

# Aitken の $\Delta^2$ 過程の収束特性と適用可能な加速過程

豊田高専 井口 健 (Ken Iguchi)

## 1. はじめに

Aitken の  $\delta^2$  過程は適用する問題によって収束率が加速される場合と加速されない場合とがあることはよく知られたことである。

そこで、ここではその原因を明らかにし適用する問題によらず収束率が加速されるような加速過程を提案するのが目的である。

## 2. 反復法と収束特性

ここで考える反復法とその収束特性について述べる。

### 2.1 反復法

次のような反復法を考える。

$$y^{(r)} = C \cdot y^{(r-1)} + d \quad (2.1)$$

ここに、 $C$  は  $n \times n$  実対称行列であって反復回数  $r$  に依存

しないものとする。  $d$  は  $n$  次の列ベクトルである。行列  $C$  を反復行列と呼ぶことにある。

又、式(2.1) によって生成されるベクトル列  $\{y^{(r)}\}$  はベクトル  $y$  に収束するものとする。

## 2.2 反復法の収束特性

いま反復行列  $C$  の固有値を  $\lambda_s, s=1, 2, \dots, n$  とし、それに対応する固有ベクトルを  $x^{(s)}$  とする。そして次の関係を満たすものとする。

$$1 > |\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|. \quad (2.2)$$

$y^{(r)}$  の誤差ベクトル  $\varepsilon^{(r)}$  を

$$\varepsilon^{(r)} = y - y^{(r)}, \quad r=0, 1, \dots \quad (2.3)$$

と定義するとき、 $\varepsilon^{(r)}$  はよく知られているように次のように表される。

$$\varepsilon^{(r)} = \sum_{s=1}^n \lambda_s^r x^{(s)}. \quad (2.4)$$

式(2.3) を使って式(2.4) から次式を得る。

$$y^{(r)} = y - \sum_{s=1}^n \lambda_s^r x^{(s)}, \quad r=1, 2, \dots \quad (2.5)$$

## 3. Aitken の $\Delta^2$ 過程とその収束特性

ここでは以下のような計算過程を考える。すなわち、初期ベクトル  $y^{(0)}$  を選んで反復法式(2.1) を  $(m+2)$  回反復して得

られた3個の値  $y^{(m)}, y^{(m+1)}, y^{(m+2)}$  に Aitken の  $\delta^2$  過程を適用する。そのとき得られた加速値を次の段階の反復法式 (2.1) に対する初期ベクトルとする。以後、要求精度に達するまで同じ操作を繰り返す。

### 3.1 Aitken の $\Delta^2$ 過程の定義

ここで問題にする Aitken の  $\delta^2$  過程は次のようなものである。

$$\tilde{y}^{(m)} = y^{(m+2)} + \omega(y^{(m+2)} - y^{(m)}) \quad (3.1)$$

ここに

$$\omega = \tilde{\lambda}_1^2 / (1 - \tilde{\lambda}_1^2) \quad (3.2)$$

$$\tilde{\lambda}_1^2 = \|y^{(m+2)} - y^{(m+1)}\|^2 / \|y^{(m+1)} - y^{(m)}\|^2$$

そして、記号  $\|\cdot\|$  は内積の平方根を示す。

式 (3.2) の第1式に第2式を代入して、次式を得る。

$$\omega = \frac{(y^{(m+2)} - y^{(m+1)}, y^{(m+2)} - y^{(m+1)})}{(y^{(m+2)} - 2y^{(m+1)} + y^{(m)}, y^{(m+2)} - y^{(m)})} \quad (3.3)$$

### 3.2 Aitken の $\Delta^2$ 過程の収束特性

Aitken の  $\delta^2$  過程の収束特性について考える。

$$\text{いま } \alpha_s = d_s / \lambda_1, \quad s = 1, 2, \dots, n \quad (3.4)$$

とおいて式 (2.2) に代入して、次式を得る。

$$1 > |\alpha_2| \geq |\alpha_3| \geq \cdots \geq |\alpha_n|. \quad (3.5)$$

式(2.4)に式(3.4)を代入して次式を得る.

$$\xi^{(m)} = \sum_{s=1}^n \alpha_s^m \lambda_1^m \chi^{(s)}. \quad (3.6)$$

式(3.1), 式(3.3)は式(2.3)を用いると次のように書くことができる.

$$\tilde{\xi}^{(m)} = \xi^{(m+2)} + \omega (\xi^{(m+2)} - \xi^{(m)}) \quad (3.7)$$

$$\omega = - \frac{(\xi^{(m+2)} - \xi^{(m+1)}, \xi^{(m+2)} - \xi^{(m+1)})}{(\xi^{(m+2)} - 2\xi^{(m+1)} + \xi^{(m)}, \xi^{(m+2)} - \xi^{(m)})} \quad (3.8)$$

$$\therefore \tilde{\xi}^{(m)} = y - \tilde{y}^{(m)} \quad (3.9)$$

式(3.8)は式(3.6)を用いて次のように表される.

$$\omega = \frac{\lambda_1^2}{1-\lambda_1^2} \left[ 1 - \sum_{s=2}^n \theta_s^2 \alpha_s^{2m} \frac{(1-\alpha_s^2)(1-\alpha_s \lambda_1)^2}{(1-\lambda_1^2)(1-\lambda_1)^2} + O\left(\sum_{s=2}^n \sum_{t=2}^n \theta_s^2 \theta_t^2 \alpha_s^{2m} \alpha_t^{2m}\right) \right] \quad (3.10)$$

式(3.7)は式(3.6), 式(3.10)を用いて次のように表すことができる.

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}^{(m)} = & \lambda_1^{m+2} \left\{ \chi^{(1)} \left\{ \sum_{s=2}^n \theta_s^2 \alpha_s^{2m} \frac{(1-\alpha_s^2)(1-\alpha_s \lambda_1)^2}{(1-\lambda_1^2)(1-\lambda_1)^2} + O\left( \sum_{t=2}^n \sum_{s=2}^n \theta_t^2 \theta_s^2 \alpha_t^{2m} \alpha_s^m \right) \right\} \right. \\ & + \sum_{t=2}^n \chi^{(t)} \left\{ -\alpha_t^m \frac{(1-\alpha_t^2)}{(1-\lambda_1^2)} + \alpha_t^m \frac{(1-\alpha_t^2 \lambda_1^2)}{(1-\lambda_1^2)} \sum_{s=2}^n \theta_s^2 \alpha_s^{2m} \frac{(1-\alpha_s^2)(1-\alpha_s \lambda_1)^2}{(1-\lambda_1^2)(1-\lambda_1)^2} \right. \\ & \left. \left. + O\left( \sum_{t=2}^n \sum_{s=2}^n \theta_t^2 \theta_s^2 \alpha_t^{2m} \alpha_s^m \right) \right\} \right\} \quad (3.11) \end{aligned}$$

$$\therefore \text{に} \quad \theta_t = \|\chi^{(t)}\| / \|\chi^{(1)}\|, \quad t=2, 3, \dots, n \quad (3.12)$$

一方、式(2.1)を $(m+2)$ 回反復して得られた $y^{(m+2)}$ の誤差は式(3.6)から次のようになった。

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(m+2)} &= \sum_{s=1}^n \alpha_s^{m+2} \lambda_1^{m+2} \chi^{(s)} \\ &= \lambda_1^{m+2} \chi^{(1)} + \sum_{s=2}^n \alpha_s^{m+2} \lambda_1^{m+2} \chi^{(s)} \end{aligned} \quad (3.13)$$

ここで、Aitkenの $\delta^2$ 過程の適用効果が現れるための条件を考えてみよう。その前に表現を簡潔にするために新しい関数を定義しておく。

いま、 $\zeta$ は定数で

$$-1 \leq \zeta \leq 0 \quad (3.14)$$

を満たすものとする。

定義域を

$$-1 < \lambda < 1$$

$$\zeta \leq \alpha \leq 1 \quad (3.15)$$

とする次のような関数を定義する。

$$\begin{aligned} V_1(\lambda, \alpha, \zeta) &= |\alpha|^{2m} \frac{(1-\alpha^2)(1-\alpha\lambda)^2}{(1-\lambda^2)(1-\lambda)^2} \\ V_2(\lambda, \alpha, \zeta) &= |\alpha|^m \frac{(1-\alpha^2)}{(1-\lambda^2)} \\ V_3(\lambda, \alpha, \zeta) &= |\alpha|^m \frac{(1-\alpha^2\lambda^2)}{(1-\lambda^2)} \end{aligned} \quad (3.16)$$

ここに、Aitken の  $\delta^2$  過程においては  $\zeta = -1$  である。  
 さて Aitken の  $\delta^2$  過程を適用してそれが有効であるためには誤差  $\hat{\varepsilon}^{(m)}$  の大きさが誤差  $\varepsilon^{(m+2)}$  の大きさに比べて小さくなることである。そのためには、式(3.11)と式(3.13)の微小項を無視して式(3.11)の第1項と第2項の大きさが共に式(3.13)の第1項の大きさより小さくなる必要がある。  
 従って次式を得る。

$$\sum_{s=2}^n \theta_s^2 V_1(\lambda_1, \alpha_s, -1) < 1 \quad (3.17)$$

$$\theta_t \{ V_2(\lambda_1, \alpha_t, -1) + V_3(\lambda_1, \alpha_t, -1) \sum_{s=2}^n \theta_s^2 V_1(\lambda_1, \alpha_s, -1) \} < 1$$

$$t = 2, 3, \dots, n. \quad (3.18)$$

式(3.17), 式(3.18) は、 $\lambda_1, \alpha_t (t=2, 3, \dots, n)$  についての情報を必要とするがこれらの情報が与えられているこ

とはめったにない。従って、実際的目的のためには式(3.17), 式(3.18)の替りに次式を満たすとき Aitken の  $\delta^2$  過程は有効であると考える。

$$\left( \sum_{s=2}^n \theta_s^2 \right) M_1(\lambda_1, -1) < 1 \quad (3.19)$$

$$\theta_t \left\{ M_2(\lambda_1, -1) + M_3(\lambda_1, -1) \left( \sum_{s=2}^n \theta_s^2 \right) \cdot M_1(\lambda_1, -1) \right\} < 1 \quad (3.20)$$

$$t = 2, 3, \dots, n.$$

ここに

$$M_t(\lambda_1, \zeta) = \max_{\zeta \leq \alpha \leq 1} \left( V_t(\lambda_1, \alpha, \zeta) \right) \quad (3.21)$$

$$t = 1, 2, 3.$$

式(3.19), 式(3.20)を以後、Aitken の  $\delta^2$  過程の“有効条件”と呼ぶことにする。

式(3.19), 式(3.20)の左辺の大きさを直接評価することは容易でない。そこで  $V_t(\lambda_1, \alpha, -1)$  ( $t=1, 2, 3$ ) の曲線を描くことにより  $M_t(\lambda_1, -1)$  の大きさの概略を知り、式(3.19), 式(3.20)の大きさを推測することにする。

$\lambda_1$  の値を  $\pm 0.85$  から  $\pm 0.99$  まで  $0.01$  刻みで変化させその各々の値に対して  $\alpha$  の値を  $-1.0$  から  $1.0$  まで変化させて  $V_t(\lambda_1, \alpha, -1)$  ( $t=1, 2, 3$ ) の曲線を描くと図-1 から図-8 のようになる。

これらの図から  $M_t(\lambda_1, -1)$  の性質を列挙すると次のようになる。

- (i)  $\lambda_1$  の値が正であるときは、 $M_2(\lambda_1, -1), M_3(\lambda_1, -1)$  の大きさは  $M_1(\lambda_1, -1)$  の大きさに比べてきわめて小さい。
- (ii)  $\lambda_1$  の値が正であって 1 にきわめて近接しているとき、 $M_1(\lambda_1, -1)$  の大きさは非常に大きくなる。
- (iii)  $\lambda_1$  の値が正で 1 にきわめて近接している場合に、 $\alpha_s$  ( $s=2, 3, \dots, n$ ) の中にその値が負でその絶対値が 1 に近いものがあるときは  $M_1(\lambda_1, -1)$  の大きさは極端に大きくなる。
- (iv)  $\lambda_1$  の値が負のときは、 $M_1(\lambda_1, -1)$  の大きさは  $M_1(-\lambda_1, -1)$  の大きさに比べてきわめて小さい。
- (v)  $\lambda_1$  の値が負のときは、 $M_2(\lambda_1, -1), M_3(\lambda_1, -1)$  の大きさは共に  $M_1(\lambda_1, -1)$  の大きさより小さい。

さて式(3.19), 式(3.20) は繰り返し Aitken の  $\delta^2$  過程を適用する一つの段階で得られた式と考えることができるであろう。次の段階では式(2.1)の初期値を  $\tilde{y}^{(m)}$  とする。すなわち、

$$y^{(0)} := \tilde{y}^{(m)} \quad (3.22)$$

である。そして同様の操作を繰り返す。

式(3.9), 式(3.11)を使って  $\tilde{y}^{(m)}$  は次のように表される

$$\tilde{y}^{(m)} = y + \sum_{t=1}^n a_t x^{(t)} \quad (3.23)$$

ここに

$$a_1 \simeq \lambda_1^{m+2} \sum_{s=2}^n \theta_s^2 \alpha_s^{2m} \frac{(1-\alpha_s^2)(1-\alpha_s \lambda_1)^2}{(1-\lambda_1^2)(1-\lambda_1)^2} \quad (3.24)$$

$$a_t \simeq \lambda_1^{m+2} \left\{ -\alpha_t^m \frac{(1-\alpha_t^2)}{(1-\lambda_1^2)} + \alpha_t^m \frac{(1-\alpha_t^2 \lambda_1^2)}{(1-\lambda_1^2)} \sum_{s=2}^n \theta_s^2 \alpha_s^{2m} \frac{(1-\alpha_s^2)(1-\alpha_s \lambda_1)^2}{(1-\lambda_1^2)(1-\lambda_1)^2} \right\}$$

$$t = 2, 3, \dots, n.$$

そして  $a_t x^{(t)}$  ( $t = 1, 2, \dots, n$ ) を改めて  $x^{(t)}$  と書くことにすれば、すなわち

$$x^{(t)} := a_t x^{(t)} \quad (t = 1, 2, \dots, n). \quad (3.25)$$

式(3.11) から式(3.20) までに対応する式を得る。以下の段階においてもこの操作を繰り返すことになる。

この操作を繰り返すとき収束する計算過程においては  $\theta_t$  ( $t = 2, 3, \dots, n$ ) は漸近的に零に収束する。各段階で式(2.1)の反復回数  $m$  を大きくしさえすれば、 $\lambda_1, \alpha_s$  ( $s = 2, 3, \dots, n$ ) の値に関せず有効条件は常に満たされる。ところが  $m$  の値を大きくすると  $\theta_t$  が小さくなったときでも必要以上に式(2.1)を反復することになってその間 Aitken の  $\delta^2$  過程を適用できなくなるので全体として収束効果は下がる。そこで、ここでは  $m = 1, 2, 3$  のいずれかに限ることとする。

$m$  の値をこのように定めると有効条件が満たされない場合が頻繁に起こることが予想されるがそのようなときでも全体としては収束率が加速される場合がある。なぜならば、ある段階で  $\theta_t$  が有効条件を満たす方ほどには小さくなくても  $M_1(\lambda_1, -1)$  の大きさが比較的小さいときには次の段階の初期値である式(3.23)の  $\bar{y}^{(m)}$  において、多くの場合

$$|a_t| \|x^{(t)}\| < |a_1| \|x^{(1)}\|, \quad t=2, 3, \dots, n \quad (3.26)$$

となる。さらに式(2.1)を反復するから式(2.2)の関係から  $\theta_t$  が小さくなって有効条件を満たすようになると考えられるからである。

これらのことから Aitken の  $\delta^2$  過程を適用したとき収束率が加速されるためには有効条件が各段階で満たされるかほとんどの段階で満たされることである。そのためには  $M_1(\lambda_1, -1)$  の大きさをできるだけ小さくする必要がある。従って  $M_1(\lambda_1, -1)$  の特性からわかるように次の2つの条件を満たす必要がある。この条件を以後「収束条件」と呼ぶことにする。

- (i)  $\lambda_1$  の大きさが1に近接していないこと。
- (ii)  $\alpha_s (s=2, 3, \dots, n)$  の中でその値が負になるものの絶対値が1に近くないこと。

しかしながら  $\lambda_1, \alpha_s (s=2, 3, \dots, n)$  は反復行列  $C$  に固有

なものであるから、Aitken の  $\delta^+$  過程は適用する問題によって有効な場合とそうでない場合があることになる。

#### 4. 補足された Aitken の $\delta^+$ 過程

どのような問題に適用されても Aitken の  $\delta^+$  過程が有効であるようにするためにはどうすればよいかを考察する。そしてその考察にもとづいて具体的に3つの適用可能な加速過程を作成する。

##### 4.1 適用可能な加速過程の考察

はじめに次のような関数を定義する。

$$\begin{aligned} P_r(\lambda) &= \frac{\text{Tr}(\lambda C^{-1})}{\text{Tr}(C^{-1})} \quad (0 < C < 1) \\ &= \sum_{t=0}^r b_{t,r} \lambda^t \end{aligned} \quad (4.1)$$

ここに  $\text{Tr}(x)$  は、定義域を  $|x| < 1$  とする通常のカイビシエフ多項式であって、次の漸化式を満たす。

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x$$

$$T_{r+1}(x) = 2x T_r(x) - T_{r-1}(x) \quad (4.2)$$

$$r = 1, 2, \dots$$

このように定義された  $P_r(\lambda)$  は、 $r$  次の全ての多項式の中で  $\lambda = 1$  における値が1で  $|\lambda| \leq C$  において零から

の偏差の最大値が最小の多項式である。又、 $P_r(\lambda)$  は、  
 $C \equiv |\lambda| < 1$  において単調かつ急激に増大又は減少する。  
 式(4.1)によって与えられる  $P_r(\lambda)$  のはじめのいくつかを  
 列挙すると次のようになる。

$$\begin{aligned}
 P_1(\lambda) &= \lambda \\
 P_2(\lambda) &= (2\lambda^2 - C^2)/(2 - C^2) \\
 P_3(\lambda) &= (4\lambda^3 - 3C^2\lambda)/(4 - 3C^2) \\
 P_4(\lambda) &= (8\lambda^4 - 8C^2\lambda^2 + C^4)/(8 - 8C^2 + C^4)
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

$C=0.80$  における  $P_2(\lambda)$  と  $C=0.92$  における  $P_4(\lambda)$   
 の曲線を描くと図-9 のようになる。

さてベクトル列  $\{y^{(k)}\}$  から新しいベクトル列  $\{z_k^{(0)}\}$  を次の  
 ように作成する。

$$\begin{aligned}
 z_0^{(t)} &= y_r^{(t)}, \quad t=0, 1, \dots, r \\
 z_k^{(0)} &= \sum_{t=0}^r b_{t,r} z_{k-1}^{(t)}, \quad k=1, 2, \dots
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

ここに  $z_k^{(t)}$  は  $z_k^{(0)}$  を初期値として式(2.1)を  $t$  回反復  
 して得られる値である。又、 $b_{t,r}$  は式(4.1)の第2式によ  
 って与えられるものである。

ベクトル列  $\{z_k^{(0)}\}$  の一般項は次式で与えられる(例えば

[1], [4] などから類推して下さい。

$$x_k^{(0)} = y - \sum_{s=1}^n \{Pr(\lambda_s)\}^k x^{(s)} \quad (4.5)$$

チェビシェフ多項式の性質から  $|Pr(\lambda_s)| < 1$  ( $s=1, 2, \dots, n$ )  
 であるから、式(4.5)において

$$k \rightarrow \infty \quad \text{aとき} \quad x_k^{(0)} \rightarrow y.$$

以後、チェビシェフ多項式  $Pr(\lambda)$  の次数  $r$  は偶数にと  
 るものとする。その理由は後で明らかになるであろう。

さて、Aitken の  $\delta^2$  過程をベクトル列  $\{y^{(k)}\}$  ではなくてベ  
 クトル列  $\{x_k^{(0)}\}$  に適用することを考える。

式(4.5)は式(2.5)における  $\lambda_s$  をチェビシェフ多項式  
 $Pr(\lambda_s)$  でおきかえたものになっている。従って  $\lambda_s, \alpha_s$   
 ( $s=1, 2, \dots, n$ ) の替りに  $Pr(\lambda_s), Pr(\lambda_s)/Pr(\lambda_1)$  をそれ  
 それ考えることになる。しかしながら  $Pr(\lambda_s)$  ( $s=2, 3, \dots,$   
 $\dots, n$ ) の大きさの順序は  $s$  の順序と一致しない。

いま  $g$  を  $2 \leq g \leq n$  を満たす数を表すものとする  
 とき、式(4.1)における  $C$  は次の関係を満たすものとする

$$1 > |\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_g| \geq C \geq |\lambda_{g+1}| \geq \dots \geq |\lambda_n|. \quad (4.6)$$

そのとき  $Pr(\lambda_s)$  ( $s=1, 2, \dots, n$ ) の間には次の関係がある。

$$1 > \Pr(A_1) > \Pr(A_2) \geq \cdots \geq \Pr(A_g) \geq \Pr(C) \geq |\Pr(A_s)| \quad (4.7)$$

$$s = g+1, g+2, \dots, n.$$

さらに  $s = 1, 2, \dots, g$  に対しては次の関係がある。

$$0 < \Pr(A_s) < |A_s| \quad (4.8)$$

$$0 < \frac{\Pr(A_s)}{\Pr(A_1)} < \frac{|A_s|}{|A_1|} \quad (4.9)$$

式(4.8)は図-9 から明らかである。式(4.9)は次のようにして証明できる。 $\Pr(A)$  は、 $0 \leq |A| < 1$  において単調かつ急激に増大するからこの区間の微係数は1より大きい。すなわち

$$|\Pr'(A)| > 1. \quad (4.10)$$

又、 $\Pr'(A)$  は、この区間で連続であるから平均値の定理を使って、式(4.8)と考えると式(4.9)を得る。

$s = g+1, g+2, \dots, n$  に対しては式(4.7)から次の式が成り立つ。

$$0 < \frac{|\Pr(A_s)|}{\Pr(A_1)} \leq \frac{\Pr(C)}{\Pr(A_1)} \quad (4.11)$$

いま

$$\zeta = -\frac{\Pr(C)}{\Pr(A_1)} \quad (4.12)$$

と定めると,  $s = 1, 2, \dots, n$  に対して次式が成り立つ。

$$\zeta \leq \Pr(A_s) / \Pr(A_1) < 1 \quad (4.13)$$

$\zeta$  の値が  $\zeta > -0.5$  の範囲であれば式(3.22)によって定義される  $M_1(\Pr(A_1), \zeta)$  の大きさは図-1, 図-2 からわかるように  $\zeta = -1$  の場合に比べてはるかに小さくなる。 $\Pr(A_1), \zeta$  は共に定数  $c$  に依存しているので  $c$  の値を適当に定めることによって  $M_1(\Pr(A_1), \zeta)$  の大きさを小さくすることができる。 $c$  の値を 1 に近づけると  $\Pr(A_1)$  は小さくなるが  $\zeta$  が  $-1$  に近づき、 $c$  の値を 1 から遠ざけると  $\zeta$  は負の方向から零に向けて小さくなるが  $\Pr(A_1)$  が大きくなって 1 に接近する。これらのことはともに  $M_1(\Pr(A_1), \zeta)$  を小さくするので好ましくない。それ故、適当な  $c$  の値を選ぶ必要がある。

#### 4.2 定数 $r$ と $c$ の決定

チェビシェフ多項式  $P_r(x)$  の次数  $r$  と  $P_r(x)$  を規定する定数  $c$  の値を決める。

まずはじめに次数  $r$  を決めることにする。ベクトル列検閲に Aitken の  $S^2$  過程を適用するには  $P_r(x)$  の近似値が必要になる。チェビシェフ多項式の係数は正負交互に現れ、その絶対値は次数の増大とともに大きくなる。収束条件の (i) を満

たすようにするためには次数  $\gamma$  を大きくする必要があるが、そうすると  $P_\gamma(\lambda_1)$  の値を計算するとき桁落ちを起す。又、収束条件の (ii) を満たすようにするためには次数  $\gamma$  は偶数にしなければならぬ。これらのことから  $\gamma = 4$  又は  $2$  が適当である。

次に  $\gamma = 2$  と  $4$  に対する  $c$  の値を決める。いくつかの  $c$  の値に対して  $P_\gamma(c)/P_\gamma(\lambda_1)$  ( $= |r|$ ) を計算して表にすると表-1 のようになる。

表-1

$c$	$\lambda_1$	$P_2(\lambda_1)$	$P_2(c)/P_2(\lambda_1)$	$c$	$\lambda_1$	$P_4(\lambda_1)$	$P_4(c)/P_4(\lambda_1)$
0.80	0.999	0.997	0.472	0.92	0.999	0.991	0.372
	0.998	0.994	0.472		0.998	0.981	0.375
	0.997	0.991	0.475		0.997	0.972	0.379
0.82	0.999	0.997	0.508	0.94	0.999	0.990	0.461
	0.998	0.994	0.510		0.998	0.979	0.464
	0.997	0.991	0.511		0.997	0.969	0.471
0.84	0.999	0.997	0.547	0.96	0.999	0.988	0.582
	0.998	0.994	0.549		0.998	0.977	0.589
	0.997	0.991	0.550		0.997	0.965	0.596

表-1 と図-2 から  $m=3$  の場合について  $c$  の適当な値を推定する。

適当な値の例として、 $\gamma=2$  に対して  $c=0.80$ 、 $\gamma=4$  に対して  $c=0.92$  を選ぶことになる。

### 4.3 適用可能な加速過程の作成

前節で考察した適用可能な加速過程の例として具体的に3つの加速過程を作成する。

#### (i) AC3P1 のアルゴリズム

$m=1$ ,  $r=1$  の場合の加速過程を AC3P1 と呼ぶことにする。これは Aitken の  $S^+$  過程そのものであるがアルゴリズムは次のようになる。

(1) 初期値  $y^{(0)}$  を選んで式(2.1) を使って  $y^{(1)}$ ,  $y^{(2)}$ ,  $y^{(3)}$  を計算する。

(2) 式(3.1) を使って  $\tilde{y}^{(1)}$  を計算する。

(3)  $y^{(0)} := \tilde{y}^{(1)}$  とする。

(4) (1) から (3) までを要求精度に達するまで繰り返す。

#### (ii) AC5P2 のアルゴリズム

$m=3$ ,  $r=2$  の場合の加速過程を AC5P2 と呼ぶことにする。これは次のようなアルゴリズムである。

(1) 初期値  $y^{(0)}$  を選んで式(2.1) を使って  $y^{(1)}$ ,  $y^{(2)}$  を計算する。

(2)  $y^{(0)}$ ,  $y^{(1)}$ ,  $y^{(2)}$  に対して式(4.4) を使って  $z_1^{(0)}$  を計算する。

(3)  $y^{(0)} := z_1^{(0)}$  とする。

(4) (1) から (3) までを繰り返して、 $z_2^{(0)}$ ,  $z_3^{(0)}$ ,  $z_4^{(0)}$ ,  $z_5^{(0)}$

を求めらる。

(5)  $Z_3^{(0)}, Z_4^{(0)}, Z_5^{(0)}$  に対して式(3.1)を使って  $\tilde{Z}_3^{(0)}$  を計算する。

(6)  $y^{(0)} := \tilde{Z}_3^{(0)}$  とする。

(7) (1) から (6) までを要求精度に達するまで繰り返す。

(iii) AC5P4 のアルゴリズム

$m=3, r=4$  の場合の加速過程を AC5P4 と呼ぶことにする。これは次のようなアルゴリズムである。

(1) 初期値  $y^{(0)}$  を選んで式(2.1)を使って  $y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}, y^{(4)}$  を計算する。

(2)  $y^{(0)}, y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}, y^{(4)}$  に対して式(4.4)を使って  $Z_1^{(0)}$  を計算する。

(3)  $y^{(0)} := Z_1^{(0)}$  とする。

(4) (1) から (3) までを繰り返して  $Z_2^{(0)}, Z_3^{(0)}, Z_4^{(0)}, Z_5^{(0)}$  を計算する。

(5)  $Z_3^{(0)}, Z_4^{(0)}, Z_5^{(0)}$  に対して式(3.1)を使って  $\tilde{Z}_3^{(0)}$  を計算する。

(6)  $y^{(0)} := \tilde{Z}_3^{(0)}$  とする。

(7) (1) から (6) までを要求精度に達するまで繰り返す。

#### 4.4 加速過程の適用可能域

加速過程  $AC3p1$ ,  $AC5p2$ ,  $AC5p4$  をいろいろの問題に適用した結果と 3.1 節で考察した Aitken の  $\delta^2$  過程の収束特性とを考えるとこれらの加速過程の適用可能域を示す。

これらの加速過程の適用可能域を、反復行列  $C$  の絶対値最大の固有値に関連させて示すと次のようになる。

$|\lambda_1| < 0.93$  のときは  $AC3p1$  を

$|\lambda_1| < 0.99$  のときは  $AC5p2$  を

$|\lambda_1| > 0.99$  のときは  $AC5p4$  を

それぞれ適用するのがよい。

SSOR 法のように反復行列  $C$  の絶対値最大の固有値がほとんど  $0.99$  以下でかつ要求精度が  $10^{-4}$  程度するときには  $AC3p1$  を、さらに高精度を要求するときには  $AC5p2$  をそれぞれ用いるのがよい。

同時反復法によって固有値を求める場合のように反復行列  $C$  の絶対値最大の固有値が  $0.99$  より大きい問題が多い場合には  $AC5p4$  を用いるのがよい。

#### 5. 数値実験例

いろいろの例題の数値解を反復法を使って求めてみよう。そしてその収束する過程に加速過程  $AC3p1$ ,  $AC5p2$ ,

AC5p4 を適用して収束の加速を試みる。反復法としては固有値を定めるべき乗法と同時反復法を考える。

使用した計算機は豊田工業高等専門学校を端末とする名古屋大学大型計算機センターのFACOM M-200 であった。計算は10進16桁の倍精度演算を行った。

最初に Aitken の  $\delta^2$  過程の収束特性を確かめるために次の2つの例題に対してべき乗法を使って絶対値最大の固有値とそれに対応する固有ベクトルとを求める。その収束する過程に加速過程 AC3p1, AC5p4 を適用して収束率の加速を試みる。

### 例題 1

行列  $A = (a_{ij})$  は  $5 \times 5$  実対称行列でその要素は次のように与えられる。

$$\begin{array}{ll}
 a_{11} = 0.41581 & 40160 & a_{25} = -0.00166 & 17987 \\
 a_{12} = 0.11024 & 98134 & a_{33} = 0.08592 & 23796 \\
 a_{13} = 0.58209 & 65778 & a_{34} = 0.06930 & 80824 \\
 a_{14} = -0.01964 & 98137 & a_{35} = -0.58145 & 30602 \\
 a_{15} = 0.45294 & 78067 & a_{44} = 0.86242 & 53563 \\
 a_{22} = 0.85757 & 46437 & a_{45} = -0.11080 & 61608 \\
 a_{23} = 0.08529 & 05995 & a_{55} = 0.41826 & 36053 \\
 a_{24} = -0.00970 & 14250 & & 
 \end{array}$$

行列  $A$  は固有値  $1.00, 0.99, -0.80, 0.75, 0.70$  を持ち、その1つは負の値である。その特性値は  $\lambda_1 = 0.99$ ,

$\alpha_2 \simeq -0.81$ ,  $\alpha_3 \simeq 0.76$ ,  $\alpha_4 \simeq 0.71$  である。

べき乗法の初期値は例題 1, 2 とともに  $(1, 0, 0, 0, 0)^t$  とした。 $\sim$  に添字  $t$  は行と列の転置を意味する。

表-2 要求精度  $10^{-5}$  を得るための計算量

加速過程	適用しがい	AC3P1	AC5P4
反復回数	664	9629	105
所要時間	66 (ms)	687	12
加速過程の適用回数		571	2

## 例題 2

行列  $A = (a_{ij})$  は  $5 \times 5$  実対称行列でその要素は次のように与えられる。

$$\begin{array}{ll}
 a_{11} = 0.87792 & 12239 & a_{25} = -0.00359 & 81450 \\
 a_{12} = 0.08973 & 78982 & a_{33} = 0.86342 & 93313 \\
 a_{13} = 0.00857 & 56866 & a_{34} = 0.05768 & 64494 \\
 a_{14} = -0.01363 & 78942 & a_{35} = -0.00906 & 25721 \\
 a_{15} = 0.01670 & 21320 & a_{44} = 0.88742 & 53563 \\
 a_{22} = 0.88257 & 46437 & a_{45} = -0.08950 & 37085 \\
 a_{23} = 0.07113 & 03772 & a_{55} = 0.87864 & 94448 \\
 a_{24} = -0.00970 & 14250 & & 
 \end{array}$$

行列  $A$  は固有値  $1.00$ ,  $0.99$ ,  $0.85$ ,  $0.80$ ,  $0.75$  を持ち、その値はすべて正である。特性値は  $\lambda_1 = 0.99$ ,  $\alpha_2 \simeq 0.86$ ,  $\alpha_3 \simeq 0.81$ ,  $\alpha_4 \simeq 0.76$  である。

表-3 要求精度  $10^5$  を得るための計算量

加速過程	適用しない	AC3P1	AC5P4
反復回数	664	98	105
所要時間	66 (ms)	9	12
加速過程の適用回数		12	2

表-4 要求精度  $10^7$  を得るための計算量

加速過程	適用しない	AC3P1	AC5P4
反復回数	1580	170	125
所要時間	157 (ms)	14	14
加速過程の適用回数		34	3

次に同時反復法を使って大型行列  $A$  の固有値を絶対値の大きい方から順に5個とそれに対応する固有ベクトルとを求める。そしてその収束する過程に AC5P4 を適用して収束率を加速する。他の加速過程は適用効果がなかった。

## 例題3

行列  $A = (a_{ij})$  は  $100 \times 100$  実対称行列でその要素は次のように与えられる。

$$a_{ij} = \begin{cases} 6.0 & (i=j) \\ 3.0 & (|i-j|=1) \\ 1.0 & (|i-j|=2,3) \\ 0.0 & (|i-j| \geq 4) \end{cases}$$

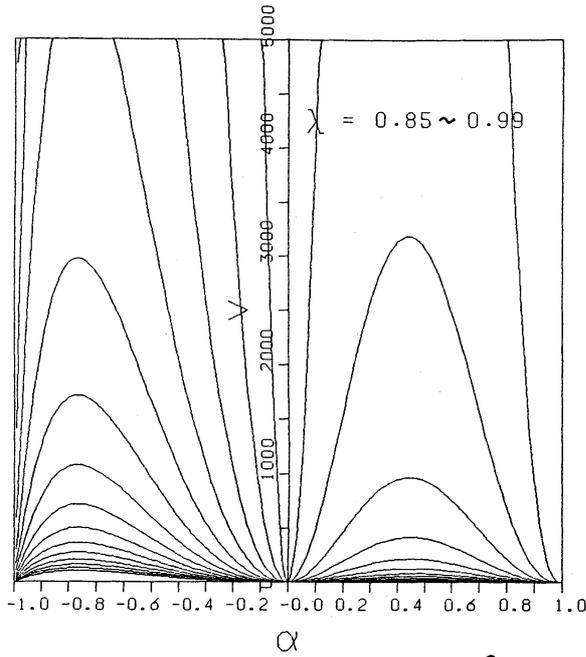
その特性値は  $\rho_1 \approx 0.997$  である。

表-5 要求精度  $10^{-5}$  を得るための計算量

加速過程	適用しない	AC5P4
反復回数	698	665
所要時間	10479 (ms)	10521
加速過程の 適用回数		4

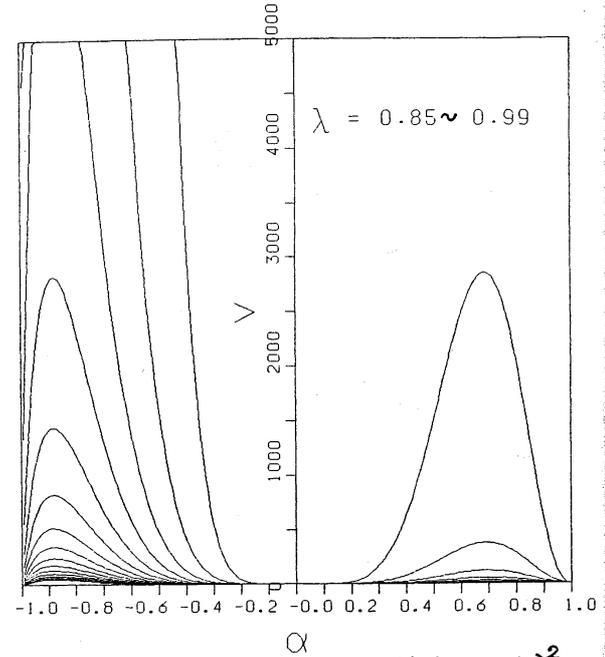
表-6 要求精度  $10^{-9}$  を得るための計算量

加速過程	適用しない	AC5P4
反復回数	1581	677
所要時間	23537 (ms)	11313
加速過程の 適用回数		5



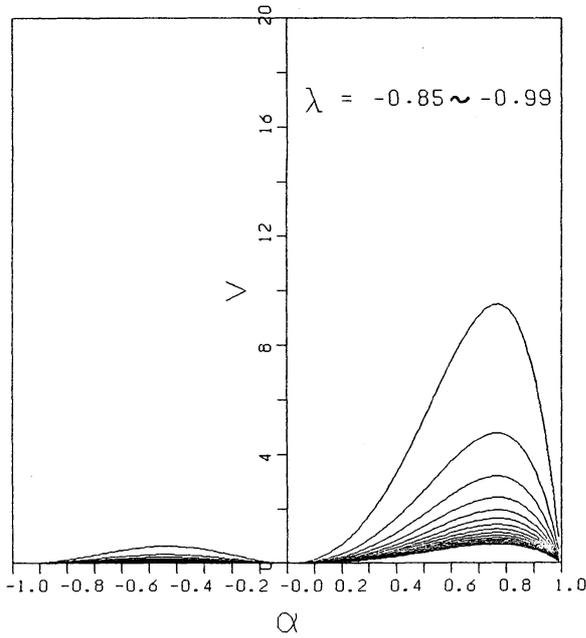
$$V_1(\lambda, \alpha, -1) = |\alpha|^2 \frac{(1-\alpha^2)(1-\alpha\lambda)^2}{(1-\lambda^2)(1-\lambda)^2}$$

图-1



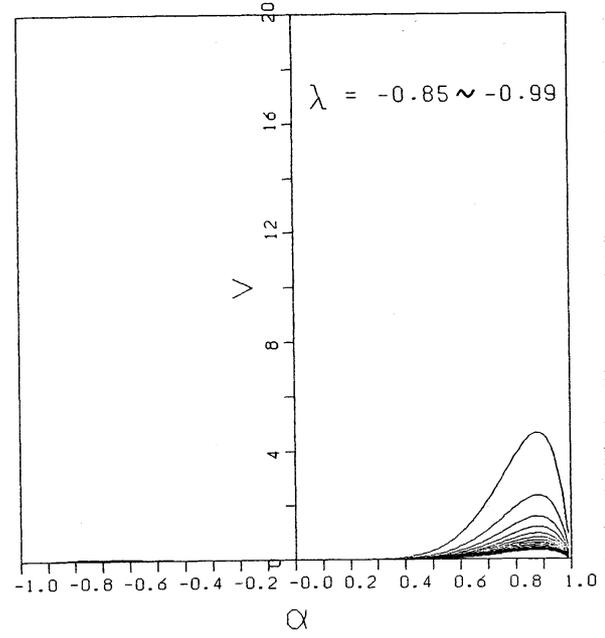
$$V_1(\lambda, \alpha, -1) = |\alpha|^6 \frac{(1-\alpha^2)(1-\alpha\lambda)^2}{(1-\lambda^2)(1-\lambda)^2}$$

图-2



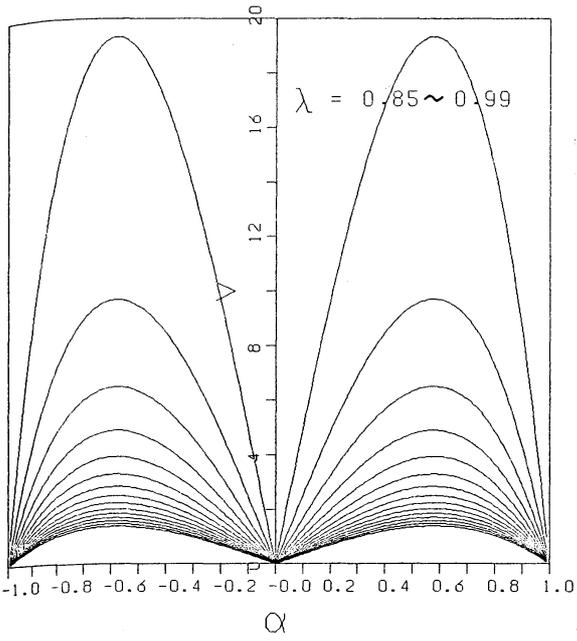
$$V_1(\lambda, \alpha, -1) = |\alpha|^2 \frac{(1-\alpha^2)(1-\alpha\lambda)^2}{(1-\lambda)^2(1-\lambda)^2}$$

图-3



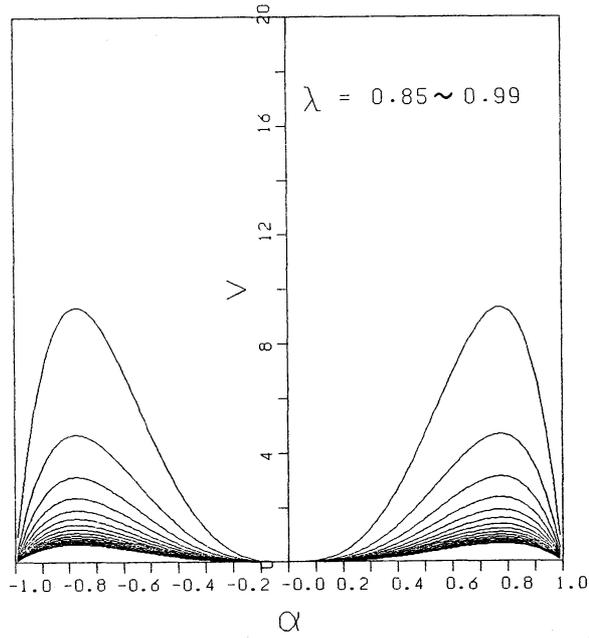
$$V_1(\lambda, \alpha, -1) = |\alpha|^6 \frac{(1-\alpha^2)(1-\alpha\lambda)^2}{(1-\lambda^2)(1-\alpha)^2}$$

图-4



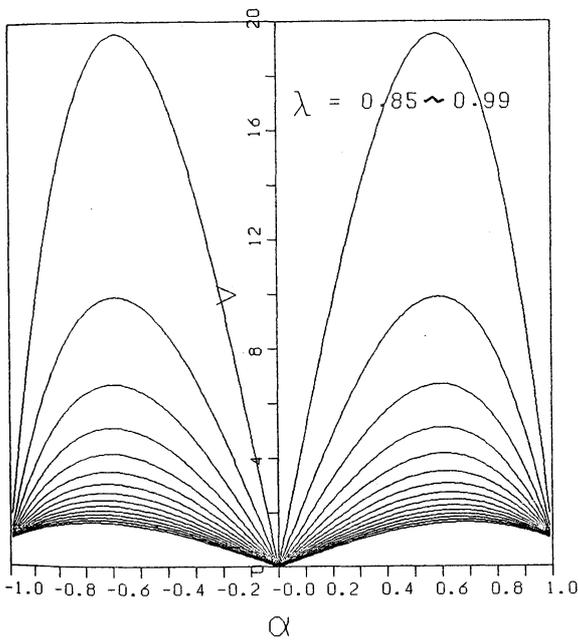
$$V_2(\lambda, \alpha, -1) = |\alpha| \frac{(1 - \alpha^2)}{(1 - \lambda^2)}$$

図-5



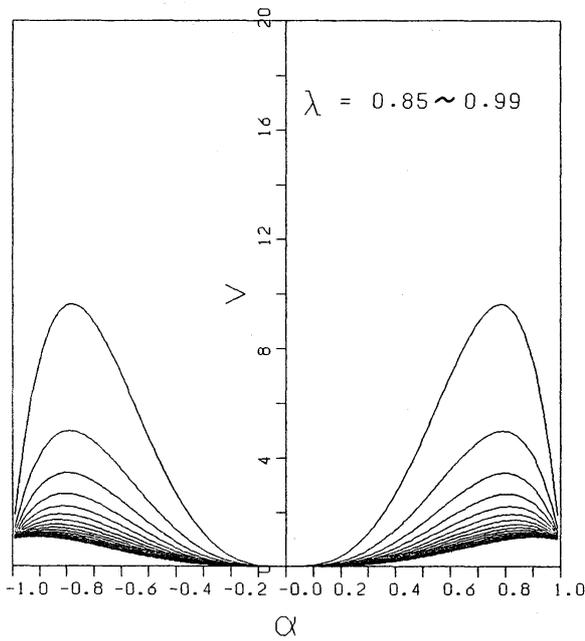
$$V_2(\lambda, \alpha, -1) = |\alpha|^3 \frac{(1 - \alpha^2)}{(1 - \lambda^2)}$$

図-6



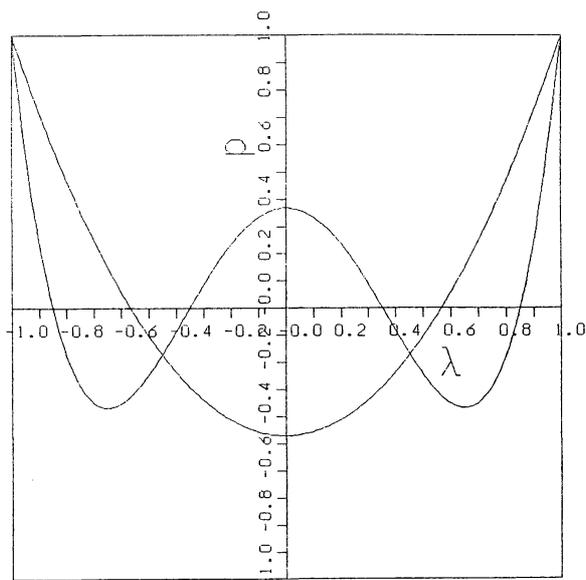
$$V_3(\lambda, \alpha, -1) = |\alpha| \frac{(1 - \alpha^2 \lambda^2)}{(1 - \lambda^2)}$$

図-7



$$V_3(\lambda, \alpha, -1) = |\alpha|^3 \frac{(1 - \alpha^2 \lambda^2)}{(1 - \lambda^2)}$$

図-8



$C=0.8$  の  $P_2(\lambda)$  と  $C=0.92$  の  $P_4(\lambda)$

本研究に対して援助して下さった二宮市三教授、鳥居達生助教授に感謝致します。

### 参考文献

1. Fox, L & Parker, I.B. Chebyshev Polynomials in Numerical Analysis, Oxford University Press, Oxford, 1968.
2. Henrici, P. Elements of Numerical Analysis, John Wiley & Sons, London, 1964.
3. Iguchi, k. An Algorithm of an Acceleration Process Covering the Aitken's  $\delta^2$ - Process. Inf. Process. in Japan, 16, (1976), 89-93.
4. Issacson, E. & Keller, H.B. Analysis of Numerical Methods, John Wiley & Sons, New York, 1966.
5. Jennings, A. Matrix Computation for Engineers and Scientists, John Wiley & Sons, London, 1977.