

離散型最大原理の微分幾何学的側面

京大工学部 前田 茂 (Shigeru Maeda)

Pontryagin の最大原理によれば Hamilton の正準方程式で表わされる制御系が現れる。差分方程式で記述される離散型制御系でも Katz によって最大原理が提示され Fan, Wang 達によって拡張されたが、連続系の場合と同様に正準方程式によく似た差分方程式で記述される制御系が現れる。

[1,2] 本報告の目的は 1) Katz の離散型最大原理を陽的・陰的両方の差分方程式を含む状態方程式で記述される制御系に拡張し、2) 最大原理で現れる制御系の構造を Hamilton カ学の立場から調べる、ことである。

§1. 準備

差分方程式の世界でも Hamilton, Lagrange の両形式を備えた古典カ学の枠組が作られている [3,4]。後で、最大原理

で現れる制御系を Hamilton 力学の立場から考察するために、
 いわゆる正準構造をもった差分方程式について復習する。

1.1. 差分方程式の保存量と対称性作用素

N 次元 Euclid 空間 (一般にはなめらかな多様体) M 上の離散系とは M の (局所) 座標系 (x^1, \dots, x^N) によって差分方程式

$$\phi^i(x_t, x_{t+1}) = 0, \quad |\partial \phi^i / \partial x_{t+1}^j| \neq 0 \quad \begin{matrix} (i, j = 1, \dots, N) \\ (t = 0, 1, \dots) \end{matrix} \quad (1)$$

で表わされる系をいう。但し、 ϕ^i は $M \times M$ 上のなめらかな実関数とする。(1) は写像 $\Phi: x_t = (x_t^1, \dots, x_t^N) \in M \mapsto x_{t+1} = (x_{t+1}^1, \dots, x_{t+1}^N) \in M$ を与える。次の定義を行おう。

(i) $x_{t+1} = \Phi(x_t)$ ($t = 0, 1, \dots$) によって定まる M 上の半無限点列 $\{x_t\}_{t \geq 0}$ を (1) の解という。

(ii) M 上のなめらかな実関数 f が (1) の任意の解 $\{x_t\}$ に沿って一定値をとる、i.e. $f(x_t) = f(x_{t+1})$ 、とき f を (1) の保存量といい (1) の保存量の全体を I_Φ とかく。

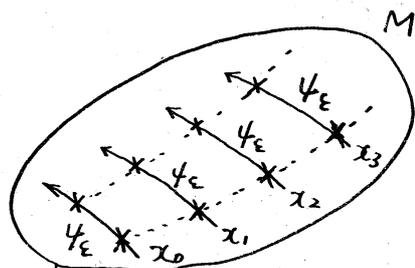
また M 上のなめらかなベクトル場

$$X = \sum_{i=1}^N \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (2)$$

が生成するフロア^{*} ψ_ε とする。

* 局所的には $dx^i/d\varepsilon = \xi^i(x)$, $x|_{\varepsilon=0} = x_0$ の解を $x^i(\varepsilon) = A^i(x_0, \varepsilon)$ とするときは $\psi_\varepsilon: x_0 \mapsto x(\varepsilon)$ 。

- (iii) (1) の任意の解 $\{x_t\}$ 及び任意に小さく ε に対して $\{\psi_\varepsilon(x_t)\}_{t=0,1,\dots}$ が (1) の解になるとき X を (1) の対称性作用素といい、(1) の対称性作用素の全体を S とかく。



(2) が (1) の対称性作用素であるための必要十分条件が [3] に与えられている。

Lemma 1. (2) が (1) の対称性作用素であるための必要十分条件は $\phi^i(x_t, x_{t+1}) = 0$ ($i=1, \dots, N$) が成立しているときすべての $j=1, \dots, N$ について次式が成立すること。

$$\sum_{i=1}^N \left\{ \xi^i(x_t) \frac{\partial \phi^j}{\partial x_t^i}(x_t, x_{t+1}) + \xi^i(x_{t+1}) \frac{\partial \phi^j}{\partial x_{t+1}^i}(x_t, x_{t+1}) \right\} = 0.$$

cf. 保存量 f があれば解は "超曲面" $f = \text{const.}$ 上に拘束される。こういう性質を利用して保存量から Lyapunov 関数を構成することがある。

cf. 対称性作用素の例を線形方程式で知られる簡単な離散系についてみてみよう。

$$x_{t+1}^1 = a x_t^1 + b x_t^2, \quad x_{t+1}^2 = c x_t^1 + d x_t^2 \quad (3)$$

(3) は対称性作用素 $X = x^1 \cdot \partial / \partial x^1 + x^2 \cdot \partial / \partial x^2$ を許容する。

X の生成するフローは $\psi_\varepsilon: (x^1, x^2) \mapsto (e^\varepsilon x^1, e^\varepsilon x^2)$ 。

(3) の一般解は容易に求められるけれども、若し (3) の

1つの解 $\{x_t^1, x_t^2\}$ の挙動がよく分るものとする
 と $\bar{x}_0^1 = e^\varepsilon x_t^1, \bar{x}_0^2 = e^\varepsilon x_t^2$ を初期値とする (3) の解の挙動
 は $\{x_t^1, x_t^2\}$ のそれから ψ_ε を介して把握できる。
 かつこのことは対象の方程式が線形でなくても可能で
 ある。

例 S_ε は Lie 代数をなす。(1) がパラメータを含みパラメータの
 値の違いで Lyapunov の意味で安定から不安定に変わる
 分岐現象が起こるとき Lie 代数の構造が変わる例が
 知られている [5]。

1.2. 正準構造をもつ離散系

連続系 (常微分方程式系) において保存量と対称性作用素
 とは一般に関連するとは限らないが Hamilton 力学系では
 両者は密接に関連する。その離散版が正準構造をもつ離散
 系として [3] で求められていり。

$2n$ 次元 Euclid 空間 (一般に symplectic 多様体) M 上の (局
 所) 座標系 $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ によって表わされる次の離
 散系を考えろ。

$$q_{t+1}^i - q_t^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}(q_t, p_{t+1}), \quad p_{i,t+1} - p_{i,t} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}(q_t, p_{t+1}). \quad (4)$$

この離散系は次の性質をもつ。

(i) 2形式 $dp_i \wedge dq^i$ を保存する, i.e. $dp_{i,T+1} \wedge dq_{T+1}^i = dp_{i,T} \wedge dq_T^i$.

(ii) $f, g \in I_{\mathbb{F}} \rightarrow \{f, g\} = \sum_{i=1}^n (\partial f / \partial q^i \cdot \partial g / \partial p_i - \partial f / \partial p_i \cdot \partial g / \partial q^i) \in I_{\mathbb{F}}$.

(iii) $f \in I_{\mathbb{F}} \rightarrow X_f = \sum_{i=1}^n (\partial f / \partial p_i \cdot \partial / \partial q^i - \partial f / \partial q^i \cdot \partial / \partial p_i) \in S_{\mathbb{F}}$.

(ii) の $\{, \}$ は Poisson 括弧であり、双一次・歪対称・Jacobi 恒等式の性質を満たす。(4) で定まる写像 $(q_T, p_T) \mapsto (q_{T+1}, p_{T+1})$ を重であらわしている訳だが、(ii), (iii) は次のように換言される。

(ii)' $I_{\mathbb{F}}$ は $\{, \}$ に関して Lie 代数をなす。

(iii)' $\sigma: f \in I_{\mathbb{F}} \mapsto -X_f \in S_{\mathbb{F}}$ は代数準同型である。

(4) は性質 (i), (ii), (iii) をもつがゆえに正準方程式の離散版とみなせる。この種の差分方程式がどの程度各分野に現れようかは未知であるが、最大原理で現れる制御系が具体例でありしかも幾何的に面白い性質をもつことは興味深い。

cf 正準構造をもつとは性質 (i) の成立することと同値である。正準構造をもつ離散系は (4) 以外に幾つもの差分方程式で記述できる。

§2. Katz の離散型最大原理の1つの拡張

本節では陽的・陰的両方の差分方程式で記述される制御系に対して最大原理を構成する。考える制御系は次式で与えられるものとする。

$$\begin{cases} g_{\tau}^i = f^i(g_{\tau-1}, P_{\tau}, \theta_{\tau}), & P_{\alpha, \tau-1} = g_{\alpha}(g_{\tau-1}, P_{\tau}, \theta_{\tau}), \\ g_{\tau}^i = a^i, & P_{\alpha 0} = b_{\alpha}, \quad \tau = 1, \dots, f. \end{cases} \quad (5)$$

$$J \equiv \sum_{i=1}^n C_i g_f^i + \sum_{\alpha=1}^m d^{\alpha} P_{\alpha f} \rightarrow \min. \quad (6)$$

ここで、 $g_{\tau} = (g_{\tau}^1, \dots, g_{\tau}^n)$ 及び $P_{\tau} = (P_{1\tau}, \dots, P_{m\tau})$ は状態変数。
 θ_{τ} は \mathbb{R}^n の適当なコンパクト集合に値をとる制御変数である。
 f^i, g_{α} は与えらる実関数、 n 及び m は任意の非負整数とする
(0 であり、 τ も構わない)。 $m=0$ のときが Katz の場合
である。次の定理が成立する [6]。

Th. 1. 制御系 (5) が (6) を満たす最適解をもつものとする。
このとき 補助変数 $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n), \psi = (\psi^1, \dots, \psi^m)$ を導入
して関数

$$H_{\tau} = \sum_{i=1}^n \phi_{i\tau} f^i(g_{\tau-1}, P_{\tau}, \theta_{\tau}) - \sum_{\alpha=1}^m \psi_{\tau-1}^{\alpha} g_{\alpha}(g_{\tau-1}, P_{\tau}, \theta_{\tau}) \quad (7)$$

を定義し 次の制御系を考へる。

$$\begin{cases} g_{\tau}^i = \frac{\partial H_{\tau}}{\partial \phi_i}, & P_{\alpha, \tau-1} = -\frac{\partial H_{\tau}}{\partial \psi^{\alpha}}, & \phi_{i, \tau-1} = \frac{\partial H_{\tau}}{\partial g^i}, & \psi_{\tau-1}^{\alpha} = -\frac{\partial H_{\tau}}{\partial P_{\alpha}}, \\ g_{\tau}^i = a^i, & P_{\alpha 0} = b_{\alpha}, & \phi_{if} = C_i, & \psi_f^{\alpha} = d^{\alpha}. \end{cases} \quad (8)$$

このとき 各 τ における最適制御に対して H_{τ} は最小値をと
らなければならない。 \blacksquare

証明の概略を述べる。

$\{\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \dots, \bar{\theta}_f\}$ を最適制御とし、対応する最適解を $\{(\bar{q}_0, \bar{p}_0), (\bar{q}_1, \bar{p}_1), \dots, (\bar{q}_f, \bar{p}_f)\}$ とする。更に $t=t$ において最適制御に微小な擾動を加わった新しい制御 $\{\bar{\theta}_1, \dots, \bar{\theta}_{t-1},$

$\theta_t = \bar{\theta}_t + \varepsilon \eta, \bar{\theta}_{t+1}, \dots, \bar{\theta}_f\}$ を考へ、対応する (5) の解を $\{(\bar{q}_0, \bar{p}_0), \dots, (\bar{q}_{t-1}, \bar{p}_{t-1}), (q_t, p_t), \dots, (q_f, p_f)\}$ とする。

ε は微小パラメータである。 f^i, p_α がはたらかだから 2 つの解の間で

$$q_t^i = \bar{q}_t^i + \varepsilon \xi_t^i + o(\varepsilon), \quad p_{\alpha t} = \bar{p}_{\alpha t} + \varepsilon \eta_{\alpha t} + o(\varepsilon) \quad (9)$$

と表ける。若干の計算の後 ξ_t, η_t は次の差分方程式をみたすことがわかる。

$$\begin{cases} \xi_t^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial q^j}(\bar{q}_{t-1}, \bar{p}_t, \bar{\theta}_t) \xi_{t-1}^j + \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial f^i}{\partial p_\alpha}(\bar{q}_{t-1}, \bar{p}_t, \bar{\theta}_t) \eta_{\alpha t}, \\ \eta_{\alpha, t-1} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_\alpha}{\partial q^i}(\bar{q}_{t-1}, \bar{p}_t, \bar{\theta}_t) \xi_{t-1}^i + \sum_{\beta=1}^m \frac{\partial g_\alpha}{\partial p_\beta}(\bar{q}_{t-1}, \bar{p}_t, \bar{\theta}_t) \eta_{\beta t}. \end{cases} \quad (10)$$

次に補助変数 $\phi_t = (\phi_{1t}, \dots, \phi_{nt})$ 及び $\psi_t = (\psi_t^1, \dots, \psi_t^m)$ を導入して双1次式

$$\sum_{i=1}^n \phi_{it} \xi_t^i + \sum_{\alpha=1}^m \psi_t^\alpha \eta_{\alpha t} \quad (11)$$

が $t=t, t+1, \dots, f$ において一定値をとるようになる。そのためには ϕ_t, ψ_t が次の差分方程式をみたせばよい。

$$\begin{cases} \phi_{i,t-1} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f^j}{\partial g^i}(\bar{g}_{t-1}, \bar{p}_t, \bar{\theta}_t) \phi_{j,t} - \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial g^{\alpha}}{\partial g^i}(\bar{g}_{t-1}, \bar{p}_t, \bar{\theta}_t) \psi_{t-1}^{\alpha}, \\ \psi_t^{\alpha} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial p_{\alpha}}(\bar{g}_{t-1}, \bar{p}_t, \bar{\theta}_t) \phi_{i,t} + \sum_{\beta=1}^m \frac{\partial g^{\beta}}{\partial p_{\alpha}}(\bar{g}_{t-1}, \bar{p}_t, \bar{\theta}_t) \psi_{t-1}^{\beta}. \end{cases} \quad (12)$$

ϕ_t, ψ_t が終端条件として $\phi_{if} = c_i, \psi_f^{\alpha} = d^{\alpha}$ とおいたときを要請すれば 前述の2つの解に対する J の値の差 δJ は

$$\delta J = \sum_i c_i \xi_f^i + \sum_{\alpha} d^{\alpha} \eta_{\alpha f} = \sum_i \phi_{it} \xi_t^i + \sum_{\alpha} \psi_t^{\alpha} \eta_{\alpha t}$$

となる。最後の式は若干の計算で $H_t(\theta_t) - H_t(\bar{\theta}_t) + o(\varepsilon)$ に等しいことがわかる。 $\delta J \geq 0$ であることから結論を得る。

(5)、(12)をまとめたものが(8)である。

cf. 最大原理を具体的に適用する際には Halkin の指摘した点に留意する必要がある [7].

§3. 微分幾何学的側面

Hamilton の正準方程式といふは力学的現象の記述という面でも余りにも普遍的であるが、差分方程式の世界でその離散版がよく使われるかどうかについては未知の点が多い。このような観点から実用的な離散型最大原理で現れた制御系が離散的な Hamilton 系 (正準構造をもつ差分方程式) の一例を与えることは興味深い。本節では (8) (並べに (5)) で与え

らなる離散系を対称性論的 (或いは微分幾何学的) 視点から調べる。

最大原理に関連して現れた差分方程式 (5), (8) を再記する。

θ_t はパウリ - タ とみなして省略しておく。

$$(A) \quad q_t^i = f^i(q_{t-1}, p_t), \quad p_{\alpha, t-1} = g_\alpha(q_{t-1}, p_t).$$

$$(B) \quad \begin{cases} q_t^i = \frac{\partial H_t}{\partial \phi_i}, & p_{\alpha, t-1} = -\frac{\partial H_t}{\partial \psi^\alpha}, & \phi_{i, t-1} = \frac{\partial H_t}{\partial q^i}, & \psi_t^\alpha = -\frac{\partial H_t}{\partial p_\alpha}, \\ H_t = \sum_{i=1}^n \phi_{i, t} f^i(q_{t-1}, p_t) - \sum_{\alpha=1}^m \psi_{t-1}^\alpha g_\alpha(q_{t-1}, p_t). \end{cases}$$

以下、上の各組を A 系, B 系 と略称する。B 系が正準構造をもち、これは次のようにして示される。

Th. 2. B 系の任意の解に沿って 1-形式 $\nu \equiv \sum_{i=1}^n \phi_i dq^i + \sum_{\alpha=1}^m \psi^\alpha dp_\alpha$ 従って 2-形式 $d\nu \equiv \sum_{i=1}^n d\phi_i \wedge dq^i + \sum_{\alpha=1}^m d\psi^\alpha \wedge dp_\alpha$ が保存される、つまり、 $\nu_{t+1} = \nu_t$ 及び $d\nu_{t+1} = d\nu_t$ 。■

§1 の 1.2 によれば B 系は (q^i, p_α) と (ϕ_i, ψ^α) とを互いに共役な正準変数とする正準構造をもち、更に次のことがわかる。

q, p, ϕ, ψ のなめらかな関数 h に対して無限小作用素

$$\sigma(h) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial h}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial \phi_i} - \frac{\partial h}{\partial \phi_i} \frac{\partial}{\partial q^i} \right) + \sum_{\alpha=1}^m \left(\frac{\partial h}{\partial p_\alpha} \frac{\partial}{\partial \psi^\alpha} - \frac{\partial h}{\partial \psi^\alpha} \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \right)$$

を定義し、2つの関数 h, k に対して双1次式

$$\{h, k\} = -\sigma(h)(k) \quad (13)$$

を定義する。このとき、

- (i) h が B 系の保存量ならば $\sigma(h)$ は B 系の対称性作用素。
- (ii) h, k が B 系の保存量ならば $\{h, k\}$ も B 系の保存量。

一般に 正準構造をもつ離散系は変分原理によって特徴づけられる Lagrange 形式をもつ。そして、Lagrangian を L とするとき $\psi_{t+1} - \psi_t = dL_t$ が成り立つ [4]。しかし、 B 系については Th.2 から $dL_t = 0$ 、従って $L = \text{const.}$ が成り立つ。つまり B 系は Lagrange 形式を有さない非常に特殊な Hamilton 系である。このことは以下に記すような B 系の幾何学的解釈と密接に結びついている。

いま、 (\mathfrak{g}, ρ) からなる $n+m$ 次元空間を N とする。 A 系すなわち (5) は N 上の写像列を与えるものと解釈される。 §2 において我々は先ず (10) を導いたがこれは (5) の変分方程式である。つまり (5) 及び (10) は (5) の接束 TN 上への自然な重 ρ_1 の拡張写像を与えている。次に我々は双1次式 (11) が保存量になるように ϕ_t, ψ_t を導入した。このことは ϕ_t, ψ_t の満たす方程式 (12) 及び (5) が、 TN の双対束である余接束 T^*N への重 ρ_1 の拡張写像であることを意味する。つまり

B系が定める写像 Φ_2 は Φ_1 の T^*N への自然な拡張写像なのである。

A系とB系との間のこのような関係は最大原理を構成する論理の中に自然にはいつていた。しかも、 T^*N への自然な拡張写像であるということはある条件の下で離散系がLagrange形式をもたないことと同値であることもすぐわかる。

最後に、保存量と対称性作用素とに関連してA, B両系間の関係を見る。次のような形の保存量 I をB系の1次保存量と呼ぶ。

$$I = \sum_{i=1}^n \phi_i \xi^i(q, p) + \sum_{\alpha=1}^m \psi^\alpha \eta_\alpha(q, p). \quad (14)$$

次の2つの命題は[6]に与えられており証明は省略する。

Th. 3. (14)がB系の1次保存量であるための必要十分条件は、

$$X_I = \sum_{i=1}^n \xi^i(q, p) \frac{\partial}{\partial q^i} + \sum_{\alpha=1}^m \eta_\alpha(q, p) \frac{\partial}{\partial p_\alpha}$$

がA系の対称性作用素であることである。』

これによってA系の任意の対称性作用素がB系の1次保存量として把握することができ、1次保存量の全体は(13)で定まるPoisson括弧に関してLie代数 \mathfrak{L} なし、A系の対称性作用素の全体もLie代数をなす。そして、 $I \mapsto -X_I$ は2つ

の Lie 代数の間同型対応を与えてくれる。すなわち、

Th. 4. $I, J \in B$ 系の 1 次保存量、 $\{, \}$ を (B) で与えられる Poisson 括弧とするとき、 $\{I, J\}$ も B 系の 1 次保存量である。しかも、 $X_{\{I, J\}} = -[X_I, X_J]$ がなりたつ。但し、 $[X, Y] = XY - YX$ 。

同型であることは I 及び X_I の形から容易に分かる。我々は上の 2 つの定理から任意の A 系の対称性群の構造を B 系の 1 次保存量だけから知るこゝができる。

§4. 終わりに

我々は Katz の離散型最大原理を任意の n, m に対する制御系に適用できるように拡張し、その微分幾何学的側面を考察した。保存量は Lyapunov の安定性に関して有用性が示されているけれども、対称性作用素のこの方面での有用性については些か不詳な。§1 の c_j として幾つかの系をらしめる (全然関係ないかも知れない) を挙げたが、今後の研究課題の 1 つであらうと思われる。

次に、(8) に計算機で解く際に状態変数の半数は初期条件が、残り半数は終端条件が与えられていて、その条件

の下で各 H_t を $\min.$ とする必要がある。このような変則的な
 両端境界値問題と効率的に解くアルゴリズムは現在どうなる
 だろうかという疑問が残る。常微分方程式の数値解法でも、
 両端境界値問題の方が初期値問題よりも解法に工夫を要する
 ことがあることから、先の点は考慮すべきことと思われる。

REFERENCES

- [1] S. Katz: A discrete version of Pontryagin's maximum principle, J.
 Electronics and Control, 13 (1962), 179-184.
- [2] L. T. Fan and C. S. Wang: The discrete maximum principle, Wiley, New York,
 1964 (高松武一郎ほか訳、離散型最大原理、コロナ社、1972).
- [3] S. Maeda: Canonical structure and symmetries for discrete systems, Math.
 Japon., 25 (1980), 405-420.
- [4] S. Maeda: Lagrangian formulation of discrete systems and concept of
 difference space, Math. Japon., 27 (1982), 336-345.
- [5] S. Maeda: On quadratic invariants in a discrete model of mechanical
 systems, Math. Japon., 23 (1979), 587-605.
- [6] S. Maeda: Symmetry aspect of discrete maximum principle, Math. Japon.,
26 (1981), 319-326.
- [7] H. Halkin: Optimal control for system described by difference equations,
 Adv. Cont. Systems, 1 (1964), 173-196.
- [8] M. Ikeda and K. Sakamoto: On the concept of symmetry in Pontryagin's
 maximum principle, SIAM J. Cont., 13 (1975), 389-399.