数理解析研究所講究録
第 494 巻 1983 年 70-77

A CONSTRUCTION OF THE NERODE EQUIVALENCE IN CLOSED CATEGORIES

九大理　河　原　康　雄
(Yasuo Kawahara)

§0.　通常のツリーオートマトンについての最小実現問題は，W. S. Brainerd（1968）などにより比較的早い時期に解決されている．B. D. O. Anderson, M. A. Arbib and E. G. Manes〔1〕は圏論的オートマトン理論の応用として，Ω－代数系に対して，Nerode同値を構成することにより，ツリーオートマトンの最小実現問題を解決した．河原・山口〔4〕は〔1〕の方法をモノイド圏の場合に拡張して，集合の圏から抽出されたいくつかの性質を持つモノイド圏において〔1〕の結果を拡張した．さらに，S. Bozapalides and A. Firarides〔2〕は閉圏においてNerode同値を構成し，閉圏におけるツリーオートマトンの最小実現問題をかなり一般的に解決した．この報告では，〔2〕の繁雑な部分を〔4〕の論法を閉圏の場合にまで拡張して見やすくし，〔2〕よりもさらに一般的なツリーオートマトンの最小実現定理を導く最小簡約定理に簡潔な証明を与える．（以下においては，Kは余積をもつ閉圏とし，圏Kにおける射 $f: A \longrightarrow B$，$g: B \longrightarrow C$ の合成を $f \cdot g: A \longrightarrow C$ で，また，対象Aの恒等射をAで表す．）

§1．閉圏におけるΩ－過程

$\mathbf{K}=\langle K, \square, e, \alpha, \lambda, \rho\rangle$ は余積をもつ閉圏（closed category）〔5；p．180〕で，θ は1つの記号とし，θ を含まない集合Sに対して，$S_\theta = S\cup\{\theta\}$ とする．閉圏Kにおける S－ラベル集合 $\Omega=\langle\Omega, \nu, \kappa\rangle$ とは，集合Ωと2つの写像 ν：$\Omega \longrightarrow S_\theta^*$，$\kappa$：$S \longrightarrow |K|$（ここに，$|K|$ は圏Kの対象全体のクラスを表す）からなる3つ組である．以後，閉圏KにおけるS－ラベル集合Ωが1つ与えられていると仮定しておく．記号 θ および $s \in S$ に対して，関手 $(-)^\theta$，$(-)^s$：$K \longrightarrow K$ をそれぞれ $(-)^\theta = I_K$（恒等関手），$(-)^s=\kappa(s)$（定値関手）と定義する．次に，$w\in S_\theta^*$ に対して，関手 $(-)^w$：$K \longrightarrow K$ を　$w=\varepsilon$（空列）のとき $(-)^\varepsilon = e$（定値関手），$w=\sigma_1\cdots\sigma_k$（$\sigma_1, \cdots, \sigma_k \in S_\theta$）のとき $(-)^w = (-)^{\sigma_1}\square\cdots\square(-)^{\sigma_k}$ によって定義する．（$|w|_\theta = 0$ ならば $(-)^w$ は定値関手である．）

補題1．任意の $w\in S_\theta^*$ に対して，関手 $(-)^w$：$K \longrightarrow K$ は右完全関手である，すなわち，関手 $(-)^w$ は反射的余等化射を保存する．

（証明）関手 $-\square A$，$A\square -$ は右共役関手を持つので，余極限を保存する，従って．特に反射的余等化射を保存する．故に，P．T．Johnstone〔6〕の命題0．17によりこの補題は成立する．　□

定義．閉圏K上のΩ－過程 X：$K\longrightarrow K$ を圏Kの余積を用いて次のように定義する：

$$(-)X = \coprod_{\omega\in\Omega} (-)^{\nu(\omega)}.$$

定理2．閉圏K上のΩ－過程 X：$K\longrightarrow K$ は入力過程である．

（証明）基本的には，〔4〕の定理1．1と同様であるので，証明の要

点のみを述べる．Ω－ツリーの集合Tを次のように帰納的に定義する：

1）$\theta \in T$.

2）$\nu(\omega)=\sigma_1\cdots\sigma_k$（$\sigma_1,\cdots,\sigma_k \in S_\theta$），$|\nu(\omega)|_\theta = n$（$n \geqq 0$），$t_1,\cdots,t_n \in T$ ならば $(t_1,\cdots,t_n)\omega \in T$.

3）Ω－ツリーは上の1），2）により定義されるものに限る．

次に，圏Kの対象Iに対して，圏Kの対象の族 $\{I^{[t]} \mid t \in T\}$ を次のように帰納的に定義する：

1′）$I^{[\theta]}=I$.

2′）$\nu(\omega)=\sigma_1\cdots\sigma_k$，$|\nu(\omega)|_\theta = n$（$n \geqq 0$），$t_1,\cdots,t_n \in T$ ならば $I^{[(t_1,\cdots t_n)\omega]} = J^{[\sigma_1]}\Box\cdots\Box J^{[\sigma_k]}$.

ここに，$\sigma_j \in S$（$1 \leqq j \leqq k$）のとき $J^{[\sigma_j]}=\kappa(\sigma)$，$\sigma_j=\theta$ で θ が $\nu(\omega)$ の中の第m番目（$1 \leqq m \leqq n$）の θ ならば $J^{[\sigma_j]}=I^{[t_m]}$とする．

そこで，自己関手 $X^@ : K \longrightarrow K$ をKの対象Iについて

$$I X^@ = \coprod_{t\in T} I^{[t]}$$

により定義すると，余積とモノイド積に関する分配律が閉圏においては成り立つので，上の条件2′）の場合に

$$(I X^@)^{\nu(\omega)} \cong \coprod_{t_1,\cdots,t_n\in T} J^{[\sigma_1]}\Box\cdots\Box J^{[\sigma_k]}$$

が成り立つ．この自然同型を用いれば $IX^@$ 上のX－機構 $I\mu$: $IX^@X \longrightarrow IX$ が〔4〕の定理1．1と同様に定義され（$IX^@$，$I\mu$）がI上の自由X－機構であることが示されて過程Xが入力過程であることが証明される（略証終り）． □

$\omega \in \Omega$ と自然数 j に対して，記号 $\binom{\omega}{j}$ は $\nu(\omega)=\sigma_1\cdots\sigma_k$（$\sigma_1$，$\cdots$，$\sigma_k \in S_\theta$）において，$\sigma_j=\theta$ であることを意味すると約束し，かつそのときに限り使用する．また，$\binom{\omega}{j}$ のとき関手 $\left[\binom{\omega}{j}\right]$: $K \longrightarrow K$ を

$$\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\omega}{j} = (-)^{\sigma_1}\square\cdots\square(-)^{\sigma_{j-1}}\square(-)^{\sigma_{j+1}}\square\cdots\square(-)^{\sigma_k}$$

（第ｊ項を除く）

によって定義する．Ｋは閉圏であるからモノイド積□は可換で，Ｋの対象Ａに対して次の自然同型が成立している：

$$\begin{aligned} &A\square A\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\omega}{j} \\ &= A\square(A^{\sigma_1}\square\cdots\square A^{\sigma_{j-1}}\square A^{\sigma_{j+1}}\square\cdots\square A^{\sigma_k}) \\ &A^{\nu(\omega)}. \end{aligned}$$

さらに，記号 $\binom{\omega_1\cdots\omega_n}{j_1\cdots j_n}$ を上と同様に $\binom{\omega_1}{j_1}$，…，$\binom{\omega_n}{j_n}$ のときに限り使用すると約束し，関手 $\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\omega_1\cdots\omega_n}{j_1\cdots j_n}:K\longrightarrow K$ を

$$\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\omega_1\cdots\omega_n}{j_1\cdots j_n} = \genfrac{[}{]}{0pt}{}{\omega_1}{j_1}\square\cdots\square\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\omega_n}{j_n}$$

によって定義する．さて，Ｘ－機構（Ｑ，δ）に対して，射

$\delta\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{\omega_1\cdots\omega_n}{j_1\cdots j_n}:Q\square Q\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\omega_1\cdots\omega_n}{j_1\cdots j_n}\longrightarrow Q$ を次のように帰納的に定義する：

（１）　$\delta\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{\omega_1}{j_1}:Q\square Q\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\omega_1}{j_1}\overset{\alpha}{\cong}Q^{\nu(\omega_1)}\xrightarrow{\delta_{\omega_1}}Q$

（２）　$\delta\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{\omega_1\cdots\omega_n}{j_1\cdots j_n} = \left(\delta\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{\omega_1}{j_1}\square Q\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\omega_2\cdots\omega_n}{j_2\cdots j_n}\right)\cdot\delta\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{\omega_2\cdots\omega_n}{j_2\cdots j_n}$．

命題３．Ｘ－機構射 $\xi:(\tilde{Q},\tilde{\delta})\longrightarrow(Q,\delta)$ に対して，次の射の等式が成り立つ：

$$\left(\xi\square\xi\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\omega_1\cdots\omega_n}{j_1\cdots j_n}\right)\cdot\delta\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{\omega_1\cdots\omega_n}{j_1\cdots j_n} = \tilde{\delta}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{\omega_1\cdots\omega_n}{j_1\cdots j_n}\cdot\xi.$$

（証明）　ｎについての帰納法により証明する．（ｉ）ｎ＝１の場合は次の可換図式より明らか．

$$\begin{tikzcd} \tilde{Q}\square\tilde{Q}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\omega_1}{j_1} \arrow[r, "\tilde{\alpha}", "\cong"'] \arrow[d, "\xi\square\xi\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\omega_1}{j_1}"'] & \tilde{Q}^{\nu(\omega_1)} \arrow[r, "\tilde{\delta}_{\omega_1}"] \arrow[d, "\xi"] & \tilde{Q} \arrow[d, "\xi"] \\ Q\square Q\genfrac{[}{]}{0pt}{}{\omega_1}{j_1} \arrow[r, "\cong", "\alpha"'] & Q^{\nu(\omega_1)} \arrow[r, "\delta_{\omega_1}"'] & Q \end{tikzcd}$$

（ｉｉ）ｎ－１まで命題の等式が成り立つと仮定すれば，次の計算によ

りnに対しても成り立つことが示される：

$$
\begin{aligned}
&\left(\xi \square \xi \left[\begin{smallmatrix}\omega_1 \cdots \omega_n \\ j_1 \cdots j_n\end{smallmatrix}\right]\right) \cdot \delta \left\{\begin{smallmatrix}\omega_1 \cdots \omega_n \\ j_1 \cdots j_n\end{smallmatrix}\right\} \\
= &\left(\xi \square \xi \left[\begin{smallmatrix}\omega_1 \\ j_1\end{smallmatrix}\right] \square \xi \left[\begin{smallmatrix}\omega_2 \cdots \omega_n \\ j_2 \cdots j_n\end{smallmatrix}\right]\right) \cdot \left(\delta \left\{\begin{smallmatrix}\omega_1 \\ j_1\end{smallmatrix}\right\} \square Q \left[\begin{smallmatrix}\omega_2 \cdots \omega_n \\ j_2 \cdots j_n\end{smallmatrix}\right]\right) \cdot \delta \left\{\begin{smallmatrix}\omega_2 \cdots \omega_n \\ j_2 \cdots j_n\end{smallmatrix}\right\} \\
= &\left\{\left(\left(\tilde{\delta} \left\{\begin{smallmatrix}\omega_1 \\ j_1\end{smallmatrix}\right\} \cdot \xi\right) \square \xi \left[\begin{smallmatrix}\omega_2 \cdots \omega_n \\ j_2 \cdots j_n\end{smallmatrix}\right]\right)\right\} \cdot \delta \left\{\begin{smallmatrix}\omega_2 \cdots \omega_n \\ j_2 \cdots j_n\end{smallmatrix}\right\} \\
= &\left(\tilde{\delta} \left\{\begin{smallmatrix}\omega_1 \\ j_1\end{smallmatrix}\right\} \square Q \left[\begin{smallmatrix}\omega_2 \cdots \omega_n \\ j_2 \cdots j_n\end{smallmatrix}\right]\right) \cdot \left(\xi \square \xi \left[\begin{smallmatrix}\omega_2 \cdots \omega_n \\ j_2 \cdots j_n\end{smallmatrix}\right]\right) \cdot \delta \left\{\begin{smallmatrix}\omega_2 \cdots \omega_n \\ j_2 \cdots j_n\end{smallmatrix}\right\} \\
= &\left(\tilde{\delta} \left\{\begin{smallmatrix}\omega_1 \\ j_1\end{smallmatrix}\right\} \square Q \left[\begin{smallmatrix}\omega_2 \cdots \omega_n \\ j_2 \cdots j_n\end{smallmatrix}\right]\right) \cdot \tilde{\delta} \left\{\begin{smallmatrix}\omega_2 \cdots \omega_n \\ j_2 \cdots j_n\end{smallmatrix}\right\} \cdot \xi \\
= &\ \delta \left\{\begin{smallmatrix}\omega_1 \cdots \omega_n \\ j_1 \cdots j_n\end{smallmatrix}\right\} \cdot \xi . \qquad \square
\end{aligned}
$$

§2. 閉圏におけるNerode同値

閉圏Kにおける関手－□Aの右共役関手を［A，－］で表わす．このとき，X－機構（Q，δ）の出力射β：Q⟶Yに対して，共役対応

$$
\begin{array}{c}
Q \square Q \left[\begin{smallmatrix}\omega_1 \cdots \omega_n \\ j_1 \cdots j_n\end{smallmatrix}\right] \xrightarrow{\delta \left\{\begin{smallmatrix}\omega_1 \cdots \omega_n \\ j_1 \cdots j_n\end{smallmatrix}\right\}} Q \xrightarrow{\beta} Y \\
\hline
Q \xrightarrow[\Delta \left\{\begin{smallmatrix}\omega_1 \cdots \omega_n \\ j_1 \cdots j_n\end{smallmatrix}\right\}]{} \left[Q \left[\begin{smallmatrix}\omega_1 \cdots \omega_n \\ j_1 \cdots j_n\end{smallmatrix}\right],\ Y\right]
\end{array}
$$

によって射$\Delta \left\{\begin{smallmatrix}\omega_1 \cdots \omega_n \\ j_1 \cdots j_n\end{smallmatrix}\right\}$を定める．すべての$\left(\begin{smallmatrix}\omega_1 \cdots \omega_n \\ j_1 \cdots j_n\end{smallmatrix}\right)$に対する射$\Delta \left\{\begin{smallmatrix}\omega_1 \cdots \omega_n \\ j_1 \cdots j_n\end{smallmatrix}\right\}$：Q⟶$\left[Q \left[\begin{smallmatrix}\omega_1 \cdots \omega_n \\ j_1 \cdots j_n\end{smallmatrix}\right],\ Y\right]$およびβ：Q⟶Yに対する一般核対（$\xi_0$，$\xi_1$）：$\tilde{Q}$⟶Qが存在するとき，（$\xi_0$，$\xi_1$）をX－機構（Q，δ）の出力射β：Q⟶Yに対するNerode同値という．（［e，Y］≅Yなので，Q〔〕＝e，δ〔〕：Q□e≅Qとおくと，Δ〔〕＝β：Q⟶Yとなる．）

命題4．（ξ_0，ξ_1）：$\tilde{Q}$⟶QがX－機構（Q，δ）の出力射β：

Q ⟶ Yに対するNerode同値であれば，任意の $\left(\begin{smallmatrix}\omega\\ j\end{smallmatrix}\right)$，$\left(\begin{smallmatrix}\omega_1\cdots\omega_n\\ j_1\cdots j_n\end{smallmatrix}\right)$ に対して，次の射の等式が成り立つ（ただし，$\nu(\omega)=\sigma_1\cdots\sigma_k$ とする）：

$$(Q^{\sigma_1}\square\cdots\square Q^{\sigma_{j-1}}\square\xi_0\square Q^{\sigma_{j+1}}\square\cdots\square Q^{\sigma_k})\cdot\delta_\omega\cdot\Delta\left\{\begin{smallmatrix}\omega_1\cdots\omega_n\\ j_1\cdots j_n\end{smallmatrix}\right\}$$
$$=(Q^{\sigma_1}\square\cdots\square Q^{\sigma_{j-1}}\square\xi_1\square Q^{\sigma_{j+1}}\square\cdots\square Q^{\sigma_k})\cdot\delta_\omega\cdot\Delta\left\{\begin{smallmatrix}\omega_1\cdots\omega_n\\ j_1\cdots j_n\end{smallmatrix}\right\}.$$

（証明）次の可換図式

$$\begin{tikzcd}
\tilde{Q}\square Q\left[\begin{smallmatrix}\omega\\ j\end{smallmatrix}\right] \arrow[r, "\xi_i\square Q\left[\begin{smallmatrix}\omega\\ j\end{smallmatrix}\right]"] \arrow[d, "\hat{\alpha}"'] & Q\square Q\left[\begin{smallmatrix}\omega\\ j\end{smallmatrix}\right] \arrow[d, "\alpha"] \\
Q^{\sigma_1}\square\cdots\square Q^{\sigma_{j-1}}\square\tilde{Q}\square Q^{\sigma_{j+1}}\square\cdots\square Q^{\sigma_k} \arrow[r, "Q^{\sigma_1}\square\cdots\square Q^{\sigma_{j-1}}\square\xi_i\square Q^{\sigma_{j+1}}\square\cdots\square Q^{\sigma_k}"'] & Q^{\nu(\omega)}
\end{tikzcd}$$

に注意すれば，i = 0，1に対して

$$\hat{\alpha}\cdot(Q^{\sigma_1}\square\cdots\square Q^{\sigma_{j-1}}\square\xi_i\square Q^{\sigma_{j+1}}\square\cdots\square Q^{\sigma_k})\cdot\delta_\omega\cdot\Delta\left\{\begin{smallmatrix}\omega_1\cdots\omega_n\\ j_1\cdots j_n\end{smallmatrix}\right\}$$
$$=\left(\xi_i\square Q\left[\begin{smallmatrix}\omega\\ j\end{smallmatrix}\right]\right)\cdot\alpha\cdot\delta_\omega\cdot\Delta\left\{\begin{smallmatrix}\omega_1\cdots\omega_n\\ j_1\cdots j_n\end{smallmatrix}\right\}$$
$$=\left(\xi_i\square Q\left[\begin{smallmatrix}\omega\\ j\end{smallmatrix}\right]\right)\cdot\delta\left\{\begin{smallmatrix}\omega\\ j\end{smallmatrix}\right\}\cdot\Delta\left\{\begin{smallmatrix}\omega_1\cdots\omega_n\\ j_1\cdots j_n\end{smallmatrix}\right\}$$
$$=\left(\xi_i\square Q\left[\begin{smallmatrix}\omega\\ j\end{smallmatrix}\right]\square Q\left[\begin{smallmatrix}\omega_1\cdots\omega_n\\ j_1\cdots j_n\end{smallmatrix}\right]\right)\cdot\left(\delta\left\{\begin{smallmatrix}\omega\\ j\end{smallmatrix}\right\}\square Q\left[\begin{smallmatrix}\omega_1\cdots\omega_n\\ j_1\cdots j_n\end{smallmatrix}\right]\right)$$
$$\cdot\delta\left\{\begin{smallmatrix}\omega_1\cdots\omega_n\\ j_1\cdots j_n\end{smallmatrix}\right\}\cdot\beta$$
$$=\left(\xi_i\square Q\left[\begin{smallmatrix}\omega\,\omega_1\cdots\omega_n\\ j\,j_1\cdots j_n\end{smallmatrix}\right]\right)\cdot\delta\left\{\begin{smallmatrix}\omega\,\omega_1\cdots\omega_n\\ j\,j_1\cdots j_n\end{smallmatrix}\right\}\cdot\beta$$
$$=\xi_i\cdot\Delta\left\{\begin{smallmatrix}\omega\,\omega_1\cdots\omega_n\\ j\,j_1\cdots j_n\end{smallmatrix}\right\}$$

となる．よって，Nerode同値の定義および $\hat{\alpha}$ が同型射であることより結論の式を得る． □

系5．$(\xi_0,\ \xi_1)$：$\tilde{Q}$ ⟶ QがX－機構（Q，δ）の出力射 β：Q ⟶ Yに対するNerode同値であれば，任意の $\omega\in\Omega$，$\left(\begin{smallmatrix}\omega_1\cdots\omega_n\\ j_1\cdots j_n\end{smallmatrix}\right)$ に対して，次の射の等式が成り立つ：

$$\xi_0^{\nu(\omega)}\cdot\delta_\omega\cdot\Delta\left\{\begin{smallmatrix}\omega_1\cdots\omega_n\\ j_1\cdots j_n\end{smallmatrix}\right\}=\xi_1^{\nu(\omega)}\cdot\delta_\omega\cdot\Delta\left\{\begin{smallmatrix}\omega_1\cdots\omega_n\\ j_1\cdots j_n\end{smallmatrix}\right\}.$$

（証明） $\nu(\omega)=\sigma_1\cdots\sigma_k\,(\sigma_1,\cdots,\sigma_k\in S_\theta)$，$1\leqq j\leqq k$ として

$$\xi_0^{\sigma_1}\,\Box\cdots\Box\,\xi_0^{\sigma_{j-1}}\Box\,\xi_0^{\sigma_j}\,\Box\,\xi_1^{\sigma_{j+1}}\Box\cdots\Box\,\xi_1^{\sigma_k}$$

$$=(\xi_0^{\sigma_1}\,\Box\cdots\Box\,\xi_0^{\sigma_{j-1}}\Box\,\tilde{Q}\,\Box\,\xi^{\sigma_{j+1}}\Box\cdot\cdot\Box\,\xi_1^{\sigma_k})$$

$$\cdot\,(Q^{\sigma_1}\,\Box\cdots\Box\,Q^{\sigma_{j-1}}\Box\,\xi_0^{\sigma_j}\,\Box\,Q^{\sigma_{j+1}}\Box\cdots\Box\,Q^{\sigma_k})$$

であることなどと，命題4の結果より明らか． □

§3．最小簡約定理

閉圏KにおけるX－機械Mとは，4つ組（Q，$\delta : QX \longrightarrow Q$，Y，$\beta : Q \longrightarrow Y$）であり，さらにX－機械$M'=$（$Q'$，$\delta' : Q'X \longrightarrow Q'$，Y，$\beta' : Q' \longrightarrow Y$）に対して，模倣射 $f : M \longrightarrow M'$とは，射 $f : Q \longrightarrow Q'$で次の図式を可換にするものである：

$$\begin{tikzcd}
QX \arrow[r, "fX"] \arrow[d, "\delta"'] & Q'X \arrow[d, "\delta'"] \\
Q \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\beta"'] & Q' \arrow[d, "\beta'"] \\
& Y.
\end{tikzcd}$$

対象Yを固定して，X－機械と模倣射からなる圏Mach（X，Y）が考えられる．模倣射 $f : M \longrightarrow M'$が簡約射（reduction）であるとは，射 $f : Q \longrightarrow Q'$が（反射的）余等化射のときである．簡約射 $f : M \longrightarrow M'$がX－機械Mの最小簡約射であるとは，任意の模倣射 $g : M$

$\longrightarrow M''$に対して，（唯一の）摸倣射 h ：$M' \longrightarrow M''$が存在して $f = g \cdot h$ が成り立つときと定義する．以上の準備のもとで，（反射的余等化射到達可能）最小実現定理を導くのに十分な最小簡約定理と呼ばれる主定理が得られる．

定理 6．（最小簡約定理）　余極限および一般核対をもつ閉圏Kにおける任意のX－機械Mは最小簡約射をもつ．

（証明）補題 1，系 5 を用いれば，〔4〕の定理 2．1と全く同様に証明される．　□

参考文献

[1] B.D.O. Anderson, M.A. Arbib and E.G. Manes; Foundations of system theory, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 115 (1976).

[2] S. Bozapalides and A. Firarides; Automata and categories, Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle 23 (1982), 149-156.

[3] S. Bozapalides and A. Firarides; Formal translation monoid and algebra congruences in a monoidel category, Monatsh. Math. 94 (1982), 201-212.

[4] Y. Kawahara and M. Yamaguchi; Minimal realization theory for tree process machines in monoidel categories, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. 34 (1980), 71-78.

[5] S. MacLane; Categories for the working mathematician, 1971.