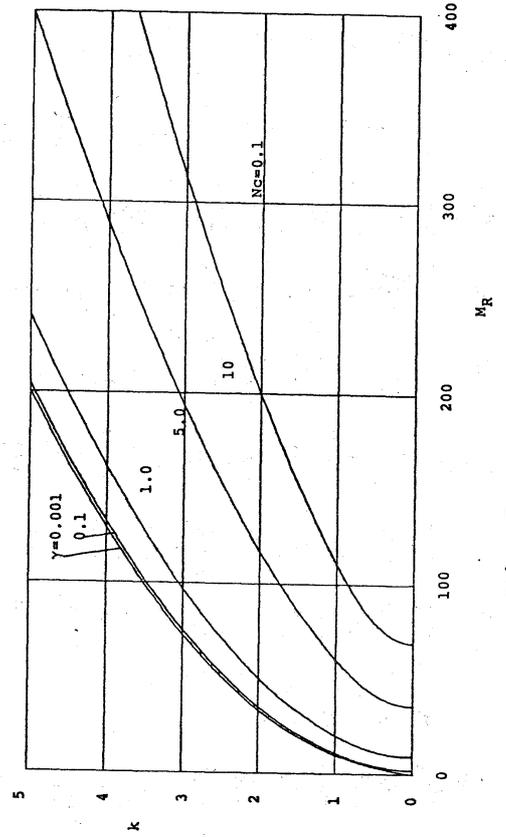


Fig.5

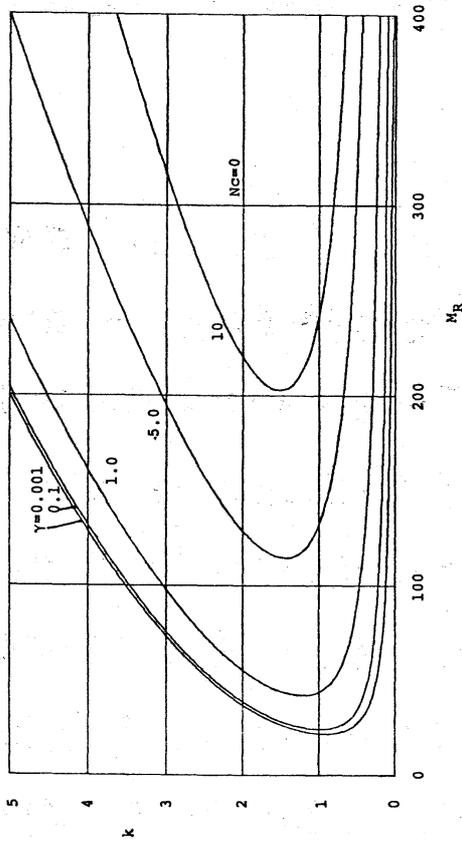


Fig.2

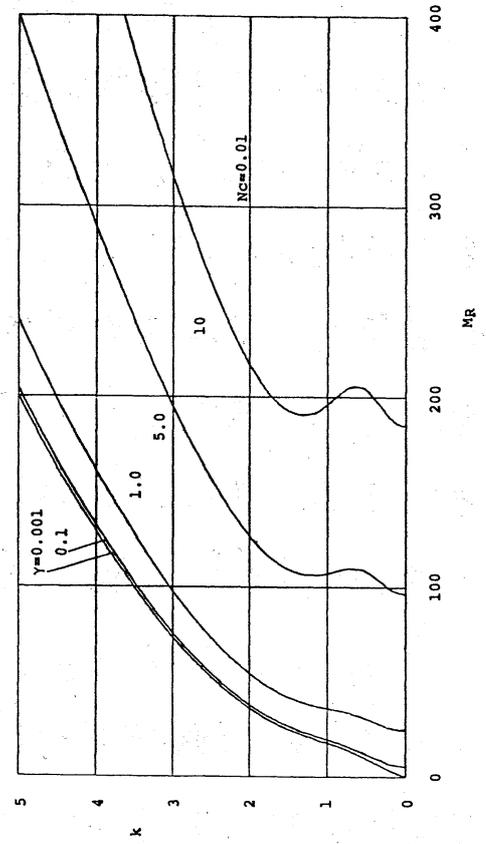


Fig.4

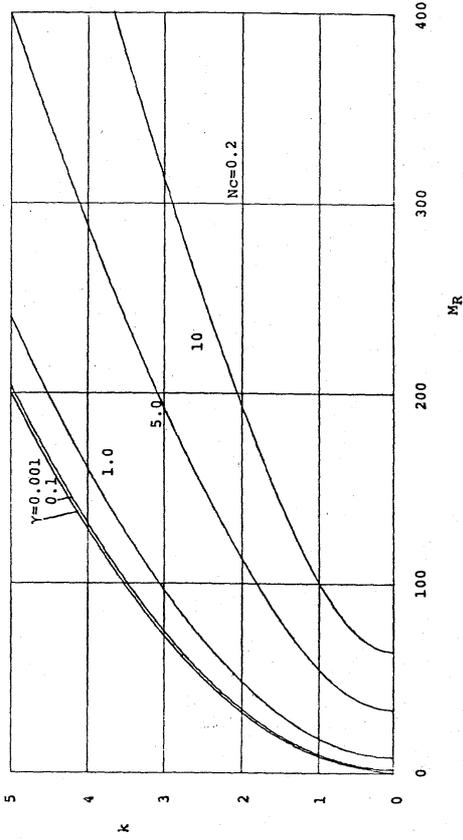


Fig. 7

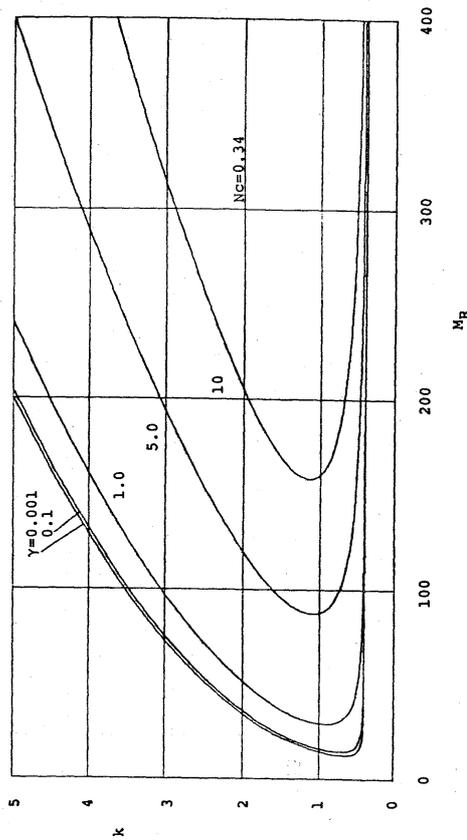


Fig. 9

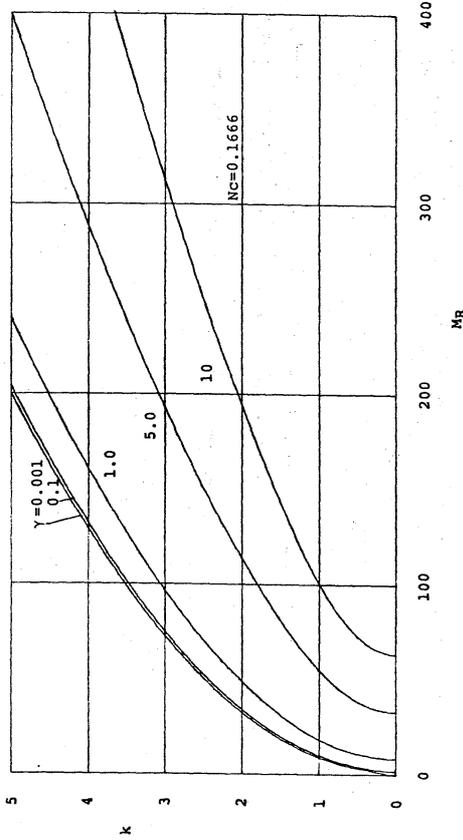


Fig. 6

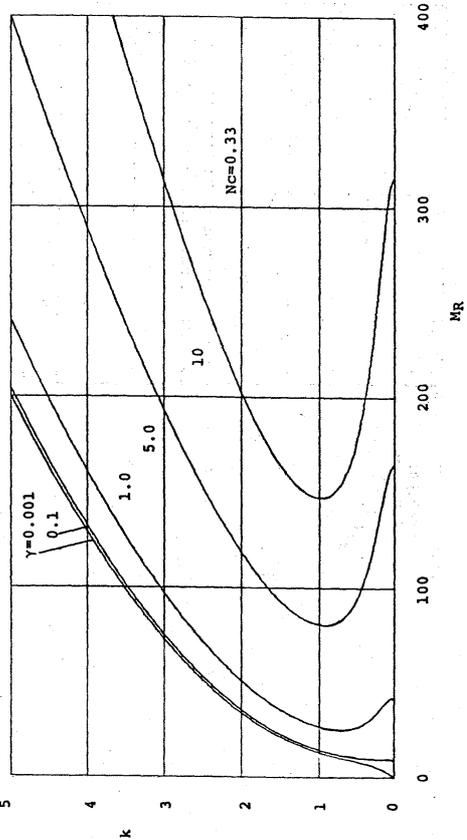


Fig. 8

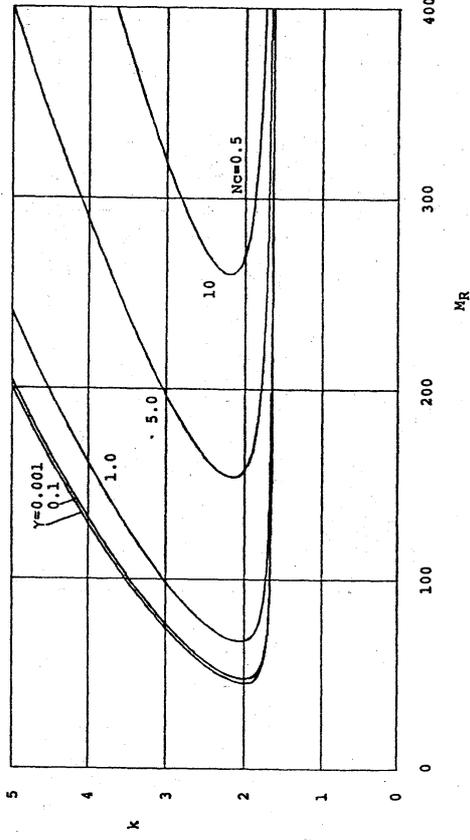


Fig.10

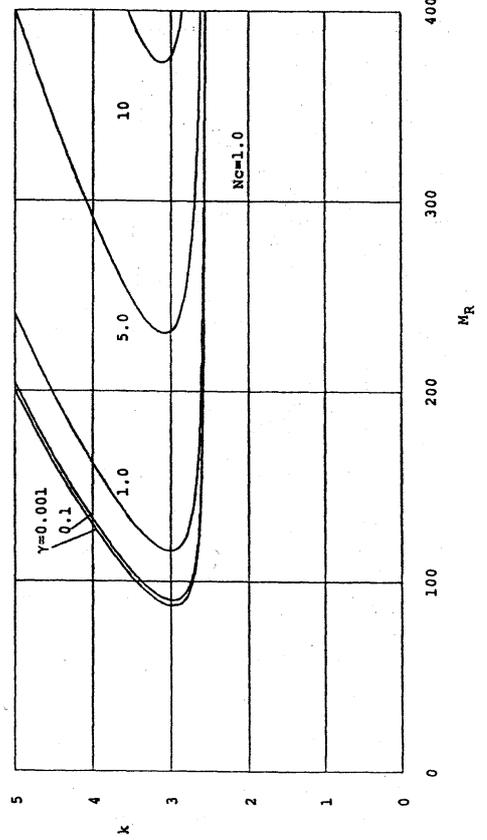


Fig.11

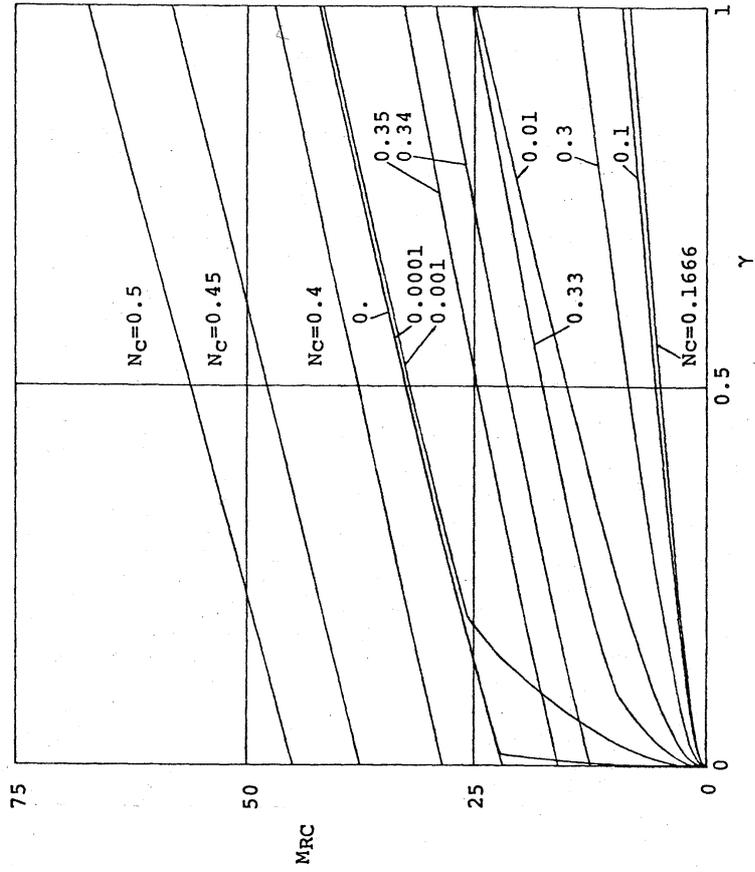


Fig.12

定が、 γ が大きいとタイプ(i)が M_{RC} を与えるが、 N_c が増える
と M_{RC} は大きくなる。更に、 $\frac{1}{3} < N_c$ (Figs. 9~12)では、タイ
プ(i)によつて M_{RC} が決まり、 N_c の増加と共に M_{RC} は大きくな
る。尚、タイプ(ii)の場合、いずれも M_{RC} は γ に関しほぼ直線
的に変化している事、 N_c に対しては、先の結果⁶⁾ に比べ M_{RC}
の変化が大きい事が分かる (Fig. 12)。又、両タイプの不安定
共、 γ が大きくなると安定化する (Fig. 12)が、これは、温度
場の境界条件(4)式が、 $\gamma \rightarrow \infty$ で

$$T' + 4_{I,II} = 0 \quad \text{at } \gamma = \pm 1 \quad (34)$$

となる事によつて説明される。即ち、 γ が充分大きいと、(34)
式から、 x 方向の温度勾配がなくなるので、(2)式右辺の表面
張力勾配もなくなつて、流れは誘起されない。

4. 低波数域の解構造と流れのパターン

$k^2 \ll 1$ とし、 $[f, g]$ を k のべき級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} k^{2n} [f^{(n)}, g^{(n)}] \quad (35)$$

に展開し、(19)~(24)式に代入する(厳密解を k で展開すれば所
要の結果は得られるが、(35)式の方が見通しがよい)。但し、展
開において、 $M_R k^2$, N_c/k^4 は $O(1)$ としておき、後で整理す
るものとする。

(19)式の解は、(21)式により

$$f^{(0)} = (C_0 + C_1 \gamma)(1 - \gamma^2) \quad (36)$$

(C_0, C_1 は積分定数)となる。これを(23)式に代入すれば、

$$S_I + S_{II} = 0 \quad (37)$$

$$S_I - S_{II} = -12 N_c C_1 / k^4 \quad (38)$$

となるから、表面形状は対称である。又、(20), (24)式から

$$g^{(0)} = C_0 \left(\frac{1}{2} \gamma^2 - \frac{1}{12} \gamma^4 \right) + C_1 \left(\frac{1}{6} \gamma^3 - \frac{1}{20} \gamma^5 \right) + B_0 + B_1 \gamma \quad (39)$$

を得る。但し、積分定数は、

$$\left. \begin{aligned} B_0 &= - \left(\frac{5}{12} + \frac{2}{3} \frac{1}{\gamma} \right) C_0 - \frac{S_I + S_{II}}{2} \\ B_1 &= - \frac{1}{\gamma + 1} \left\{ \left(\frac{7}{60} \gamma + \frac{1}{4} \right) C_1 + \gamma \frac{S_I - S_{II}}{2} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

である。そして、平滑表面の場合は、(36), (39)式を(22)式に代入すると、(31)式が得られる。

一方、表面変位のある場合には、 N_c/k^4 の因子について、 N_c を固定して $k \rightarrow 0$ を行なうと、(37), (38)式を用い、(39), (40)式から

$$(Dg_0^{(0)})_1 \sim \frac{6\gamma}{\gamma+1} \frac{N_c}{k^4} C_1 \sim (Dg_0)_1 \quad (41)$$

$$(Dg_e^{(0)})_1 = \frac{2}{3} C_0 \quad (42)$$

となる。しかし、2節に示した(26)式右辺の評価において、(41)式は適用できるが、(42)式は、 N_c/k^4 の因子を操作する為に、

$(Dg_e)_1$ の近似とはならない。又、(42)式は、(20)式右辺の対流項から導出されたものである事に注意されたい。先に、表面変形のある系において、“対流不安定”“表面変位不安定”と呼んだもの^{6),7)}は、前者が、(20)式の対流項を考慮し、境界条件においては $S_I = S_{II} = 0$ としたものに、後者は、対流項を無視し、表面変位を考慮した場合に相当する。従って、 $g_0^{(0)}$ が表面変位不安定に、 $g_e^{(0)}$ は対流不安定に対応している。

次に、 $f^{(0)}$, $g^{(0)}$ を計算すると、(37)式は

$$S_I + S_{II} = 4NcC_0/k^2 \quad (37')$$

と書き替えられ、(42)式は、 Nc/k^4 を操作して、

$$(Dg_e^{(0)} + k^2 Dg_e^{(0)})_1 \sim 2\left(\frac{1}{3} - Nc\right)C_0 \quad (42')$$

となる。この右辺の Nc の項が表面変位の効果である（このとき、(38), (40)式は近似として成り立っている）。(42)式により、(26)式は、

$$\left. \begin{aligned} (D^2 f_e^{(0)})_1 &\sim -\frac{Mrk^2}{\gamma} (Dg_0^{(0)})_1 \\ (D^2 f_0^{(0)})_1 &\sim -\frac{Mrk^2}{\gamma} (Dg_e^{(0)} + k^2 Dg_e^{(0)})_1 \end{aligned} \right\} (43)$$

と表わされて、この C_0, C_1 の係数行列式が(32)式を与える。よって、 g_0, g_e 共に表面^{変位}不安定型になると、前節で述べたように、低波数域に Mr の下枝はなく、 Nc が大きくなると Mr_c も大きくなり安定化する (Figs. 9~11)。それ故、 $Nc > \frac{1}{6}$ につい

では、むしろ表面変形による“安定化作用”と呼ぶ方が適切かも知れない。

更に、対流のパターンと表面張力勾配との関係を調べる。表面での流速 U' 、温度 T 、表面張力の变化分 σ' は、

$$U'(x, \pm 1) = -\frac{1}{R} \left(\frac{df^{(0)}}{dy} \right)_{\pm 1} \sin kx \quad (44)$$

$$T'(x, \pm 1) = g^{(0)}(\pm 1) \cos kx \quad (45)$$

$$\sigma'(x)_{I, II} = \mp \frac{MR}{\gamma} \left(\frac{dg^{(0)}}{dy} \right)_{\pm 1} \cos kx \quad (46)$$

となり、 $S_I = S_{II} = 0$ のとき

$$\frac{1}{C_1} \left(\frac{df^{(0)}}{dy} \right)_{\pm 1} = -2 \left(1 \pm \sqrt{\frac{9\gamma}{15(\gamma+1)}} \right) < 0 \quad (47-a)$$

$$\frac{1}{C_1} g^{(0)}(\pm 1) = -\frac{2}{\sqrt{15\gamma(\gamma+1)}} \left(1 \pm \sqrt{\frac{\gamma}{15(\gamma+1)}} \right) < 0 \quad (48-a)$$

$$\left(\frac{dg^{(0)}}{dy} \right)_{\pm 1} = \mp \gamma g^{(0)}(\pm 1) \quad (49-a)$$

$S_I, S_{II} \neq 0$ のとき

$$\frac{1}{C_1} \left(\frac{df^{(0)}}{dy} \right)_{\pm 1} \sim -2 \left(1 \pm \frac{3}{R^2} \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma+1} \frac{3Nc}{1-3Nc}} \right) \quad (47-b)$$

$$\frac{1}{C_1} g^{(0)}(\pm 1) \sim \frac{6Nc}{R^4} \left(-\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma+1} \frac{3Nc}{1-3Nc}} \pm \frac{\gamma}{\gamma+1} \right) \quad (48-b)$$

$$\frac{1}{C_1} \left(\frac{dg^{(0)}}{dy} \right)_{\pm 1} \sim \frac{\gamma}{\gamma+1} \frac{6Nc}{k^4} \quad (49-b)$$

となる。但し、(43)式を用い C_0 を C_1 で表わし、(31)又は(32)式の Mr によって書き直している。

これに対し、厳密解と(28)式の Mr とによる流れのパターンを Figs. 13~20に示す。液膜内の代表点 (x , y 方向に 21×19 点) において、矢印は流れの向きを、その濃淡は速度の大きさのレベル (各図ごとに、最大から最小値までを10レベルに分けており、流速の大きいものが濃い矢印に対応している) を表わしている。又、 x 方向には、与えた波数の1波長分のパターンを示している。尚、Figs. 16~20において、表面変位は、その形状だけを意味しており、大きさは別に示した。 $Nc=0$ ($S_I=S_{II}=0$)、 $k=0.125$ では、(44)、(46)及び(47-a)~(49-a)式から示されるように、表面の π/k の位置で表面張力が高く、 0 、 $2\pi/k$ で低くなり、 π/k に向かう流れを誘起している (Fig. 13)。このパターンは、 $k=1, 4$ になっても同様であるが、波数が大きいと相対的に上側の渦度が大きくなる (Figs. 14, 15)。

表面変位が入ると、低波数域では、(37)、(38)式でみたように対称型に近くなるが、下面では、(46)、(49-b)式により表面張力が π/k で低くなる為、流れの向きが変わる (Figs. 16, 17)。尚、

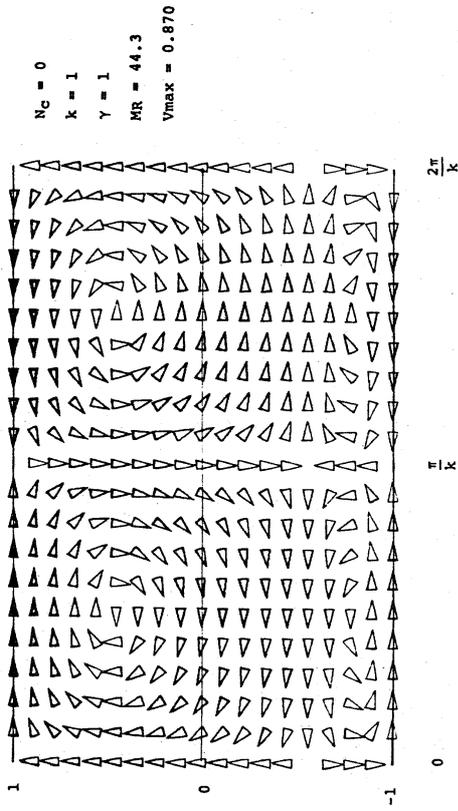


Fig.14

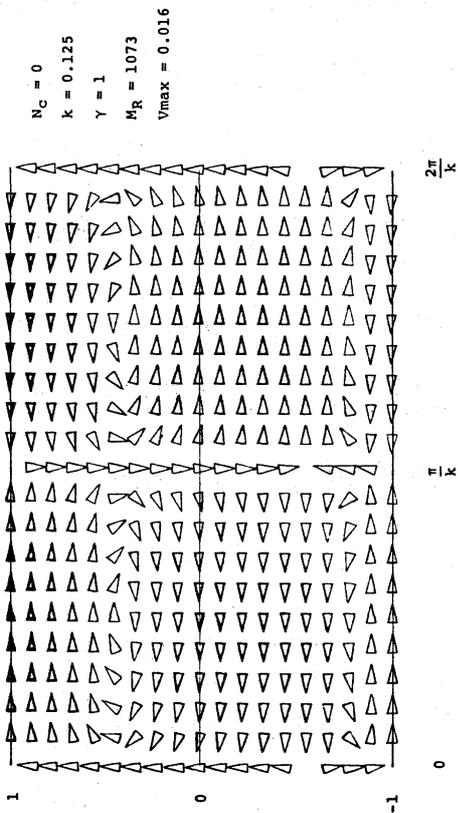


Fig.13

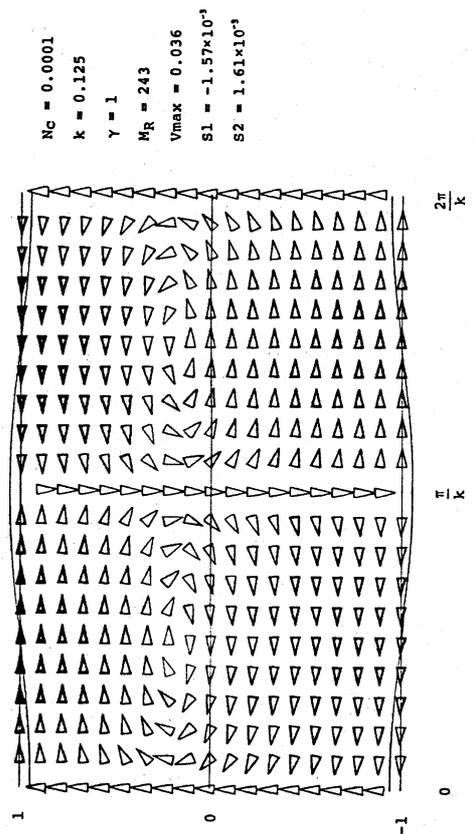


Fig.16

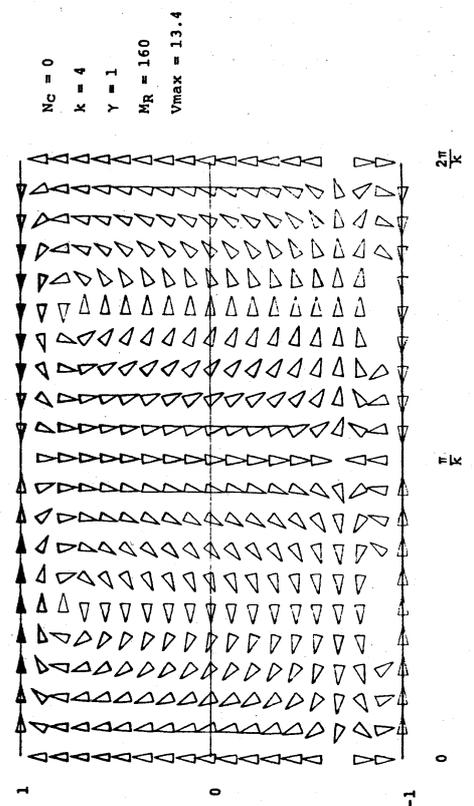


Fig.15

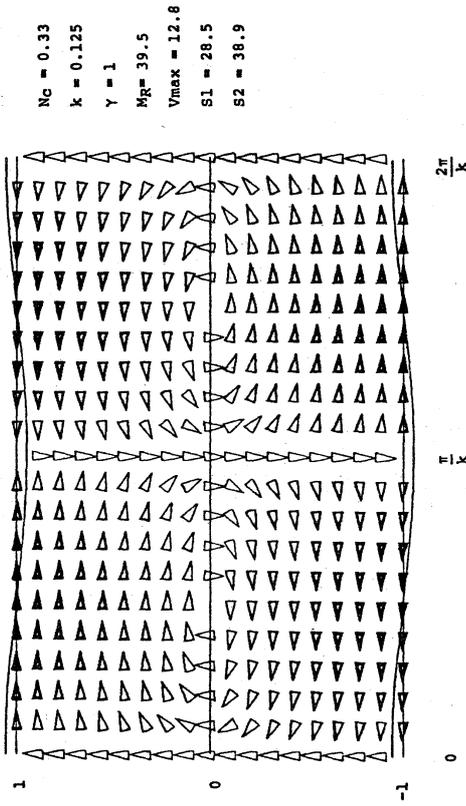


Fig.18

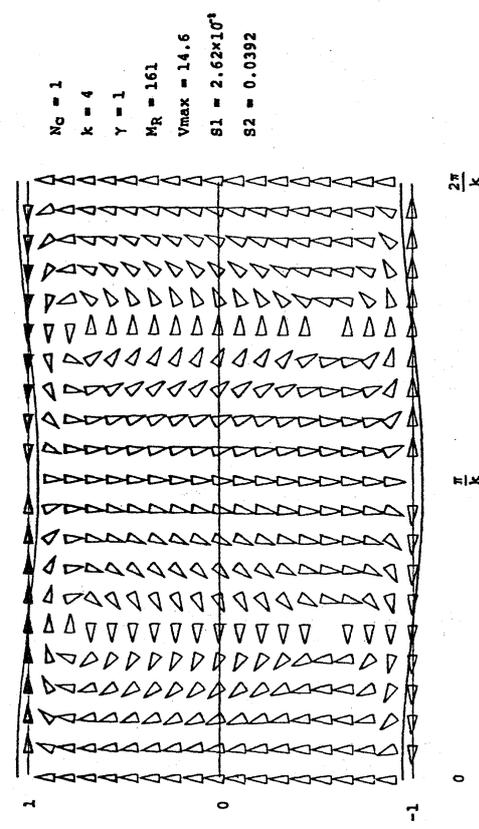


Fig.20

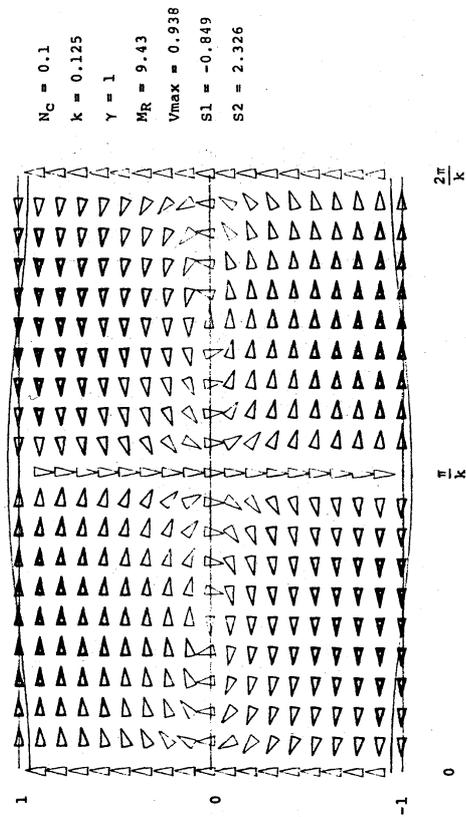


Fig.17

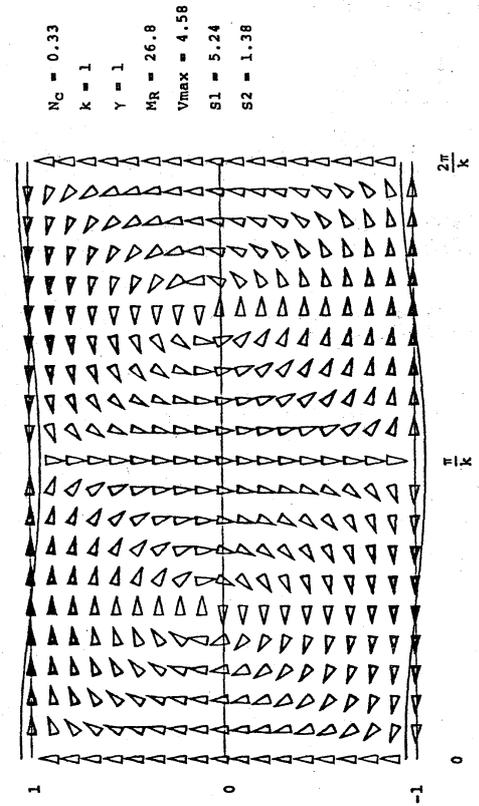


Fig.19

(44)式は、 U の評価として厳密ではないが、(47-b)式は、波数による下面での流れの向きの変化を定性的に表わしている。更に Nc が大きくなると、上側の表面変位の位相が変わり、反対称型になる(Figs. 18~20)。そこで、(37), (38), (43)式よりSIの漸近形を求めると

$$S_I \sim -\frac{6Nc}{k^4} C_1 \left\{ 1 - \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma+1} \frac{3Nc}{1-3Nc}} \right\} \quad (50)$$

となるから、反対称形状になる条件は、

$$\frac{1}{3} \frac{\gamma+1}{2\gamma+1} < Nc \left(< \frac{1}{3} \right) \quad (51)$$

と表わされる。

5. まとめ

以上、液膜のMarangoni効果による中立安定条件を導き、中立状態における表面形状についても議論した。空気に接する20°Cの水($\mu = 1.002 \times 10^{-2}$ g/cm·sec, $\kappa = 1.42 \times 10^{-3}$ cm²/sec, $\beta = -0.16$ dyne/cm·deg)⁸⁾を例に採れば、平滑表面の結果である $Mr_c = 42.2$ ($\gamma = 1$), 96.6 ($\gamma = 4$) に対し、各々 $|a k^2| = 3.8 \times 10^{-3}$, 8.6×10^{-3} deg·cmを得る。又、同じ空気-水について、 $Nc = 2.2 \times 10^{-7}/k$ (k cm)である。従って、本解析結果と実際の観測との比較は、容易に行ない得るようと思われる。

最後に、(16)式が成り立つ条件 ($|Nc Mr| \ll 1$) を再度吟味

する。(32)式を用いて、これを計算すると

$$N_c \ll \frac{1}{3} \frac{1}{\gamma^2 + \gamma + 1}$$

となる。この条件は、(32)式が Mr_c となるときに、本解析の首尾一貫性の目安を与えるものである。先に掲げた結果は、必ずしもこの条件に合致していないが、それは、そうした結果が $\gamma < 1$, $|N_c Mr_c| \geq 1$ の場合の定性的説明に有効であるという理由に基づいている。

References

- 1) J.R.A.Pearson: J.Fluid Mech. 4(1958)489.
- 2) C.V.Sternling and L.E.Scriven: Amer. Inst. Chem. Engrs.J. 5(1959)514.
- 3) C.Normand, Y.Pomeau and M.G.Velarde: Rev. Mod. Phys. 49(1977) 581.
- 4) M.TAKASHIMA: 日本レオロジー学会誌 8(1980)49.
- 5) K.MATSUUCHI: "連続体力学における非線型方程式の近似解法" 研究会 教理解析研講究録 218(1974)197.
- 6) M.SAKATA and T.FUNADA: J.Phys. Soc. Jpn. 50(1981)696.
- 7) T.FUNADA and M.SAKATA: "流体力学における非定常問題" 研究会(1980) 教理解析研講究録(刊行予定)
- 8) G.K.Batchelor: "An Introduction to Fluid Mechanics" Cambridge Univ.Press(1967) pp594-597.